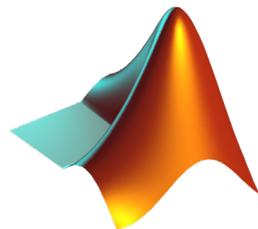
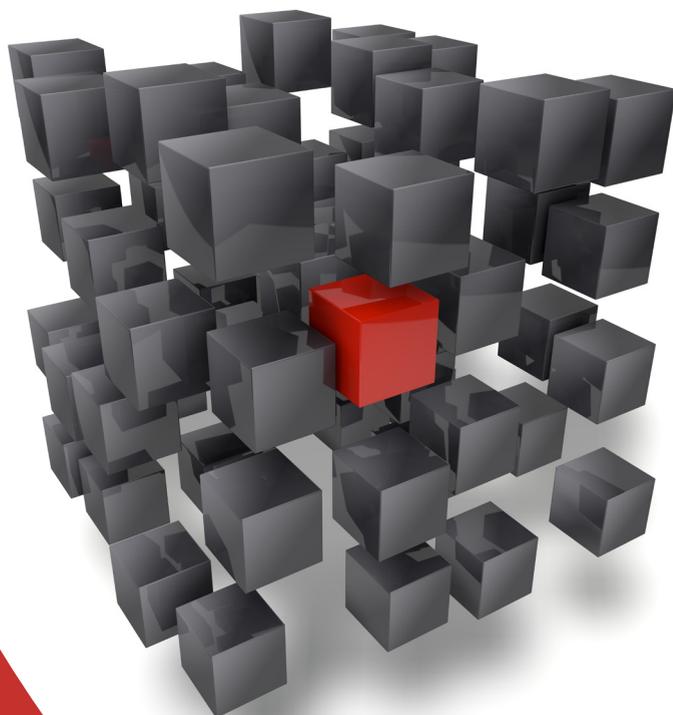


Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio



Valentín Gregori Gregori | Bernardino Roig Sala



Valentín Gregori Gregori
Bernardino Roig Sala

**Matlab, matrices y
transformaciones geométricas
en el plano y en el espacio**

Colección *Académica*

Para referenciar esta publicación utilice la siguiente cita:

Gregori Gregori, V.; Roig Sala, B. (2021).

Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio.

Valencia: Editorial Universitat Politècnica de València

Autoría

Valentín Gregori Gregori

Bernardino Roig Sala

Editorial Universitat Politècnica de València

www.lalibreria.upv.es / Ref.: 6702_01_01_01

ISBN: 978-84-9048-853-9

Si el lector detecta algún error en el libro o bien quiere contactar con los autores, puede enviar un correo a edicion@editorial.upv.es



Matlab, matrices y transformaciones geométricas en el plano y en el espacio

Se permite la reutilización y redistribución de los contenidos siempre que se reconozca la autoría y se cite con la información bibliográfica completa. No se permite el uso ni la generación de obras derivadas.

Autores

VALENTÍN GREGORI GREGORI

Catedrático de universidad que ejerce la docencia como profesor de matemáticas en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València. Ha dirigido varias tesis doctorales y ha publicado algunos libros docentes y un gran número de artículos de investigación sobre topología general y métrica fuzzy en revistas internacionales.

BERNARDINO ROIG SALA

Profesor titular en la Escuela Politécnica Superior de Gandía de la Universitat Politècnica de València; también lo ha sido en otras universidades presenciales y no presenciales, impartiendo asignaturas de la rama de las matemáticas. Es autor de libros y publicaciones docentes y especialista en mecánica computacional y otras aplicaciones numéricas de la matemática en donde es autor de numerosas publicaciones de investigación.

Resumen

Este texto está pensado para la realización de prácticas informáticas matriciales y de geometría para alumnos de primer curso con Matlab u Octave. Aparte de exponer las bases operativas y matriciales, también quiere ayudar a la comprensión de lo que son las transformaciones semejantes con un conjunto ágil y estructurado de comandos. En el primer capítulo realiza una introducción general al entorno de cálculo. En el segundo se tratan las matrices, su operatividad y aplicaciones. En el tercero se realiza una representación de curvas y figuras sencillas en el plano euclídeo utilizando distintos tipos de coordenadas (cartesianas y polares) mientras que en el quinto se realiza en el espacio (en cartesianas, cilíndricas y esféricas). En los capítulos cuarto y sexto se presentan las transformaciones geométricas en el plano y en el espacio euclídeo, respectivamente, desde una perspectiva de cálculo e interpretación geométrica. Finalmente se incluyen las soluciones de los ejercicios de autoevaluación propuestos en cada capítulo.

Presentación

Este texto está pensado para la realización de prácticas informáticas matriciales y de geometría de alumnos de primer curso, especialmente para los alumnos de la asignatura de Álgebra Matricial y Geometría del Grado en Tecnologías Interactivas que imparte el Departament de Matemàtica Aplicada en la Escola Politècnica Superior de Gandia de la Universitat Politècnica de València. En vistas a ello, la redacción utilizada en el texto es menos sobria que la usual en otros textos de matemáticas de los mismos autores.

La enseñanza de la geometría en los niveles previos a la universidad ha quedado reducida a cálculos geométricos sobre figuras *planas* más o menos regulares. Ello implica la existencia de lagunas en la mayoría de estudiantes que generan carencias en el tratamiento geométrico de imágenes. Este texto, aparte de exponer las bases operativas y matriciales, también quiere aportar su grano de arena a la comprensión de lo que son las transformaciones semejantes poniendo a disposición del lector un conjunto ágil y estructurado de comandos. En todo momento se añaden gráficas que ayudan a interpretar las ideas expuestas.

El texto está orientado para ejecutar todos los comandos en Matlab® en alguna de las últimas versiones aunque, como no se utiliza ninguna función especial en el desarrollo del texto (excepto alguna nota complementaria o alternativa), es compatible con Octave, con versiones más antiguas de Matlab® y, con algunos cambios, con otros entornos de cálculo como, por ejemplo, Scilab. Para los cálculos simbólicos en Octave se requiere instalar Python y sus librerías *Mpmath* y *SymPy* y cargarlas dentro de Octave con los comandos *pkg install -forge symbolic* y *pkg load symbolic*.

La formación necesaria para entender este libro son los conocimientos matemáticos de bachillerato requeridos para poder entrar a cualquier ingeniería o titulación científica y se ha escrito de modo que sea asequible para lectores de menor nivel matemático. Se pueden utilizar los procedimientos habituales de copia/pega de los comandos como si fueran funciones predefinidas para seguir con facilidad todo el libro.

En todo momento se indican los procedimientos matemáticos utilizados argumentados de forma coherente, pero no se demuestran, aunque en algunos casos se justifiquen. El lector puede encontrar las bases matemáticas necesarias en los libros “Álgebra Matricial” y “Geometría euclídea” de Estruch, Gregori y Roig incluidos en la bibliografía.

Los comandos se diferencian claramente del texto para evitar confusiones. Se han marcado en negrita los lugares en donde se define un concepto y se han referenciado en un índice al final del texto para facilitar su localización. Este documento se ha creado con enlaces que permiten navegar con facilidad por las diferentes secciones, referencias e índices. Cada visualizador suele tener un botón (léase combinación de teclas) para volver atrás cuando ya se ha visitado una referencia. Una forma habitual es “ALT”+“←” o “COMMAND”+“←”.

Al final de cada capítulo se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo. Se asume que se está en una situación de trabajo real en donde se dispone del entorno de cálculo habitual con su ayuda incorporada y que se puede consultar este texto. El único límite existente es la comprensión de los temas desarrollados. Se aconseja no consultar información por internet (excepto puntualmente) dado que el libro es autocontenido y la información existente en la red muchas veces no es adecuada. Los ejercicios propuestos son creativos mientras que los de autoevaluación se presentan a modo de prueba test de los contenidos. Una vez realizados estos últimos, se pueden verificar las respuestas en el apéndice A. En cada una de las preguntas solo hay una opción o respuesta que se adecúa al enunciado y, si no se indica lo contrario, se pide la respuesta que es cierta. Una pregunta correcta suma 1 punto, una incorrecta resta $1/3$ y una no contestada suma 0. Si el tiempo utilizado en responder cada pregunta (sin consultar las respuestas) es inferior a 5 minutos se ha alcanzado una buena comprensión del capítulo, si está entre 5 y 10 minutos el nivel de comprensión es ajustado y, si es superior a 10 minutos, es insuficiente.

El texto consta de seis capítulos y un apéndice. El primer capítulo realiza una introducción general al entorno de cálculo como si se tratase de una calculadora gráfica de amplias prestaciones en los distintos campos del cálculo científico. En el segundo capítulo se tratan las matrices, su operatividad y aplicaciones como, por ejemplo, en la fotografía digital. En el tercer capítulo se realiza una representación de puntos y figuras sencillas en el plano euclídeo utilizando distintos tipos de coordenadas (cartesianas y polares) mientras que en el quinto capítulo se realiza en el espacio (en cartesianas, cilíndricas y esféricas). En los capítulos cuarto y sexto se presentan las transformaciones geométricas en el plano y en el espacio euclídeo, respectivamente, desde una perspectiva de cálculo e interpretación geométrica. Ello permite conocer la esencia del funcionamiento de las transformaciones geométricas. Aunque la metodología propuesta se puede aplicar a cualquier transformación, nos centramos con las semejanzas por ser la base de ellas. En el apéndice se incluyen las soluciones de los ejercicios de autoevaluación propuestos en cada capítulo.

Los autores agradecen cualquier sugerencia para la mejora de este texto.

Los autores.

Notación

En este texto se ha evitado un lenguaje excesivamente simbólico. No obstante, el lector debe conocer la siguiente terminología básica que se usa en matemáticas y ciencias tecnológicas:

\forall	Cuantificador universal. Se lee “para todo.” “para cada”
\exists	Cuantificador existencial. Se lee “existe”
\iff	Equivalencia proposicional. Se lee “si y sólo si”
sii	Abreviatura de “si y sólo si”
\equiv	Equivalencia (o cambio convencional de notación)
\Rightarrow	Implicación proposicional. La proposición de la izquierda implica la de la derecha. Se lee “implica”
	Se lee “tal (tales) que”
:	Se lee “tal (tales) que”
i.e.	En latín <i>id est</i> y se lee “es decir”
\in	Símbolo de pertenencia
\subset	Símbolo de inclusión
\cup	Símbolo de unión
\cap	Símbolo de intersección
\mathbb{N}	Conjunto de los números naturales (incluye al cero)
\mathbb{N}^*	El conjunto \mathbb{N} sin el cero
\mathbb{Z}	El anillo de los números enteros
\mathbb{Q}	El cuerpo de los números racionales
\mathbb{R}	El cuerpo de los números reales
\mathbb{R}^+	El conjunto de los números reales estrictamente positivos
\mathbb{C}	El cuerpo de los números complejos

Ténganse presentes las siguientes abreviaturas utilizadas para referenciar otros sitios en el texto:

- ec. Ecuación
- sec. Sección

Sumario

1. Introducción al entorno de cálculo	11
1.1. EL ENTORNO DE CÁLCULO	11
1.1.1. Ventana de comandos	11
1.1.2. Operadores aritméticos	12
1.1.3. Comandos	13
1.1.4. Formatear un resultado numérico	14
1.1.5. Asignación de valores a variables	15
1.2. VARIABLES VECTORIALES Y MATRICIALES	17
1.2.1. Definición y construcción de vectores y matrices	17
1.2.2. Ejemplos constructivos	19
1.2.3. Operaciones matriciales	20
1.2.4. Ejemplos de operatividad matricial	21
1.2.5. Operaciones elemento a elemento	23
1.2.6. Ejemplos operativos elemento a elemento	24
1.2.7. Ejemplo de cálculo de valores estadísticos	25
1.3. FUNCIONES	26
1.3.1. Funciones elementales predefinidas	26
1.3.2. Definición de nuevas funciones	27
1.3.3. Ejemplo de función vectorial de dos variables	30
1.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES	31
1.4.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales	31
1.4.2. Resolución de sistemas de ecuaciones	31
1.4.3. Ejemplo de resolución de sistemas	32
1.5. GRÁFICOS BIDIMENSIONALES	33
1.5.1. Dibujo de puntos y polígonos con plot y fill	33

1.5.2.	Dibujo de funciones con fplot	34
1.5.3.	Otros comandos de representación gráfica	35
1.5.4.	Ejemplo de función definida a trozos	36
1.5.5.	Circunferencias y elipses	38
1.6.	GRÁFICOS TRIDIMENSIONALES	39
1.6.1.	Dibujo de puntos y curvas con plot3 y fplot3	40
1.6.2.	Dibujo de funciones y superficies con fsurf	41
1.7.	EJERCICIOS	42
1.7.1.	Ejercicios propuestos	42
1.7.2.	Ejercicios de autoevaluación	43
2.	Matrices y ecuaciones	47
2.1.	MATRICES	47
2.1.1.	Definiciones	47
2.1.2.	Operaciones con matrices	49
2.1.3.	Ejemplos de operaciones matriciales	52
2.1.4.	Ejemplo de ecuación matricial	52
2.2.	RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES	54
2.2.1.	Definiciones y teorema de Rouché-Fröbenius	54
2.2.2.	Resolución de un sistema compatible determinado	54
2.2.3.	Resolución de un sistema compatible indeterminado	55
2.2.4.	Resolución de un sistema sobredeterminado	57
2.2.5.	Ejemplo de regresión polinómica	58
2.3.	APLICACIÓN DE LAS MATRICES A LAS IMÁGENES DIGITALES	60
2.3.1.	Matrices e imágenes digitales	60
2.3.2.	Ejemplo de tratamiento de imágenes digitales	63
2.4.	EJERCICIOS	64
2.4.1.	Ejercicios propuestos	64
2.4.2.	Ejercicios de autoevaluación	65
3.	Figuras y curvas en el plano euclídeo	69
3.1.	COORDENADAS EN \mathbb{R}^2	69
3.1.1.	Coordenadas cartesianas	69
3.1.2.	Coordenadas homogéneas	70

3.1.3.	Coordenadas polares y números complejos	70
3.2.	PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^2	72
3.2.1.	Curva regular parametrizada	72
3.2.2.	Parametrización de recta y segmento	73
3.2.3.	Parametrización de circunferencia y elipse	74
3.2.4.	Parametrización de espirales	75
3.3.	FIGURAS EN EL PLANO REAL	75
3.3.1.	Ejemplo de figura plana	75
3.3.2.	Ejemplo de figura parametrizada	76
3.3.3.	Ejemplo de un trozo de pizza	77
3.3.4.	Ejemplo de representación de un polígono regular	78
3.3.5.	Ejemplo de representación de una recta	80
3.3.6.	Ejemplo de representación de circunferencias y elipses	80
3.3.7.	Ejemplo de representación paramétrica de espirales	81
3.3.8.	Ejemplo de representación de curvas en coordenadas polares	82
3.3.9.	Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos	84
3.4.	VECTOR TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA	85
3.5.	EJERCICIOS	86
3.5.1.	Ejercicios propuestos	86
3.5.2.	Ejercicios de autoevaluación	87
4.	Transformaciones geométricas en el plano	91
4.1.	TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^2	91
4.1.1.	Transformaciones del plano	91
4.1.2.	Isometrías y semejanzas	92
4.1.3.	Transformación afín	92
4.1.4.	Producto de transformaciones afines	93
4.1.5.	Caracterización de una transformación afín	94
4.2.	SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL	95
4.2.1.	Traslaciones	95
4.2.2.	Giros y simetrías respecto a un punto	96
4.2.3.	Simetrías respecto un eje	97
4.2.4.	Homotecias	99
4.2.5.	Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^2	100

4.3.	EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL	101
4.3.1.	Ejemplo de traslación	102
4.3.2.	Ejemplo de giro	103
4.3.3.	Ejemplo de simetría puntual	104
4.3.4.	Ejemplo de simetría axial	105
4.3.5.	Ejemplo de homotecia	107
4.3.6.	Ejemplo de cizallamiento o sesgado	108
4.3.7.	Procedimiento para el producto de semejanzas	109
4.3.8.	Ejemplo de producto de transformaciones afines	110
4.3.9.	Ejemplo de determinación de una transformación a partir de tres puntos	113
4.4.	EJERCICIOS	114
4.4.1.	Ejercicios propuestos	114
4.4.2.	Ejercicios de autoevaluación	115
5.	Curvas y superficies en el espacio euclídeo	119
5.1.	COORDENADAS EN \mathbb{R}^3	119
5.1.1.	Coordenadas cartesianas	119
5.1.2.	Coordenadas homogéneas	120
5.1.3.	Coordenadas cilíndricas	120
5.1.4.	Coordenadas esféricas	121
5.2.	PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^3	123
5.2.1.	Curva paramétrica	123
5.2.2.	Superficie paramétrica	124
5.3.	FIGURAS EN EL ESPACIO REAL	126
5.3.1.	Ejemplo de representación de una recta	126
5.3.2.	Ejemplo de curva parametrizada	127
5.3.3.	Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos	128
5.3.4.	Ejemplo de superficie paramétrica	129
5.3.5.	Ejemplo de casquete esférico	131
5.3.6.	Ejemplo de paralelepípedo al espacio	132
5.3.7.	Ejemplo de representación aproximada de una superficie mediante una nube de puntos	133
5.3.8.	Ejemplo de un cilindro con tapas	134
5.3.9.	Ejemplo de un trozo de sandía	136

5.4.	VECTORES TANGENTES A CURVAS Y SUPERFICIES . . .	138
5.4.1.	Vectores tangentes a una curva parametrizada	138
5.4.2.	Vectores tangentes a una superficie parametrizada . . .	140
5.5.	EJERCICIOS	141
5.5.1.	Ejercicios propuestos	142
5.5.2.	Ejercicios de autoevaluación	142
6.	Transformaciones geométricas en el espacio	145
6.1.	TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^3	145
6.1.1.	Transformaciones del espacio	145
6.1.2.	Isometrías y semejanzas	146
6.1.3.	Transformación afín	146
6.1.4.	Producto de transformaciones afines	147
6.1.5.	Caracterización de una transformación afín	148
6.2.	SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL	148
6.2.1.	Traslaciones	149
6.2.2.	Simetrías respecto un punto	149
6.2.3.	Homotecias	150
6.2.4.	Giros sobre un eje y simetría axial	151
6.2.5.	Simetrías respecto un plano	154
6.2.6.	Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^3	156
6.3.	EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL . . .	157
6.3.1.	Ejemplo de traslación	159
6.3.2.	Ejemplo de simetría respecto un punto	160
6.3.3.	Ejemplo de homotecia	161
6.3.4.	Ejemplo de giro y simetría respecto un eje	162
6.3.5.	Ejemplo de simetría respecto un plano	163
6.3.6.	Ejemplo de cizallamiento o sesgado	165
6.3.7.	Procedimiento para el producto de semejanzas	167
6.3.8.	Ejemplo de producto de transformaciones afines	167
6.3.9.	Ejemplo de determinación de una transformación afín a partir de cuatro puntos	170
6.4.	TRANSFORMACIONES PERSPECTIVAS	172

6.5.	EJERCICIOS	174
6.5.1.	Ejercicios propuestos	174
6.5.2.	Ejercicios de autoevaluación	175
A.	Soluciones de los ejercicios de autoevaluación	179
A.1.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 1	179
A.1.1.	Soluciones	179
A.1.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	179
A.2.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 2	184
A.2.1.	Soluciones	184
A.2.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	184
A.3.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 3	188
A.3.1.	Soluciones	188
A.3.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	189
A.4.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 4	194
A.4.1.	Soluciones	194
A.4.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	194
A.5.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 5	202
A.5.1.	Soluciones	202
A.5.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	202
A.6.	SOLUCIONES AL CAPÍTULO 6	210
A.6.1.	Soluciones	210
A.6.2.	Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar . .	210
	Referencias	227

Capítulo 1

Introducción al entorno de cálculo

Como se indica en la Presentación, el texto está orientado para ejecutar todos los comandos en Matlab en alguna de las últimas versiones aunque, como no se utiliza ninguna función especial en el desarrollo del texto (excepto en alguna nota complementaria o alternativa), es compatible con Octave, con versiones más antiguas de Matlab y, con algunos cambios, con otros entornos de cálculo como, por ejemplo, Scilab.

En este capítulo no se trata de entender los procesos matemáticos o algorítmicos que puedan estar detrás de los comandos, sino simplemente conocer las sintaxis de los comandos habituales que se requieren en este texto y qué se consigue con cada uno de ellos. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección [A.1](#) se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

1.1. EL ENTORNO DE CÁLCULO

1.1.1. Ventana de comandos

Al ejecutar el programa aparece la llamada pantalla o ventana de comandos. En ella aparece el menú general de la aplicación con todas sus opciones, así como el *prompt* (`>>`) para la entrada de comandos.

1.1.2. Operadores aritméticos

Para ejecutar un simple cálculo basta con escribir los comandos u órdenes al lado del *prompt* y pulsar la tecla *Enter*. Se devuelve la respuesta utilizando la expresión $ans = (answer)$. Por tanto, una de sus aplicaciones es poder servir como una gran calculadora. Los símbolos utilizados para las operaciones algebraicas son:

+ para la suma.

− para la diferencia.

* para el producto.

/ para el cociente.

∧ para la potencia.

Hay que tener en cuenta que, al combinar varios operadores en una misma entrada, hay unos **criterios de prioridad** entre las operaciones que, por defecto, determinan el orden de evaluación de la expresión y que se citan a continuación:

1. Primero se ejecutan las expresiones incluidas dentro de paréntesis.
2. Seguidamente se ejecutan las funciones.
3. Después las operaciones aritméticas: primero las potencias y luego los productos y cocientes de izquierda a derecha.
4. Por último, las sumas y restas también de izquierda a derecha.

Hay que tener también cuidado con los paréntesis y los corchetes, ya que se utilizan para cosas distintas. Ténganse siempre presente las siguientes observaciones:

- a. Si la expresión es un cociente o fracción y puede haber confusión, se sugiere introducir tanto el numerador como el denominador entre paréntesis: $(\dots) / (\dots)$.
- b. Cuando se desea realizar un producto es imprescindible escribir el signo * (asterisco) en la orden correspondiente. No se asume por omisión.
- c. Cuando hay expresiones no simples en potencias, es conveniente utilizar paréntesis: $(\dots) ^ (\dots)$.

Veamos cómo calcular la expresión $\frac{3(5-2)^2}{(10-3)(8-5)}$. Observa que los siguientes resultados ofrecen resultados distintos, pero sólo el último de ellos es el correcto. Se deben seguir las indicaciones dadas en la sección 1.1.2 y poner tanto el numerador como el denominador entre paréntesis.

```
3*5-2^2/10-3*8-5
3*(5-2)^2/(10-3)*(8-5)
(3*(5-2)^2)/(10-3)*(8-5)
(3*(5-2)^2) / ((10-3)*(8-5))
```

El resultado correcto es
ans = 1.2857

1.1.3. Comandos

Como ya se ha dicho con anterioridad, para que se ejecute una entrada, basta con pulsar la tecla *Enter* una vez escrita. Si al final de la entrada colocamos un punto y coma (;) el programa ejecuta los cálculos y los guarda en la memoria sin mostrar el resultado por la pantalla y aparece el *prompt* >> para indicar que se puede introducir una nueva entrada.

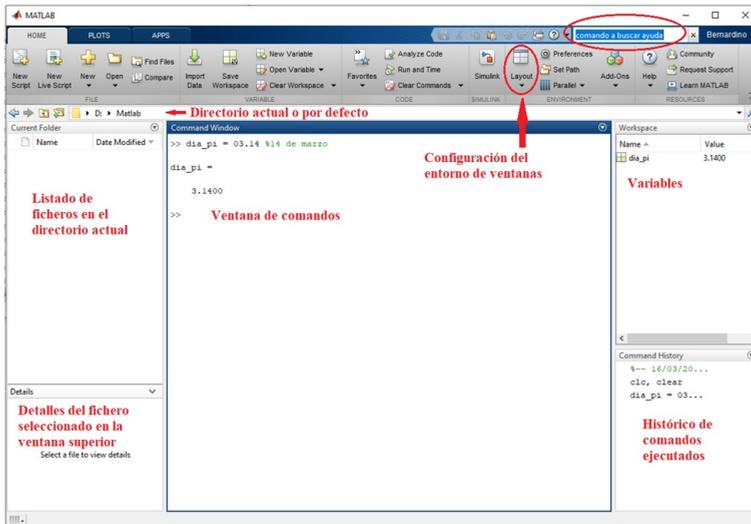
Se pueden realizar varias entradas en una misma línea. Basta con separarlas por comas o puntos y comas y pulsar *Enter*. Los comandos son almacenados de forma temporal hasta que finalice la sesión y también se guardan en el *Command History*. En cuanto al valor de las variables también se mantienen siempre y cuando no se eliminen con el comando `clear`.

Se puede utilizar el símbolo % para introducir **comentarios**. Todo lo que continua a dicho símbolo no se ejecuta.

En el caso de error en la entrada de un comando o si se van a entrar varios comandos similares, puede recuperarse una entrada anterior para modificarla de la manera adecuada. Para ello se utilizan las teclas de movimiento de cursor (ver figura inferior). Pulsando, por ejemplo, la tecla hacia arriba una vez se recupera la última entrada realizada. Pulsando varias veces se consigue recuperar cualquier entrada aunque se haya utilizado anteriormente `clc` para limpiar la pantalla. Las teclas hacia la derecha o izquierda permiten el desplazamiento sobre la línea actual.

	↑	
←	↓	→

A continuación, en la figura inferior se muestra el entorno gráfico de ventanas habitual en donde se indican sus partes.



Para obtener información sobre cualquier comando se puede utilizar la orden `help comando` aunque actualmente, como se observa en la parte superior derecha de la figura anterior se puede entrar un comando para buscar ayuda de forma bastante detallada (puede que se pida registro previo gratuito en *Mathworks*).

Entrando después del *prompt* el comando `clc` borra todas las entradas en la pantalla, pero no de la memoria del ordenador.

1.1.4. Formatear un resultado numérico

Por defecto se utiliza **dobles precisión**, es decir, 64 bits para un número real, lo cual implica que se tiene una precisión de 15 cifras decimales. El valor del **épsilon de la máquina** es del orden de $1.2 \cdot 10^{-16}$ que es el valor más pequeño representable correctamente. Valores inferiores o similares en módulo son indistinguibles y se pueden asumir que son cero.

Si algún problema lo requiriese, se puede utilizar **precisión cuádruple** (con 128 bits para cada número real) duplicando el número de decimales exactos representables pero utilizando el doble de memoria del ordenador y ralentizando los cálculos. Ello se puede conseguir mediante la *Symbolic Toolbox* u otras librerías.

Por defecto el resultado de un cálculo se muestra con 5 dígitos, uno de unidades más 4 de decimales en formato científico, aunque por defecto siempre trabaja con 15 dígitos. Así, por ejemplo, el año 2020 se escribe $2.020e03$ que equivale a $2.020 \cdot 10^3$, es decir,

$$2020 = 2.020 \cdot 10^3 = 2.020e03.$$

Este formato se puede modificar con los siguientes comandos:

- `format long` que da los resultados con 15 cifras.
- `format short` que da los resultados con 4 cifras.
- `format rat` que ofrece los resultados en forma racional.
- `format compact` que elimina las líneas en blanco de separación que hay en los resultados obtenidos.
- `format` que vuelve al formato por defecto.

Volvamos a realizar el cálculo de la sección 1.1.2 pero con distintos formatos. Introduce `format long`, recupera la entrada correcta con la flecha ↑ y pulsa *Enter*. Comprueba que el resultado es `ans = 1.28571428571429`

El formato racional se obtiene como sigue.

```
format rat, (3*(5-2)^2) / ((10-3)*(8-5))
ans = 9/7
```

Vuelve al formato por defecto introduciendo `format`

Comparad los valores obtenidos para $\sqrt{2} = 1.4142\dots$ con los siguientes comandos y, utilizando los criterios de prioridad, explicad el motivo de porqué el tercero da un valor extraño.

```
sqrt(2), 2^.5, 2^1/2, 2^(1/2)
```

1.1.5. Asignación de valores a variables

En muchas ocasiones es conveniente guardar los resultados intermedios en la memoria del ordenador asignando cada valor a un nombre llamado **variable**. A priori, cualquier palabra que empiece por una letra y no contenga símbolos extraños (como los signos de puntuación, operadores, espacios en blanco, letras con tildes, ...) es apta como variable siempre y cuando no sea un comando o variable protegida. A continuación se muestran los valores de algunas variables predefinidas.

- `pi` valor de π
- `i` y también `j`, unidad imaginaria ($\sqrt{-1}$)
- `inf` infinito
- `NaN` indeterminación (*Not a Number*)

- `realmin` menor número real positivo utilizable
- `realmax` mayor número real positivo utilizable
- `ans` último resultado obtenido no asignado a ninguna variable
- `diary` guarda el texto de la sesión actual de Matlab

Por defecto se diferencian las mayúsculas de las minúsculas, aunque ello se puede cambiar. El valor de la variable `namelengthmax` indica la longitud máxima de caracteres de una variable (habitualmente 63).

Todas las variables aparecen en la ventana *Workspace* del *Layout* (ver figura de la sección 1.1.3), aunque también se puede obtener un listado con el comando `who`. Utilizando en dicha ventana el botón derecho del ratón sobre una variable aparecen distintas opciones como borrar la variable, visualizarla, . . . Se pueden borrar todas las variables a la vez con el comando `clear`, y si se añade a posteriori de este comando el nombre de una variable sólo se borra esa variable. Como siempre, con el comando `help clear` se obtiene más información.

Nota: Como $j^2 = -1$ se pueden calcular raíces cuadradas de valores negativos: $\sqrt{-4} = \sqrt{4 \cdot (-1)} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{-1} = \pm 2 \cdot j$.

Para definir una variable `x`, asignarle el valor de 3 y poner en `y` el valor de `x` al cuadrado, se pueden introducir los siguientes comandos separados por una coma.

```
x=3, y=x^2
```

A continuación se pregunta por las variables en memoria, se borra sólo la variable `y` y se verifica con:

```
who, clear y, who
```

Para conocer la suma y el producto de los valores $a = 1324$, $b = 2685$, $c = 300$, puede procederse con los siguientes comandos. Se observa que en la primera entrada el ordenador no devuelve el valor de `a`, `b` y `c` debido al punto y coma y suele utilizarse para la entrada de datos.

```
a=1324; b=2685; c=300;
suma=a+b+c, producto=a*b*c
```

1.2. VARIABLES VECTORIALES Y MATRICIALES

1.2.1. Definición y construcción de vectores y matrices

Los vectores y las matrices se utilizan en muchas operaciones y en cualquier hoja de cálculo que trabaja con columnas y filas. Se pueden compaginar las operaciones matemáticas habituales (+, -, *, /, ^) y las operaciones elemento a elemento (+, -, .*, ./, .^) que veremos más adelante.

Para definir una variable X que corresponda a un **vector fila** de n **componentes** (1 fila n columnas) o coeficientes reales o complejos $\vec{x} = (x_1, \dots, x_n)$ éstos se escriben separados por comas o espacios dentro de corchetes (paréntesis cuadrados); si se quiere un **vector columna** (n filas 1 columna) se deben separar por puntos y comas como se indica a continuación:

```
X = [x1, x2, ..., xn] % vector fila
X = [x1 x2 ... xn] % vector fila
X = [x1; x2; ...; xn] % vector columna
```

Por defecto, los vectores se denotarán con una flecha encima de éstos en el texto pero no en los comandos. Por defecto, en las operaciones matemáticas asumiremos que un vector siempre es vector columna. Las componentes de un vector se numeran de izquierda a derecha o de arriba abajo dependiendo de si es un vector fila o columna respectivamente. Dicha posición se denota mediante un número entre paréntesis. Así, por ejemplo, la segunda componente de X (de \vec{x}) es X(2) que vale x_2 .

Una **matriz** A se puede considerar como un vector de vectores que tiene un formato estructurado tipo tabla bidimensional en sus coeficientes con m filas (horizontales) y n columnas (verticales). En este caso se puede considerar que A está formada por m vectores fila de n componentes uno debajo de otro, o bien, n vectores columna de m componentes uno a la derecha del otro. La notación habitual es

$$A = (a_{i,j})_{\substack{i=1, \dots, m \\ j=1, \dots, n}} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n} \end{pmatrix}$$

que se define con el comando

```
A=[a11, a12, ..., a1n; a21, a22, ..., a2n; ... am1, am2, ..., amn]
```

Cada componente o coeficiente de una matriz queda posicionado por su número de fila y su número de columna, siempre en este orden. Esta posición

se denota mediante dos números entre paréntesis separados por una coma. Así, por ejemplo, el coeficiente $a_{2,3}$ es el coeficiente de A de la segunda fila y tercera columna que se obtiene con el comando `A(2,3)`. Esta notación es similar a la utilizada en el álgebra matricial. A veces, si no hay confusión, se elimina la coma entre el subíndice fila y columna en la notación matemática, es decir, $a_{23} = a_{2,3}$. Se llama **submatriz** de A a cualquier matriz obtenida al eliminar un cierto número de filas y/o columnas en A .

El entorno de cálculo es muy flexible para definir matrices y, siempre que las dimensiones lo permitan, se pueden juntar trozos concatenando **bloques matriciales** o submatrices como se muestra en el siguiente ejemplo.

```
X=[1,2], Xtras=[1;2], a=3, B=[1 0;0 1]
A=[X,a; B,Xtras]
A =
```

$$\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & 3 \\ \hline 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{array}$$

También se pueden extraer filas o columnas enteras consecutivas o no, submatrices,... y se pueden definir vectores o matrices como se observa en los siguientes comandos.

- `X=ini:incr:fi` define un vector desde inicio ini hasta final fi a incrementos $incr$ sin sobrepasar nunca el final. El incremento puede ser positivo o negativo y habitualmente se utiliza con números enteros aunque no es imprescindible. El incremento se puede omitir en cuyo caso vale la unidad.
- `X=linspace(Xini,Xfi,N)` define un vector de N puntos equiespaciados desde el inicio $Xini$ hasta el final Xfi . Como hay N puntos y $N-1$ intervalos, la distancia entre dos puntos consecutivos es $(Xfi-Xini)/(N-1)$. A diferencia del comando anterior, en este caso siempre se alcanza el valor final Xfi .
- `A(m,n)` define el elemento en la posición (m,n) de la matriz A
- `A(a:b,c:d)` define la submatriz de A formada por las filas que hay entre la a -ésima y b -ésima y por las columnas situadas entre la c -ésima y d -ésima.
- `A(F,C)` con F y C vectores de índices de filas y columnas respectivamente de A , define la submatriz de A formada por las filas y las columnas incluidas en F y C respectivamente.
- `A(a,:)` obtiene la fila a -ésima de la matriz A .

- $A(:, b)$ obtiene la columna b -ésima de la matriz A .
- $\text{eye}(n)$ crea la **matriz identidad** de dimensión n con unos en la diagonal y ceros fuera de ella.
- $\text{zeros}(m, n)$ crea la **matriz nula** de orden $m \times n$ con ceros en todas sus posiciones.
- $\text{ones}(m, n)$ crea una matriz de orden $m \times n$ con todos sus elementos iguales a uno.
- $\text{rand}(m, n)$ crea una **matriz aleatoria** de orden $m \times n$ con valores entre 0 y 1. Obviamente, $a + (b-a) * \text{rand}(m, n)$ crea una matriz al azar de orden $m \times n$ con valores entre a y b .

1.2.2. Ejemplos constructivos

Primero se limpia la pantalla (con `clc`) y se elimina de la memoria las variables utilizadas (con `clear`).

El vector $\vec{v}_1 = (1, 4, 5, 8, 9)$ se define como `v1=[1 4 5 8 9];`

Si el vector tiene componentes equidistantes, como ocurre con $\vec{v}_2 = (20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200)$, es preferible utilizar la forma indirecta (nótese que aquí no se precisan los corchetes):

`v2=20:10:200;`

A partir de los dos vectores anteriores se puede construir uno nuevo v_3 que resulte de concatenar v_1 con v_2 :

`v3=[v1, v2]`

Se construye ahora de forma indirecta un vector con los números pares entre 10 y 60 en orden ascendente primero y descendente después con los comandos

`v=linspace(10, 60, (60-10)/2+1)` y `w=60:-2:10`

Obsérvese que cuando se divide un intervalo mediante puntos siempre hay un punto más que intervalo (ver sec. 1.2.1). Por ejemplo, para partir el intervalo $[0, 6]$ en tres trozos equiespaciados se deben utilizar cuatro puntos $\{0, 2, 4, 6\}$ obteniendo $[0, 6] = [0, 2] \cup [2, 4] \cup [4, 6]$.

Se define la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$, la matriz identidad $I 3 \times 3$, la matriz nula $O 3 \times 3$ y, a continuación, se construye la matriz $B 9 \times 9$ definida

a bloques como se indica en $B = \begin{pmatrix} I & O & A \\ O & I & O \\ A & O & I \end{pmatrix}$. Finalmente, se forma la submatriz C de B a partir de sus filas 1, 2 y 5 y sus columnas 4 a 9.

$A=[1 \ -1 \ -3; \ 0 \ 2 \ 8; \ 2 \ 1 \ 2]$, $\text{Id}=\text{eye}(3)$, $O=\text{zeros}(3,3)$

$B=[\text{Id}, O, A; \ O, \text{Id}, O; \ A, O, \text{Id}]$

$C=B([1, 2, 5], \ 4:9)$

$C =$

0	0	0	1	-1	-3
0	0	0	0	2	8
0	1	0	0	0	0

1.2.3. Operaciones matriciales

Sean A, B, C matrices y sean v y w vectores fila o columna del tamaño que corresponda en cada caso. A continuación se explicitan las **operaciones matriciales** más habituales:

- $A+B, A-B, A*B$ suma, resta y producto matricial de las matrices A y B , respectivamente (siempre que las dimensiones de las matrices lo permitan).
- A^p matriz elevada a la potencia real p (debe ser una matriz cuadrada).
- $c*A$ producto del escalar c por la matriz A .
- A' calcula la matriz traspuesta de la matriz real A . Si A es compleja calcula su matriz traspuesta conjugada.
- $\det(A)$ obtiene el determinante de la matriz cuadrada A .
- $\text{inv}(A)$ o bien A^{-1} calcula la matriz inversa de la matriz cuadrada A . Se recuerda que la matriz tiene inversa cuando su determinante es no nulo.
- $\text{rank}(A)$ devuelve el **rango** de la matriz A , es decir, el máximo número de filas (o columnas) linealmente independientes. Si una matriz cuadrada tiene determinante no nulo entonces su **rango** es **máximo**, igual a su tamaño.

También existen otras operaciones con matrices que no son matemáticas como las siguientes:

- `max(v)` da la mayor componente del vector v . En matrices, `max(A)` da el máximo por columnas. Por defecto en matrices se hace variando el primer índice que son las filas. Con `help max` se pueden ver otras opciones. Este comentario también se aplica a los comandos siguientes que operan por columnas.
- `min(v)` da la menor componente del vector v . En matrices, `min(A)` da el mínimo por columnas.
- `sum(v)` devuelve la suma de los elementos del vector v . En matrices, `sum(A)` da la suma por columnas.
- `prod(v)` devuelve el producto de todas las componentes del vector v . En matrices, `prod(A)` da el producto por columnas.
- `length(v)` devuelve el número de elementos o componentes del vector v , es decir, su longitud.
- `size(A)` devuelve un vector con el número de filas y de columnas en las matrices bidimensionales.
- `A\B` equivale a multiplicar matricialmente la inversa de A (cuando existe) por B , es decir, $A^{-1} * B$
- `B/A` equivale a multiplicar matricialmente B por la inversa de A (cuando existe), es decir, $B * A^{-1}$
- `A>a` siendo a un número real crea una matriz *lógica* con unos en las posiciones en donde dicha comparativa es cierta para el coeficiente situado en dicha ubicación. En caso contrario, pone un cero. Consultar la ayuda para otros operadores lógicos (`>`, `>=`, `==`, `>=`, `<=`, `&&`, `||`).
- `reshape(A, n, m)` reescribe una matriz A con $m \cdot n$ coeficientes como $n \times m$ ordenando los coeficientes por columnas (variando el primer índice). Si se quieren ordenar por filas basta con aplicar el comando a la matriz traspuesta. Se pueden utilizar otras dimensiones siempre que *globalmente* coincidan con $m \cdot n$ (ver sec. 1.2.4).

1.2.4. Ejemplos de operatividad matricial

Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 0 & 2 & 8 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & -3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ que se introducen con los comandos

$A=[1 \ -1 \ -3; \ 0 \ 2 \ 8; \ 2 \ 1 \ 2], B=[1 \ 4 \ 0 \ 3; \ 0 \ 2 \ -3 \ 1; \ 3 \ 1 \ 2 \ 5]$

Se van a realizar las siguientes operaciones con los comandos que se adjuntan y observar si son posibles o si no lo son y si dan errores.

Sumar A con B , y sumar A con las tres primeras columnas de B (y todas las filas):

$A+B, A+B(:, 1:3)$

Obsérvese que el último comando no se ejecuta porque el anterior ha dado un error. Para poder ejecutarlo se debe escribir (o copiar y pegar) de forma independiente. Para sumar dos matrices han de tener las mismas dimensiones.

Calcular el determinante y el rango de A con los siguientes comandos:
 $\det(A), \text{rank}(A)$

Como el determinante es no nulo, existe la matriz inversa de A , A^{-1} , y su rango es máximo (3 columnas linealmente independientes) como se verifica en el segundo comando.

Calcular el cubo de la matriz A y su inversa (que ya se ha visto que existe) de tres formas distintas con las siguientes órdenes (obsérvese que la última forma de calcular la inversa no es una operación matemática):

$A^3, A*A*A, A^2*A, A^{-1}, \text{inv}(A), \text{eye}(3)/A$

Definir el vector v como la primera fila de B , el w como la última y z como la resta a v de tres veces w , con los siguientes comandos. ¿Cuál es la cuarta componente de z ?

$v=B(1, :), w=B(3, :), z=v-3*w, z(4)$

Para contar cuantos elementos mayores que la unidad tiene B basta con aplicar un operador lógico y sumar dos veces, una para las columnas y otra para las filas como se realiza con el siguiente comando obteniendo el valor 6.
 $\text{sum}(\text{sum}(B>1))$

Se puede reescribir la matriz B que es 3×4 como una matriz 2×6 dado que la dimensión global coincide ($3 \cdot 4 = 2 \cdot 6 = 12$). Por defecto se ordenan por columnas los elementos de B y se van tomando 2 a 2 para crear cada una de las nuevas columnas. También se pueden ordenar por filas e irlos tomando 2 a 2 para crear cada una de las nuevas columnas. Ambos casos se pueden obtener con los siguientes comandos.

$\text{reshape}(B, 2, 6), \text{reshape}(B', 2, 6)$

ans =

1	3	2	0	2	1
0	4	1	-3	3	5

ans =

1	0	0	-3	3	2
4	3	2	1	1	5

1.2.5. Operaciones elemento a elemento

Las **operaciones elemento a elemento** permiten efectuar una misma operación sobre cada uno de los elementos de un vector o de una matriz como números independientes. De esta forma se trabaja como en una hoja de cálculo. Algunas de las operaciones algebraicas conocidas para los vectores, como son la suma (+) y la resta (-) de vectores, actúan por defecto de esta forma, es decir, se suman o restan componente a componentes. Sin embargo, el producto algebraico de vectores (o de matrices) no actúa de la misma forma. Para ello se definen las operaciones producto (\cdot), cociente ($\cdot /$) y potencia ($\cdot ^$) elemento a elemento. Además, por defecto, todas las funciones elementales (seno, coseno, exponencial, logaritmo,...) se aplican a vectores y matrices elemento a elemento.

Sean $a=[a_1, a_2, \dots, a_n]$, $b=[b_1, b_2, \dots, b_n]$ vectores con misma dimensión (también podrían ser vectores columnas) y x e y números reales o complejos (escalares). Sean A y B matrices de igual dimensión donde $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$. Se tiene que (obsérvese que las siguientes operaciones no son algebraicas excepto la suma y resta de vectores o matrices y el producto por escalares):

- $a.^x$ es el vector $[a_1^x, a_2^x, \dots, a_n^x]$
- $x.^a$ es el vector $[x^{a_1}, x^{a_2}, \dots, x^{a_n}]$
- $a+x$ es el vector $[a_1+x, a_2+x, \dots, a_n+x]$
- $a-x$ es el vector $[a_1-x, a_2-x, \dots, a_n-x]$
- $a+b$ es el vector $[a_1+b_1, a_2+b_2, \dots, a_n+b_n]$
- $a-b$ es el vector $[a_1-b_1, a_2-b_2, \dots, a_n-b_n]$
- $x*a$ es el vector $[x*a_1, x*a_2, \dots, x*a_n]$
- $a.*b$ es el vector $[a_1*b_1, a_2*b_2, \dots, a_n*b_n]$
- $a./b$ es el vector $[a_1/b_1, a_2/b_2, \dots, a_n/b_n]$
- $a.^b$ es el vector $[a_1^{b_1}, a_2^{b_2}, \dots, a_n^{b_n}]$
- $\text{diag}(a)$ devuelve una matriz cuadrada diagonal con los elementos de a en la diagonal.
- $\exp(a)$ calcula la exponencial de cada uno de los elementos de a .

- $\log(a)$ calcula el logaritmo neperiano de cada uno de los elementos de a , mientras que $\log_{10}(a)$ calcula el logaritmo decimal.
- $\text{sqrt}(a)$ calcula la raíz cuadrada de cada uno de los elementos de a .
- $\text{abs}(a)$ calcula el valor absoluto de cada uno de los elementos de a .
- $A.^x$ es la matriz $(a_{ij}^x)_{ij}$.
- $x.^A$ es la matriz $(x^{a_{ij}})_{ij}$.
- $A+x$ es la matriz $(a_{ij} + x)_{ij}$.
- $A+B$ es la matriz $(a_{ij} + b_{ij})_{ij}$.
- $A-B$ es la matriz $(a_{ij} - b_{ij})_{ij}$.
- $x*A$ es la matriz $(x \cdot a_{ij})_{ij}$.
- $A.*B$ es la matriz $(a_{ij} \cdot b_{ij})_{ij}$.
- $A./B$ es la matriz $(a_{ij}/b_{ij})_{ij}$.
- $A.^B$ es la matriz $(a_{ij}^{b_{ij}})_{ij}$.
- $\text{diag}(A)$ devuelve un vector con los elementos diagonales de A .
- $\exp(A)$ calcula la exponencial de cada uno de los elementos de A .
- $\log(A)$ calcula el logaritmo neperiano de cada uno de los elementos de A mientras que $\log_{10}(A)$ calcula el logaritmo decimal.
- $\text{sqrt}(A)$ calcula la raíz cuadrada de cada uno de los elementos de A .
- $\text{abs}(A)$ calcula el valor absoluto (o módulo) de cada uno de los elementos de A .

1.2.6. Ejemplos operativos elemento a elemento

A continuación se define el vector a con los números impares comprendidos entre 53 y 75, salvo los elementos quinto y octavo que valen 20, y se define el vector b como los elementos de a al cuadrado con los siguientes comandos.

```
a=53:2:75; a(5)=20; a(8)=20; b=a.^2
```

Supongamos que a y b corresponden a dos filas (o columnas) de una hoja de cálculo de longitud n y que ahora se quiere calcular una tercera llamada z que sea la primera al cuadrado dividida por el doble de la segunda al cubo más 2, es decir, $z_i = \frac{a_i^2}{2+2 \cdot b_i^3}$, $i = 1, \dots, n$. Ello se consigue con la siguiente orden.

```

z=a.^2 ./ (2+2*b.^3)
z =
    1.0e-05 *
Columns 1 through 8
0.0063 0.0055 0.0047 0.0041 0.3125 0.0032 0.0028 0.3125
Columns 9 through 12
0.0022 0.0020 0.0018 0.0016

```

Nótese que se ha sacado factor común $1.0e-05 = 10^{-5}$ (notación científica) a todos los coeficientes del vector.

A continuación, se calculan los valores máximo, mínimo y recorrido de z , la suma de sus valores absolutos y el producto de sus componentes.

```

maxz=max(z), minz=min(z), recorridoz=maxz-minz
sumadevaloresabsolutosdez=sum(abs(z)), productodez=prod(z)

```

Sea $A = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 0 & -9 \end{pmatrix}$ una matriz de la que se quiere calcular el cuadrado de cada uno de sus coeficientes. Ello se consigue fácilmente con los siguientes comandos.

```
A=[9 15; 0 -9], A.^2
```

1.2.7. Ejemplo de cálculo de valores estadísticos

Supongamos que tenemos los valores del número de hijos de una muestra de $N = 100$ personas encuestadas cuya tabla es la siguiente:

$i =$	1	2	3	4	5	6	7
Número de hijos $x_i =$	0	1	2	3	4	5	6
Frecuencia absoluta $n_i =$	10	27	33	15	10	4	1

La variable aleatoria considerada es $X =$ “Número de hijos” en la que se han obtenido $r = 7$ valores distintos. La frecuencia absoluta n_i es el número de veces que se repite cada uno de los valores obtenidos, x_i , en la muestra tomada, $i = 1, \dots, r$. Se debe verificar que $N = \sum_{i=1}^r n_i$ como ocurre en este caso. Se quiere calcular la media $\mu = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r x_i \cdot n_i$, la varianza $\sigma^2 = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^r (x_i - \mu)^2 \cdot n_i$ y la desviación típica $\sigma = \sqrt{\sigma^2}$. A veces, en vez de calcular la varianza σ^2 se calcula la cuasivarianza $\tilde{\sigma}^2 = \frac{N}{N-1} \sigma^2$. Ello se consigue con los siguientes comandos utilizando operaciones elemento a elemento.

```

X=[0 1 2 3 4 5 6];
F=[10 27 33 15 10 4 1];
media = sum(X.*F)/sum(F)
varianza = sum((X-media).^2.*F)/sum(F)

```

```
desvtipica = sqrt(varianza)
cuasivarianza = sum((X-media).^2.*F)/(sum(F)-1)
```

Se obtiene que

```
media = 2.0400
varianza = 1.7384
desvtipica = 1.3185
cuasivarianza = 1.7560
```

1.3. FUNCIONES

1.3.1. Funciones elementales predefinidas

Algunas de las funciones matemáticas elementales que podemos utilizar directamente son las que a continuación enumeramos. Pueden evaluarse sobre valores numéricos, sobre variables numéricas, sobre vectores y matrices o sobre expresiones numéricas.

- $\sin(x)$ seno (en radianes).
- $\cos(x)$ coseno (en radianes).
- $\tan(x)$ tangente (en radianes).
- $\text{asin}(x)$ arco seno (inversa del seno).
- $\text{acos}(x)$ arco coseno (inversa del seno).
- $\text{atan}(x)$ arco tangente (inversa de la tangente).
- $\text{sec}(x)$ secante (igual a $1/\cos x$).
- $\text{csc}(x)$ cosecante (igual a $1/\sin x$).
- $\text{cot}(x)$ cotangente (igual a $1/\tan x$).
- $\text{asec}(x)$ arco secante (inversa de la secante).
- $\text{acsc}(x)$ arco cosecante (inversa de la cosecante).
- $\text{acot}(x)$ arco cotangente (inversa de la cotangente).
- $\sinh(x)$ seno hiperbólico.
- $\cosh(x)$ coseno hiperbólico.

- $\tanh(x)$ tangente hiperbólica.
- $\operatorname{asinh}(x)$ argumento seno hiperbólico (inversa del seno hiperbólico).
- $\operatorname{acosh}(x)$ argumento coseno hiperbólico (inversa del coseno hiperbólico).
- $\operatorname{atanh}(x)$ argumento tangente hiperbólica (inversa de la tangente hiperbólica).
- $\exp(x)$ exponencial e^x . El valor de e no está predefinido, su valor es e^1 que se calcula con $\exp(1)$.
- $\log(x)$ logaritmo neperiano.
- $\log_{10}(x)$ logaritmo decimal.
- $\operatorname{sqrt}(x)$ raíz cuadrada.
- $\operatorname{abs}(x)$ valor absoluto o módulo si x es complejo.
- $\operatorname{round}(x, n)$ redondea el valor de x a n cifras decimales.
- $\operatorname{floor}(x)$ obtiene el mayor entero igual o inferior a x . Equivale a eliminar de las cifras decimales.
- $\operatorname{ceil}(x)$ obtiene el menor entero igual o superior a x .

Recuérdese que, por defecto, el ángulo se mide en radianes. Una vuelta completa son 2π radianes o 360° (grados sexagesimales) y que el ángulo crece positivamente en sentido contrario a las agujas del reloj (sentido antihorario). Se tiene que $\alpha^\circ = \alpha \cdot \frac{\pi}{180}$ radianes. Así pues, para calcular el seno de -90° se debe escribir $\sin(-90 * (\pi/180))$.

1.3.2. Definición de nuevas funciones

Se trata de definir una función cualquiera de una o varias variables y poderla evaluar en cualquier punto.

Definición con los comandos `syms` y `eval`

Este método consiste en definir variables simbólicas y escribir la expresión de la función a partir de ellas. Las **variables simbólicas** no tienen un valor concreto (aunque siempre se puede sustituir a posteriori) y se pueden operar entre ellas simplificando las expresiones obtenidas. Llamemos `fun` a la

función que depende de tres variables (que llamamos x , y , z), por ejemplo, $\text{fun}(x, y, z) = x^3 + y \sin z$, y que se quiere evaluar en $(x, y, z) = (1, 2, 3)$. Si se utilizan operaciones componente a componente en la expresión de `fun`, entonces se puede evaluar sobre vectores o matrices (ver sec. 1.2.5). Para conocer el valor de una función `fun` es suficiente con asignar valores a sus variables y seguidamente utilizar el comando `eval(fun)`. Los comandos a utilizar son los siguientes (las variables se separan con espacios en blanco en `syms`).

```
syms x y z % definición de variables como simbólicas
fun= x.^3+y.*sin(z) % expresión con las variables simbólicas
x=1, y=2, z=3 % asignación de valores (ya no son simbólicas)
eval(fun)
```

La definición de funciones en simbólico también permite realizar otro tipo de operaciones y manipulaciones algebraicas como derivar, integrar, factorizar,... A modo de ejemplo se muestran las siguientes en donde se ha puesto nombres a las variables coherentes a lo que representan.

```
syms x y z % definición de variables como simbólicas
fun= x.^3+y.*sin(z) % expresión con las variables simbólicas
der_fun_x_2=diff(fun,x,2) % derivada segunda de fun en x
der_fun_z_1=diff(fun,z) % derivada primera de fun en z
int_fun_y=int(fun,y) % integral indefinida de fun en y
int_fun_y=int(fun,y,[0,1]) % integral definida en y en [0,1]
x=1;y=2;z=pi/3; eval(der_fun_z_1) % evaluación derivada
syms x, factor((2*x+3)^3-x+1) % factorización en x^n
```

Definición con identificadores de funciones @

Este método consiste en utilizar identificador de funciones (apuntadores, *function handle*) con el símbolo `@` de modo que se evalúa como si fuera una función predefinida. Llamémosla `fun` y que dependa de tres variables x , y , z igual a la sección anterior y que se quiere evaluar en el mismo punto. Si se utilizan operaciones elemento a elemento, las variables independientes pueden ser vectores o matrices (ver sec. 1.2.5). La única restricción importante es que sólo se permite una única sentencia ejecutable y no se pueden implementar funciones más complejas de este modo.

```
fun=@(x,y,z) x.^3+y.*sin(z) % expresión con las variables
fun(1,2,3)
```

Esta forma de definir funciones es cómoda y versátil. Es por ello que existe un comando que permite transformar una función definida con variables simbólicas a identificador de función con el comando `matlabFunction` (ver sus opciones mediante el `help`). A modo de ejemplo se transforma la función

anterior simbólica a identificador de función. En la “Opción 2” no solo se especifican las variables de `fun`, sino también su orden aunque en este caso coincide con la “Opción 1” dado que el orden es alfabético. Obsérvese que se obtienen operaciones elemento a elemento para poder evaluar la función obtenida sobre vectores.

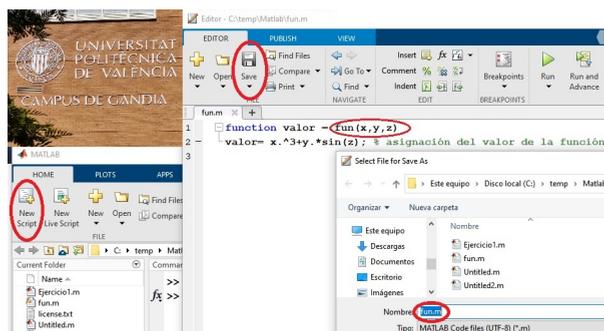
```
syms x y z % definición de variables como simbólicas
fun= x^3+y*sin(z) % expresión con las variables simbólicas
fun=matlabFunction(fun) % Opción 1. Redefinición de fun
fun= x^3+y*sin(z) % expresión con las variables simbólicas
fun=matlabFunction(fun, 'Vars', [x,y,z]) % Opción 2
fun(1,2,3)
```

Definición con un fichero independiente script

Este método consiste en crear un fichero de texto independiente llamado `fun.m` con el mismo nombre que la función `fun` y que se sitúa en el directorio por defecto (o en uno incluido en el *path*) (ver imagen inferior). De este modo la función se evalúa como si fuera una función predefinida. Los ficheros `*.m` también sirven para ejecutar ordenadamente un cierto número de comandos o programa (*script*).

Se asume, a modo de ejemplo, la función de la sección anterior que se quiere evaluar en el mismo punto. Se requiere el uso de una variable auxiliar que, por ejemplo, llamaremos `valor`. Este fichero de texto siempre debe empezar con la palabra reservada `function` como se observa a continuación y en la imagen inferior.

```
function valor = fun(x,y,z)
valor= x.^3+y.*sin(z); % asignación del valor de la función
```



Si se utilizan operaciones punto a punto, las variables independientes pueden ser vectores o matrices (ver sec. 1.2.5). Se pueden utilizar tantas variables auxiliares y líneas de comandos como se requiera. Es conveniente terminar

todas las líneas de comando en ; para que no aparezcan resultados intermedios en la ventana de comandos. El fichero `fun.m` solo se ejecuta si la variable no está en la memoria, por eso primero se borra con

```
clear fun %se borra para asegurarnos que ejecuta fun.m
```

y seguidamente se evalúa la función:

```
fun(1,2,3)
```

1.3.3. Ejemplo de función vectorial de dos variables

Se quiere definir la función vectorial $\vec{g}(\vec{x})$ de \mathbb{R}^2 a \mathbb{R}^2 donde $\vec{x} = (x, y)$ y donde \vec{g} tiene funciones componentes $g_1(\vec{x})$, $g_2(\vec{x})$ definidas por

$$\vec{g}(\vec{x}) = \vec{g}(x, y) = \begin{pmatrix} g_1(x, y) \\ g_2(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2xy \\ 1 + x - y \end{pmatrix}.$$

Seguidamente se quiere evaluarla en el punto $(-1, 2)$ obteniendo

$$\vec{g}(-1, 2) = \begin{pmatrix} g_1(-1, 2) \\ g_2(-1, 2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot (-1) \cdot 2 \\ 1 + (-1) - 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Nótese que la entrada en \vec{g} es un único vector (vector columna) de dos componentes (x, y) y la salida es un único vector (vector columna) de dos componentes (g_1, g_2) .

Ello se puede conseguir simbólicamente con los siguientes comandos.

```
syms x y , g= [2*x*y; 1+x-y]
x=-1, y=2, eval(g)
```

También se puede hacer con identificador de funciones como sigue. Obsérvese que ahora sólo hay una única variable vectorial x con dos componentes, $x = x(1)$ e $y = x(2)$.

```
g=@(x) [2*x(1)*x(2); 1+x(1)-x(2)]
g([-1; 2])
```

Finalmente vamos a evaluar \vec{g} mediante el *script* `g.m` con los comandos abajo adjuntos.

```
function valor=g(x)
valor=[2*x(1)*x(2); 1+x(1)-x(2)];
```

A continuación, el fichero `g.m` se encuentra y se ejecuta si está en el directorio por defecto (o en el *path*). Para asegurarnos que ello ocurra se borra de la memoria la variable `g` previamente con

```
clear g
y se ejecuta con
g([-1; 2])
```

1.4. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS DE ECUACIONES

1.4.1. Resolución de sistemas de ecuaciones lineales

De manera informal se podría decir que un sistema lineal de ecuaciones está formado por unas cuantas ecuaciones en donde aparecen incógnitas cuyo valor se desea conocer y que están separadas por sumas y multiplicadas por constantes reales o complejas (ver la sec. 2.2 para más detalle). Más concretamente, un **sistema lineal** de m ecuaciones y n incógnitas (x_1, \dots, x_n) se escribe como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y matricialmente como

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{y } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

siendo A la **matriz del sistema**, \vec{x} el **vector de incógnitas** y \vec{b} el **término independiente**. A la matriz $A_a = [A, \vec{b}]$ se le llama **matriz ampliada**.

El teorema de Rouché-Fröbenius indica cuándo existe solución (cuando $\text{rang } A = \text{rang } A_a$) y cuándo es única (cuando $\text{rang } A = \text{rang } A_a = n$). En este caso, multiplicando por A^{-1} por la izquierda ambos miembros de la igualdad se tiene la **solución del sistema** (ver sec. 2.2.1 para más detalle):

$$A^{-1}A\vec{x} = A^{-1}\vec{b} \implies \vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

1.4.2. Resolución de sistemas de ecuaciones

Se dispone del comando `solve` para solucionar todo tipo de sistemas de ecuaciones utilizando variables simbólicas, así como del comando `fsolve` para solucionar sistemas escritos con identificador de funciones de la forma

$$\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0} \quad \text{donde } \vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(\vec{x}) \\ \vdots \\ f_m(\vec{x}) \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \vec{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \text{siendo}$$

f_1, \dots, f_m las funciones componentes de \vec{F} que definen las m ecuaciones sobre las n componentes del vector incógnita \vec{x} que pueden ser no lineales. `solve` intenta obtener una solución analítica cuando puede mientras que, por otro

lado, `fsolve` utiliza métodos numéricos para llegar a una solución partiendo de un valor inicial que hay que especificar.

1.4.3. Ejemplo de resolución de sistemas

Se requiere resolver el sistema
$$\begin{cases} 4x - 2y + 2z = 16 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$
 que es lineal. Pri-

mero se verifica que tiene solución única puesto que $\text{rang } A = \text{rang } A_a = n = 3$ (n es el número de incógnitas que coincide con el de las columnas de A) y luego se resuelve multiplicando por la matriz inversa por la izquierda con los siguientes comandos.

```
A=[4 -2 2; 1 2 3; 3 0 -1], b=[16; 9; 3]
rank(A), rank([A,b]), n=size(A,2) % ¿iguales?
x=A^(-1)*b
```

Resolvamos ahora el sistema anterior con el comando `solve`. Previamente se deben declarar las variables como simbólicas y expresar las ecuaciones con doble igualdad. La salida es una *variable tipo estructura* desde donde *cuelgan* los valores solución x , y , z que se pueden obtener utilizando un punto como se indica a continuación. Ahora bien, éstos se pueden asignar directamente, aunque para ello el orden de las variables al final del comando `solve` deben coincidir con el orden de asignación de las variables a la izquierda de la igualdad como sigue.

```
syms x y z
solucion=solve(4*x-2*y+2*z==16, x+2*y+3*z==9, 3*x-z==3, x, y, z)
solucion.x, solucion.y, solucion.z % en formato estructura
% Alternativa con asignación (ojo con el orden de x,y,z):
syms x y z
[x, y, z]=solve(4*x-2*y+2*z==16, x+2*y+3*z==9 3*x-z==3, x, y, z)
```

En el caso de que hubiera más de una solución x , y y z son vectores con todas las posibles soluciones encontradas. Las primeras coordenadas de estos vectores darían la primera solución, las segundas coordenadas la segunda solución y así sucesivamente. En el caso de ecuaciones no lineales puede que existan más soluciones de las que el comando `solve` haya podido encontrar.

Para resolver a continuación el sistema anterior mediante el comando `fsolve` primero se debe definir la función con un identificador de función teniendo presente que se iguala a cero cada ecuación ($\vec{F}(\vec{x}) = \vec{0}$ como se observa en la ecuación siguiente), y seguidamente se ejecuta el comando dando un valor inicial a las variables (a priori es arbitrario).

$$\vec{F}(\vec{x}) = \begin{pmatrix} f_1(x, y, z) \\ f_2(x, y, z) \\ f_3(x, y, z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x - 2y + 2z - 16 \\ x + 2y + 3z - 9 \\ 3x - z - 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

En este comando las incógnitas están dentro del vector \mathbf{x} siendo $x = \mathbf{x}(1)$, $y = \mathbf{x}(2)$, $z = \mathbf{x}(3)$. Se toma como punto inicial el $(0, 0, 0)$. La solución también se puede asignar a la variable como se muestra a continuación.

```
f=@(x) [4*x(1)-2*x(2)+2*x(3)-16; x(1)+2*x(2)+3*x(3)-9; ...
        3*x(1)-x(3)-3]
x= fsolve(f, [0;0;0]) % Cálculo con asignación
```

1.5. GRÁFICOS BIDIMENSIONALES

A continuación, analizaremos los comandos que permiten realizar dibujos en el plano. Una vez utilizado alguno de ellos, se abre una ventana gráfica titulada *Figure n^o* en la que aparecerá el dibujo pedido. Para cambiar de la gráfica a la de comandos puede hacerse simplemente con *Enter* o con el ratón o el teclado.

1.5.1. Dibujo de puntos y polígonos con plot y fill

Sirven para representar uno o varios puntos, o bien, los datos de una tabla de dos columnas. Si se desea representar un punto, o unos pocos, se puede sustituir en los siguientes comandos el valor de x , y , x_1 , y_1, \dots por las coordenadas correspondientes. Cuando son muchos datos conviene crear, con anterioridad a los comandos de dibujo, un vector \mathbf{x} y otro \mathbf{y} que contengan todas las abscisas y las ordenadas de los puntos, respectivamente. Se dispone de los siguientes comandos para las representaciones gráficas (profundícese la estructura de dichos comandos utilizando la ayuda incorporada en la aplicación):

- `plot(x, y)` dibuja el conjunto de puntos (x, y) . Si x e y son dos valores numéricos, se dibujará el punto de dichas coordenadas; si son vectores dibuja los puntos conectados de forma consecutiva con líneas rectas.
- `plot(x, y, s)` igual que `plot(x, y)` con las opciones definidas en s en formato carácter entre comillas simples. Habitualmente se compone de un o dos caracteres; el primero fija el color del dibujo del gráfico y el segundo el carácter con el que se ha de realizar el dibujo. A modo

de ejemplo se indican algunos valores: 'y' amarillo, 'w' blanco, 'g' verde, 'b' azul, 'r' rojo, 'k' negro, 'm' magenta, 'c' cyan, 'o' círculos, 'x' marcas x, '+' signo +, '*' asteriscos.

- `plot(y)` dibuja la poligonal que une los puntos $(1, y_1), (2, y_2), \dots, (n, y_n)$ si y es un vector de n componentes. Para que no los conecte con líneas y represente cada uno de los puntos con un `*` se puede utilizar `plot(y, '*')`.
- `plot(x1, y1, s1, x2, y2, s2, ...)` combina sobre los mismos ejes, los gráficos definidos por las ternas $(x_1, y_1, s_1), (x_2, y_2, s_2), \dots$ con el comando `plot`.
- `fill(x, y, s)` dibuja el polígono compacto cuyos vértices son los pares (x_i, y_i) con $x_i \in x$ e $y_i \in y$ rellenado con el color indicado en s .

Se representan los puntos de coordenadas $(1, 1)$, $(2, 2)$ y $(0.5, 3)$ con asteriscos de distintos colores con la siguiente orden.

```
plot(1, 1, 'r*', 2, 2, 'g*', 0.5, 3, 'b*')
```

Si deseamos representar la poligonal que une los tres puntos anteriores, debemos primero definir dos vectores, uno x para las abscisas y otro y para las ordenadas. Obsérvese que, si no se ha cerrado la ventana gráfica anterior, la nueva no aparece en la pantalla pero está en segundo plano y hay que localizarla.

```
x=[1, 2, 0.5]; y=[1, 2, 3]; plot(x, y)
```

Nótese que al triángulo le falta un lado. Para obtener una curva o **figura cerrada** se requiere que el último punto que se dibuje coincida con el primero. Ello se consigue con la siguiente orden en donde se repite el punto inicial. Como x e y son vectores fila, la nueva componente se añade con una coma, si fueran vectores columna, se añadiría con un punto y coma.

```
x=[1, 2, 0.5]; y=[1, 2, 3]; plot([x, x(1)], [y, y(1)])
```

Para representar el triángulo cuyos vértices son los puntos anteriores coloreado de rojo, basta con teclear

```
fill(x, y, 'r')
```

1.5.2. Dibujo de funciones con `fplot`

El comando `fplot` permite obtener de forma rápida la gráfica de una función $y = f(x)$. Si se desea acotar los valores de la variable independiente y que el dibujo aparezca sólo en ese intervalo se puede utilizar

```
fplot (f(x), [xmin, xmax], s)
```

que dibuja la función especificada para $x \in [xmin, xmax]$ con las opciones de color y tipo dadas por `s` (que es opcional). También se pueden representar varias gráficas (de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$, por ejemplo) en una sola ventana con `fplot({f1, f2, f3}, [xmin, xmax])` cada una de ellas con distinto color.

Como ejemplo, se dibuja la parábola x^2 y la cúbica x^3 en el intervalo $[-1, 1]$ con los siguientes comandos.

```
f1=@(x) x.^2;
f2=@(x) x.^3;
fplot({f1, f2}, [-1, 1])
% Alternativa:
syms x
fplot({x.^2, x.^3}, [-1, 1])
```

1.5.3. Otros comandos de representación gráfica

Si interesa solapar unos dibujos con otros en un mismo gráfico, se tienen los siguientes comandos.

- `hold on` mantiene el gráfico existente de forma que los siguientes gráficos que se realicen se sitúen sobre los mismos ejes y se superpongan.
- `hold off` anula la superposición de gráficos.
- `figure` que abre una nueva ventana gráfica.
- `close` cierra la última ventana gráfica activa.
- `close all` cierra todas las ventanas gráficas a la vez.
- `subplot(n, m, k)` subdivide la ventana gráfica en una matriz de n filas y m columnas de subventanas gráficas. El valor de k indica en qué subventana se va a dibujar numerándolas de izquierda a derecha primero, y luego de arriba a abajo.

Es natural que uno desee perfeccionar la gráfica añadiendo títulos u otros con las siguientes órdenes:

- `title('texto')` añade el `texto` en la parte superior, como título.
- `xlabel('texto')` añade el `texto` indicado como título del eje OX .
- `ylabel('texto')` añade el `texto` indicado como título del eje OY .

- `text(x, y, 'texto')` sitúa en el punto de coordenadas cartesianas (x, y) , el `texto` especificado.
- `gtext('texto')` permite situar el texto indicado en un punto que podrá ser elegido mediante el ratón.
- `grid` hace aparecer una cuadrícula. Cada vez que entramos `grid` ésta se permuta entre `on` y `off`. También puede utilizarse `grid on` y `grid off`.
- `axis([xmin xmax ymin ymax])` que sitúa los valores máximo y mínimo para los dos ejes en el gráfico.
- `axis('auto')` que sitúa los ejes en la escala automática por defecto, es decir, lineal y diferente para cada eje.
- `axis('square')` que presenta los ejes formando un cuadrado.
- `axis('equal')` que utiliza la misma escala lineal en los ejes. Es de utilidad para la visualización correcta de círculos y elipses.

Nota: La ventana gráfica dispone de un menú principal en su parte superior en el que se pueden especificar muchas opciones.

Habitualmente las escalas en los ejes OX y OY son lineales, aunque distintas. Si se quiere utilizar una escala logarítmica (decimal) en ambos ejes o sólo en uno de ellos basta utilizar uno de los siguientes comandos.

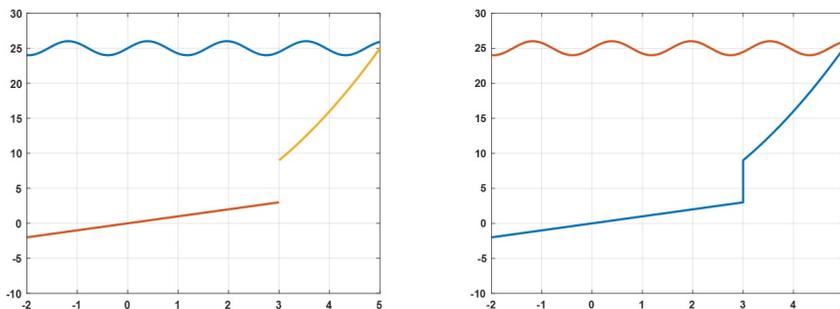
- `loglog(x, y)` similar a `plot(x, y)` y con sus mismas variantes y opciones pero con escala logarítmica en los dos ejes.
- `semilogx(x, y)` similar a `loglog(x, y)` pero solamente con escala logarítmica en el eje OX .
- `semilogy(x, y)` similar a `loglog(x, y)` pero solamente con escala logarítmica en el eje OY .

1.5.4. Ejemplo de función definida a trozos

Se quiere dibujar la **función definida a trozos** $f(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \in [-2, 3] \\ x^2 & \text{si } x \in]3, 5] \end{cases}$ junto con $g(x) = 25 + \text{sen}(4x)$ en el intervalo $[-2, 5]$. Para ello introduce los siguientes comandos.

```
close all, figure
syms x
fplot(25+sin(4*x), [-2, 5], 'b') % dibujo de g(x) en azul
hold on % para que se solapen las gráficas
fplot(x, [-2, 3])
fplot(x.^2, [3, 5])
axis([-2, 5, -10, 30]), grid on
```

Para poder ver bien el resultado al completo se debe realizar un aumento o *zoom*, o bien, variar la escala por ejemplo para $x \in [-2, 5]$ y para $y \in [-10, 30]$. A continuación, se añade una cuadrícula para situar mejor la función. En la figura inferior izquierda se muestra el resultado.



Por último, hay que tener la precaución de desconectar el comando de solapamiento de dibujos con `hold off` (o cerrar la ventana gráfica), ya que en caso contrario las siguientes gráficas se irían solapando.

Veamos ahora una alternativa que existe para definir una función a trozos que utiliza la **función escalón unidad**, $\text{esc}=@(x) (x>a)$, que vale cero en $(-\infty, a]$ y vale 1 en $]a, +\infty)$. Gracias a ella se tiene que

$$h(x) = \left\{ \begin{array}{l} h_1(x) \text{ si } x \leq a \\ h_2(x) \text{ si } x > a \end{array} \right\} = h_1(x) + (h_2(x) - h_1(x)) \cdot (x > a)$$

que, en este caso se puede aplicar con los siguientes comandos:

```
syms x
f=@(x) x+(x.^2-x).* (x>3), g=@(x) 25+sin(4*x)
figure, fplot({f,g}, [-2, 5]), grid
```

La única diferencia con la gráfica anterior es que ahora el escalón entre las dos partes de f están unidas por una línea prácticamente vertical como se observa en la figura anterior derecha.

1.5.5. Circunferencias y elipses

Se entiende como **circunferencia unidad** a la circunferencia de centro el origen $(0, 0)$ y radio 1. Existen las siguientes formas de determinar una curva en el plano real. A modo de ejemplo se aplican a la circunferencia unidad aunque es fácil extenderlo a cualquier otra circunferencia.

- (i) En forma **implícita**: se da una ecuación $F(x, y) = 0$ que interrelaciona las variables. Ejemplo: $x^2 + y^2 = 1$. Se puede utilizar el comando `fimplicit` para representar gráficamente estas curvas.
- (ii) En forma **explícita**: se da la dependencia de una variable en función de la otra. Ejemplo: $y = +\sqrt{1-x^2}$, o bien, $y = -\sqrt{1-x^2}$. Se puede utilizar el comando `fplot` para representar gráficamente estas curvas.
- (iii) En forma **paramétrica**: se da la dependencia de las dos variables (x, y) en función de otra tercera llamada **parámetro** que se hace variar dentro de un cierto intervalo o dominio. Ejemplo: $x = 1 \cdot \cos t$, $y = 1 \cdot \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$. Para representar estas curvas primero se debe calcular una discretización de puntos de la curva en los vectores x e y en función de una discretización del parámetro t y, a continuación, utilizar el comando `plot`.

Obsérvese que, en el ejemplo considerado, en la forma explícita sólo se puede obtener una semicircunferencia, la superior (con la raíz positiva) o la inferior (con la raíz negativa), hay que dibujar dos funciones para obtener toda la circunferencia. Ello se debe a que en una función $y = f(x)$ sólo se puede obtener un único valor de y para una x dada. Por otro lado, el parámetro t utilizado en la forma (iii) se corresponde al ángulo respecto el semieje OX positivo en sentido antihorario. Es obvio que si se sustituyen las expresiones de x e y de (iii) en (i) se verifica la ecuación puesto que $\cos^2 t + \sin^2 t = 1$ para todo t real.

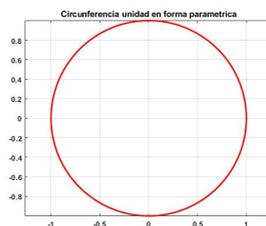
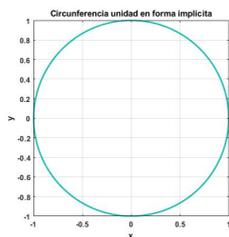
Seguidamente se presentan los comandos requeridos para representar la circunferencia unidad de las tres formas anteriores obteniendo las figuras inferiores. Obsérvese que es imprescindible utilizar el comando `axis equal` puesto que, por defecto, cada eje tiene una escala diferente adaptándose al tamaño de la ventana gráfica y, en consecuencia, la circunferencia parece una elipse.

```
% Opción (i): Forma implícita .....
syms x y
figure, fimplicit(x^2+y^2==1, [-1 1]), axis('equal'), grid on
title('Circunferencia unidad en forma implícita')
%
```

```

% Opción (ii): Forma explícita .....
syms x
figure, fplot({sqrt(1-x^2), -sqrt(1-x^2)}, [-1 1])
axis('equal'), grid on
title('Circunferencia unidad en forma explícita')
%
% Opción (iii): Forma paramétrica .....
t=linspace(0, 2*pi, 200); % discretización del parámetro
x=cos(t); y=sin(t); % puntos de la curva discretizados
figure, plot(x,y, 'r'), axis('equal'), grid on
title('Circunferencia unidad en forma paramétrica')

```



Se puede entender una **elipse** como una *circunferencia deformada* en la dirección de dos rectas perpendiculares que pasan por su centro que se llaman **ejes de la elipse**. Su ecuación (cuando sus ejes son paralelos a los cartesianos y centrada al origen) viene descrita como sigue de forma muy similar a la sección anterior.

- (i) En forma implícita: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.
- (ii) En forma explícita: $y = +b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$, o bien, $y = -b\sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}}$.
- (iii) En forma paramétrica: $x = a \cdot \cos t$, $y = b \cdot \sin t$, $0 \leq t < 2\pi$.

Se deja al lector modificar los comandos de la sección anterior para obtener su representación gráfica. Si se quiere centrar en otro punto (x_0, y_0) simplemente hay que sustituir (literalmente) x por $(x - x_0)$ e y por $(y - y_0)$.

1.6. GRÁFICOS TRIDIMENSIONALES

Más adelante, en el capítulo 5, se verá con más detalle como proceder para una representación genérica de curvas y superficies en \mathbb{R}^3 . A continuación se presentará cómo realizarlo de forma más simplificada en algunos casos.

1.6.1. Dibujo de puntos y curvas con plot3 y fplot3

Para dibujar puntos o curvas unidas por segmentos entre puntos se utiliza el comando

```
plot3(X,Y,Z,s)
```

que tiene la misma estructura que el comando `plot` y `s` es una cadena con las mismas opciones (ver sec. 1.5.1). La única diferencia es que ahora se tienen tres coordenadas para cada punto (x, y, z) . Todas las coordenadas x de los puntos a representar gráficamente se sitúan en el vector `X` por orden. Igualmente ocurre con las coordenadas y en `Y` y las coordenadas z en `Z`.

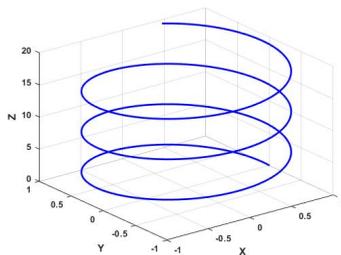
Si se tiene una curva que depende de un parámetro t , $(x(t), y(t), z(t))$ se puede representar con el comando

```
fplot3(funX,funY,funZ,[tmin,tmax],'s')
```

donde `funX`, `funY` y `funZ` son las funciones $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, respectivamente, en simbólico o con identificador de función (ver sec. 1.3.2). El intervalo `[tmin, tmax]` indica el rango donde toma valores el parámetro t , y `s` es una cadena con las mismas opciones que en `plot` (ver sec. 1.5.1).

Como ejemplo se representa un trozo de muelle dado por $(\cos t, \sin t, t)$, $t \in [0, 20]$ primero con `plot3`, luego con `fplot3` definiendo la función en simbólico y, finalmente, con `fplot3` con identificador de función. En este último caso se ha optado por definir las funciones in situ dentro del mismo comando, pero se puede hacer previamente. Todas las opciones consideradas generan la imagen siguiente.

```
% Opción 1: con plot3(X,Y,Z)
t=linspace(0,20,555); % Discretización en t
X=cos(t); % Vector de valores x
Y=sin(t); % Vector de valores y
Z=t; % Vector de valores de t
plot3(X,Y,Z,'b'),grid,xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
%
% Opción 2: con fplot3 en simbólico
syms t , fplot3(cos(t),sin(t),t,[0,20],'b')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
%
% Opción 3: con fplot3 con identificador de función
fplot3(@(t)cos(t),@(t)sin(t),@(t)t,[0,20],'b')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
```



1.6.2. Dibujo de funciones y superficies con `fsurf`

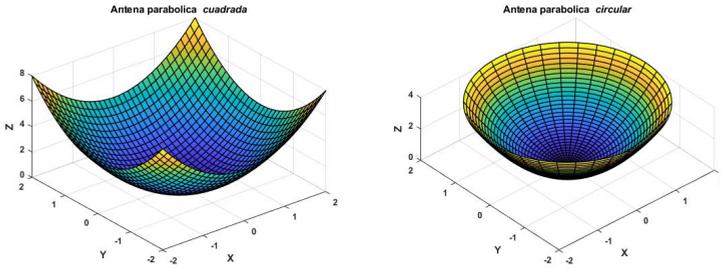
En el capítulo 5 se estudiará con detalle la representación de superficies al espacio real. Ahora se verá el comando `fsurf` que facilita la representación gráfica de **superficies** dadas en *forma explícita* por funciones escalares de dos variables, $z = f(x, y)$, en \mathbb{R}^3 . Su sintaxis es

```
fsurf(fun, [xmin, xmax, ymin, ymax], 's')
```

donde, al igual que en la sección anterior, `fun` es la función a representar gráficamente que puede estar definida de forma simbólica o con identificador de función (ver sec. 1.3.2), `[xmin, xmax]` es el rango de recorrido de la variable x , `[ymin, ymax]` el de y , y `s` es una cadena con las mismas opciones que `plot` (ver sec. 1.5.1).

A modo de ejemplo se muestra la representación gráfica de un trozo de la antena parabólica determinada por $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. Como se elige un trozo cuadrado a representar, $(x, y) \in [-2, 2] \times [-2, 2]$, van a aparecer cuatro picos correspondientes a las esquinas del mismo como se observa en la imagen inferior izquierda. En los títulos se pueden poner comandos de $\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ o $\text{L}_{\text{A}}\text{T}_{\text{E}}\text{X}$ para que los interprete (`\it` significa utilizar itálica o cursiva). Obsérvese que se han utilizado operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5) para poder evaluar la función sobre vectores o matrices.

```
fsurf(@(x,y)x.^2+y.^2, [-2,2,-2,2])
xlabel('X'), ylabel('Y'), zlabel('Z')
title('Antena parabólica\it cuadrada')
```



Como se verá más adelante, la antena parabólica anterior se puede escribir utilizando una representación en *polares* en el plano XY como $x = r \cos t$, $y = r \sin t$, $z = x^2 + y^2 = r^2$ con $r \in [0, 2]$, $t \in [0, 2\pi[$ (ver sec. 5.3.4). En este caso se dice que la **superficie** de la antena parabólica está *parametrizada* en función de r y t puesto que $x = x(r, t)$, $y = y(r, t)$, $z = z(r, t)$. Esta superficie se puede representar fácilmente con el comando `fsurf` de forma similar a `fplot3` de la sección anterior. Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la imagen superior derecha. Como en este caso se ha considerado un círculo en la base no aparece ningún pico en la antena. Obsérvese que aquí también se han utilizado operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5) para poder evaluar la función sobre vectores o matrices. Los tres puntos al final permiten subdividir un comando en distintas líneas.

```
fsurf(@(r,t)r.*cos(t),@(r,t)r.*sin(t),@(r,t)r.^2,...
      [0,2,0,2*pi])
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')
title('Antena parabolica\it circular')
```

1.7. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección A.1.

1.7.1. Ejercicios propuestos

P1.1 Se sabe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ es convergente y vale $\frac{\pi^2}{6}$. Realiza la suma de sus primeros N términos y observa que al aumentar N su valor se acerca a $\frac{\pi^2}{6}$. Utiliza los valores $N = 99$, $N = 999$ y $N = 9999$ e intenta realizar una única ejecución de varios comandos combinados con vectores para su cálculo a cada valor de N . Verifica que para el último valor de N ya se tienen 3 decimales exactos.

P1.2 Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ y $\vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. Estudia si los sistemas $A\vec{x} = \vec{b}$, y

$A^t A\vec{x} = A^t \vec{b}$ tienen solución. Encuéntrala en caso afirmativo.

P1.3 Define la función $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{si } x < 2 \\ 7 - x, & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ utilizando la función escalón unidad y calcula el área (con signo) bajo la curva en el intervalo $[-2, 5]$, i.e., $\int_{-2}^5 f(x) dx$.

P1.4 Representa gráficamente una función $f(x)$ y su derivada $f'(x)$ de forma conjunta sobre un cierto intervalo $[a, b]$ y observa que cuando $f'(x) > 0$, f crece y cuando $f'(x) < 0$, f decrece (para $x \in]a, b[$). Por ejemplo, toma $f(x) = \frac{cx^2+1}{e^{x^2}/c}$ sobre $[-10, 10]$ donde c es el promedio de los dos últimos dígitos no nulos de vuestro DNI o pasaporte.¹

P1.5 Dibuja en \mathbb{R}^3 la parametrización $\vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ con

$$\begin{cases} x(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \cos u \\ y(u, v) = \left(1 + \frac{v}{2} \cos \frac{u}{2}\right) \sin u, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1]. \\ z(u, v) = \frac{v}{2} \sin \frac{u}{2} \end{cases}$$

Busca información sobre esta superficie peculiar llamada banda de Möbius.

1.7.2. Ejercicios de autoevaluación

T1.1 El resultado de calcular $\frac{1+2(x+1)^2}{e^2+3x^2}$ cuando $x = 2$ es:

- (a) 15.4360
- (b) 14.5714
- (c) 0.9799
- (d) Ninguna de las otras.²

T1.2 Indica cuál de los siguientes comandos realiza una discretización en $[0, 10\pi]$ con 10 intervalos equiespaciados empezando en 0 y terminando en 10π .

- (a) `linspace(0, 10*pi, 11)`
- (b) `0:3:10*pi`
- (c) `linspace(0, 10*pi, 10)`
- (d) Ninguna de las otras.

T1.3 Indica qué realiza el comando `sum((9*rand(20, 1)+1)<5)`

- (a) Ninguna de las otras.
- (b) Crea un vector con 20 números aleatorios entre 0 y 10 y seguidamente cuenta cuántos de ellos son inferiores a 5.
- (c) Crea un vector con 20 números aleatorios entre 0 y 10 y suma los que son inferiores a 5.

¹El uso de este valor permite obtener ejercicios con resultados distintos a partir de un mismo enunciado.

²No se utiliza la expresión “Ninguna de las anteriores” porque en una prueba test se pueden permutar las respuestas.

- (d) Cuenta cuántos de los 20 números aleatorios entre 1 y 10 se han obtenido inferiores a 5.

T1.4 La media aritmética o promedio de n valores viene dado por la suma de todos ellos dividida por n . La media geométrica de n valores (no nulos) viene dada por la raíz n -ésima del producto de todos ellos. Se tiene una matriz A de calificaciones de una asignatura con 4 filas con las notas de las 4 pruebas que tiene la asignatura (la fila 1 tiene las notas de la prueba 1 y así sucesivamente) y con 10 columnas, una por cada alumno (la columna 1 tiene las notas del alumno 1 y así sucesivamente). Indica qué opción de las siguientes calcula el promedio de las notas finales de la asignatura de cada alumno cuando ésta viene dada por el promedio geométrico de las 4 pruebas.

- (a) $\text{sum}(\text{prod}(A)) \wedge .25 / 10$
 (b) Ninguna de las otras.
 (c) $(\text{prod}(\text{sum}(A) / 10)) \wedge (1/4)$
 (d) $\text{sum}(\text{prod}(A)) \wedge 1/4) ./ 10$

T1.5 La suma de los cosenos al cuadrado de los ángulos $0^\circ, 5^\circ, 10^\circ, 15^\circ, 20^\circ, \dots, 120^\circ$ vale:

- (a) Ninguna de las otras.
 (b) 10.1676
 (c) 12.7615
 (d) 10.1503

T1.6 La segunda derivada de la función $f(x) = \frac{\ln(x^2+1)+2}{\sqrt{x+1}+3}$ evaluada en $x = 2$ vale:

- (a) 0.1225
 (b) -0.0579
 (c) Ninguna de las otras.
 (d) 0.7628

T1.7 Dado el sistema lineal $\begin{cases} x - 3y = 1 \\ 2x + y = 0 \end{cases}$. Indica cuál de las siguientes es **FALSA**:³

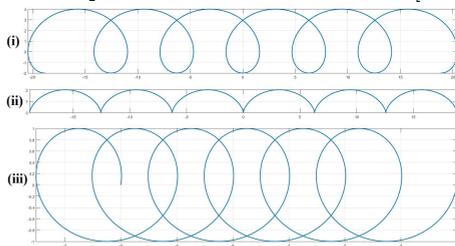
- (a) Se resuelve con $\text{inv}([1, -3; 2, 1]) * [1; 0]$
 (b) Se resuelve con $\text{fsolve}(@ (x) [x(1) - 3*x(2) - 1; 2*x(1) + x(2)], [0; 0])$
 (c) Se resuelve con $\text{syms } x \ y, [x, y] = \text{solve}([x - 3*y; 2*x + y] == [1; 0], x, y)$
 (d) Ninguna de las otras.

T1.8 Una solución del sistema no lineal $\begin{cases} 2y - xy = 1 \\ y - y/x = 2 \end{cases}$ es:

- (a) $x = 1.7808, y = 0.4384$.
 (b) Ninguna de las otras.
 (c) $x = -0.2808, y = 4.5616$.
 (d) $x = 1.7808, y = 4.5616$.

³Se utiliza letra mayúscula en negrita para que el lector no se equivoque y conteste la primera opción cierta por inercia.

T1.9 Siguiendo la trayectoria de un punto fijado en referencia a una circunferencia y haciendo rodar esta última se obtienen curiosas curvas como, por ejemplo, las cicloides. Indica cuál de las siguientes respuestas relaciona correctamente las curvas siguientes con las parametrizaciones cuando $t \in [-6\pi, 6\pi]$.



$$\vec{f}(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix}, \begin{cases} f_1(t) = t - \operatorname{sen} t \\ f_2(t) = 1 - \operatorname{cos} t \end{cases}$$

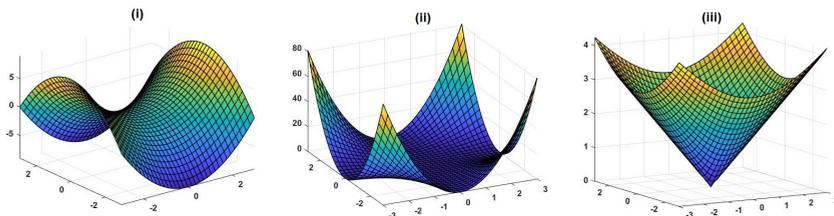
$$\vec{g}(t) = \begin{pmatrix} g_1(t) \\ g_2(t) \end{pmatrix}, \begin{cases} g_1(t) = t - 3 \operatorname{sen} t \\ g_2(t) = 1 - 3 \operatorname{cos} t \end{cases}$$

$$\vec{h}(t) = \begin{pmatrix} h_1(t) \\ h_2(t) \end{pmatrix}, \begin{cases} h_1(t) = \operatorname{cos} t + \frac{t}{2\pi} \\ h_2(t) = \operatorname{sen} t \end{cases}$$

- (a) \vec{f} :(ii), \vec{g} :(iii), \vec{h} :(i).
 (b) \vec{f} :(i), \vec{g} :(iii), \vec{h} :(ii).
 (c) \vec{f} :(ii), \vec{g} :(i), \vec{h} :(iii).
 (d) Ninguno de los otros.

T1.10 Indica cuál de las siguientes respuestas relaciona correctamente las funciones $f(x, y) = x^2y^2$, $g(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $h(x, y) = x^2 - y^2$ con las gráficas siguientes.

Observaciones: Se dice que la figura (i) tiene forma de una **silla de montar** (a caballo), que la figura (ii) tiene 4 **picos** y que la figura (iii) es un **cono circular** (del que se ha dibujado un trozo cuadrado).



- (a) f :(i), g :(iii), h :(ii).
 (b) Ninguna de las otras.
 (c) f :(ii), g :(i), h :(iii).
 (d) f :(ii), g :(iii), h :(i).

Capítulo 2

Matrices y ecuaciones

El uso de matrices siempre ha sido de interés en el cálculo vectorial, numérico y en el tratamiento de datos. En la actual era digital su uso se ha incrementado notablemente dado que cualquier fotografía o imagen de diagnóstico médico se puede representar con matrices de intensidades de luz.

En primer lugar se muestra la operatividad en matrices, luego la resolución de sistemas lineales y, seguidamente, algunas aplicaciones a las imágenes digitales. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección [A.2](#) se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

2.1. MATRICES

2.1.1. Definiciones

De manera informal las **matrices** son *cajas rectangulares* que incluyen una tabla de números con **filas** (líneas horizontales) y **columnas** (líneas verticales) con todas sus posiciones llenas y que se escriben con unos paréntesis externos a su izquierda y a su derecha. Así, por ejemplo,

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

es una matriz de números reales con 2 filas y 3 columnas. Las filas se ordenan de arriba abajo y las columnas de izquierda a derecha nombrando primero las filas y seguidamente las columnas. Así pues, en la matriz A anterior de números reales se verifica que:

- Todas las posiciones tienen un número real, por lo que se dice que A es una **matriz real**.
- En la posición $(1, 3)$ (fila 1, columna 3) se tiene el valor 3.
- En la posición $(2, 1)$ (fila 2, columna 1) se tiene el valor 0.
- La posición $(3, 1)$ no existe dado que no tiene una tercera fila.
- Los elementos de la matriz A se suelen denotar como a_{ij} (o a_{ij} si no hay posibilidad de confusión) donde i indica la fila y j la columna. Por ejemplo las tres afirmaciones anteriores indican que $a_{1,3} = 3$, $a_{2,1} = 0$, y que no existe el valor $a_{3,1}$.

En consecuencia, la matriz A se puede escribir como

$$A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \end{pmatrix} = (a_{ij}) \begin{matrix} i = 1, 2. \\ j = 1, 2, 3. \end{matrix}$$

con $a_{1,1} = 1$, $a_{1,2} = -1$, $a_{1,3} = 3$, $a_{2,1} = 0$, $a_{2,2} = 2$, $a_{2,3} = 8$.

Si la matriz sólo tiene una columna se le llama **vector columna**. Si la matriz sólo tiene una fila se le llama **vector fila**. Por defecto asumimos que un vector cualquiera es un vector columna, aunque a veces, por comodidad, se escriba como si fuese un vector fila (ver sec. 1.2.1). Los vectores se denotarán con una flecha encima en el texto pero no en los comandos.

En la sección 1.2 se ha visto que para definir una matriz se utilizan corchetes (paréntesis cuadrados), que para separar los elementos de una fila se utilizan comas o espacios en blanco y que para separar las columnas se utilizan puntos y coma. Así pues, la matriz real A anterior se introduce como sigue:

$A = [1 \ -1 \ 3; \ 0 \ 2 \ 8]$

El entorno de cálculo permite generalizar algunos conceptos algebraicos. Así, los elementos con el mismo número de fila que de columna forman los elementos de la **diagonal** de A . En el ejemplo anterior la forman los elementos $a_{11} = 1$ y $a_{22} = 2$ que se pueden obtener con el comando `diag(A)` en formato vector.

Los elementos que hay por encima de la diagonal forman la parte **triangular superior** de la matriz A (tienen el número de columna mayor que el número de fila), y los elementos que hay por debajo forman la parte **triangular inferior** (tienen el número de fila superior al de columna). La parte triangular superior (*Upper*) y triangular inferior (*Lower*) se pueden obtener, respectivamente, con los comandos siguientes.

`triu(A)`, `tril(A)`

En la figura inferior se han marcado en rojo los elementos de la diagonal, en azul la parte triangular inferior, y en naranja la parte triangular superior. Una matriz se llama **triangular superior** (**triangular inferior** respectivamente) si la parte triangular inferior (superior respectivamente) es nula (i.e., todos sus coeficientes son 0). Una matriz es **diagonal** cuando es triangular superior e inferior a la vez.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}$$

2.1.2. Operaciones con matrices

Sean $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$, y $C = (c_{ij})$ matrices del mismo tamaño $m \times n$ (m filas y n columnas). En las matrices se define la **operación suma** $+$ como sigue:

$$C = A + B \quad \text{con } c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

Los coeficientes se suman componente a componente, así, por ejemplo

$$A + A = \begin{pmatrix} 1+1 & (-1)+(-1) & 3+3 \\ 0+0 & 2+2 & 8+8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

que se puede obtener con `A+A` (ver sec. 1.2.3).

La suma tiene propiedades similares a la suma de números reales y en este caso el elemento neutro de la suma es la **matriz nula**, es decir, una matriz con ceros en todos sus coeficientes que se obtiene con el comando `zeros(m, n)` (ver sec. 1.2.1).

Sean $A = (a_{ij})$, $C = (c_{ij})$ matrices del mismo tamaño $m \times n$, y sea b un número real o escalar. Se define la operación **producto por un escalar** \cdot como sigue:

$$C = b \cdot A \quad \text{con } c_{ij} = b \cdot a_{ij}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, n.$$

El número o escalar b multiplica a todas las componentes de la matriz A como se observa en el siguiente ejemplo.

$$2 \cdot A = 2 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 & 2 \cdot (-1) & 2 \cdot 3 \\ 2 \cdot 0 & 2 \cdot 2 & 2 \cdot 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 6 \\ 0 & 4 & 16 \end{pmatrix}$$

que, obviamente coincide con el valor anterior dado por $A+A$, es decir, $A+A = 2 \cdot A$. Se obtiene con $2 * A$ (ver sec. 1.2.3).

Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times n$. Se define la **traspuesta** A^T (o bien A^t) como la matriz de dimensiones $n \times m$ siguiente:

$$C = A^T \quad \text{con } c_{ij} = a_{ji}, \quad i = 1, \dots, n, \quad j = 1, \dots, m.$$

Trasponer una matriz se corresponde con hacer una simetría respecto la diagonal de la matriz, es decir, los elementos de encima de la diagonal se intercambian por los que hay debajo en posición simétrica. En el ejemplo anterior se tiene que

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix}, \quad A^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}.$$

La traspuesta se consigue con el apóstrofe ' que hay en la tecla ? situada al lado del número 0, más concretamente, con el comando A' (ver sec. 1.2.3). Se debe tener cuidado si se copian y pegan comandos desde algunos procesadores de textos puesto que cambian automáticamente el apóstrofe por comillas tipográficas que no sirven para el cálculo; este cambio se suele deshacer con *CTRL-z* o *CMD-z*.

Sea $A = (a_{ij})$, una matriz $m \times n$ y sea $B = (b_{ij})$ una matriz $n \times k$ (el número de columnas en A debe coincidir con el número de filas en B). Se define la operación **producto matricial** * como la matriz de dimensión $m \times k$ siguiente

$$C = A * B \quad \text{con } c_{ij} = \sum_{r=1}^n a_{ir} \cdot b_{rj}, \quad i = 1, \dots, m, \quad j = 1, \dots, k,$$

es decir, $c_{ij} = a_{i1} \cdot b_{1j} + a_{i2} \cdot b_{2j} + \dots + a_{in} \cdot b_{nj}$ que se puede interpretar como los elementos de la fila i de A por los de la columna j de B , sumados término a término. En matrices cuadradas se utiliza la notación de **potencias** estándar para el producto matricial. Por coherencia se define $A^0 = I$ matriz identidad que es el elemento neutro del producto de matrices. Dado que el orden no importa en un producto del tipo $A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ y el producto es asociativo, una matriz conmuta con cualquier potencia suya. A modo de ejemplo a continuación se calcula el cubo de la matriz A que se puede obtener con una de las siguientes formas.

$$A^3, \quad A * A * A, \quad (A * A) * A, \quad A^2 * A, \quad A * (A * A), \quad A * A^2$$

Sea, por ejemplo, $B = A^T$, se tiene que

$$C = A * B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 0 & 2 & 8 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + (-1) \cdot (-1) + 3 \cdot 3 & 1 \cdot 0 + (-1) \cdot 2 + 3 \cdot 8 \\ 0 \cdot 1 + 2 \cdot (-1) + 8 \cdot 3 & 0 \cdot 0 + 2 \cdot 2 + 8 \cdot 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & 22 \\ 22 & 68 \end{bmatrix}$$

que se puede obtener con el comando $C=A*A'$ (ver sec. 1.2.3). Obsérvese que es imposible realizar el producto $B*A$ puesto que no coinciden las *dimensiones internas* en el producto de matrices, es decir, el número de columnas del factor de la izquierda es distinto del número de filas del factor de la derecha.

En la escritura se suele hacer un abuso de la notación e incluso una elipsis de ésta así, por ejemplo, se tiene que $2 \cdot A = 2A$, $A * B = A \cdot B = AB$, $2AB = 2 \cdot AB = 2 * A * B$.

El elemento neutro del producto no es una matriz toda llena de unos, sino la **matriz identidad** con unos en la diagonal y ceros fuera de ella que se denota como I ó Id . Es una matriz cuadrada del tamaño que se requiera en cada caso.

El **determinante** de una matriz cuadrada A , $\det(A)$, se define usando permutaciones (véase el libro de Álgebra Matricial de la bibliografía) y vale distinto de cero si la matriz tiene **rango máximo**, es decir, si todas las filas o todas las columnas son linealmente independientes entre sí (ver sec. 1.2.3). Si A es una matriz rectangular $m \times n$, entonces se dice que A tiene rango máximo si y sólo si $\text{rang } A = \text{m} \wedge \text{n}(m, n)$.

La **inversa** B de una matriz A cuadrada es aquella tal que al multiplicar ambas da la identidad (el elemento neutro del producto), es decir, $B \cdot A = A \cdot B = I$, y se denota $B = A^{-1}$. Para que exista A^{-1} hace falta que el rango de A sea máximo o, de modo equivalente, que $\det(A) \neq 0$. Dado un número natural n , se denota A^n el producto de n veces la matriz A , y A^{-n} el producto de n veces la matriz A^{-1} cuando ésta existe. Vamos a calcular estos valores sobre la matriz C anterior.

```
det(C) % ¿distinto de cero? ¿tiene inversa?
rank(C) % ¿rango máximo?
B=inv(C), B=C^(-1) % matriz inversa
E=B*C % comprobación de que B=A^(-1) puesto que E=Id
```

Obsérvese que en la posición $E(2, 1)$ da -0.0000 . Ello es debido a que por defecto se trabaja en doble precisión lo cual implica operar con 15 cifras decimales exactas (ver sec. 1.1.4). En este caso se tiene que $E(2, 1) = -2.2204 \text{e-}16$ por lo que $E(2, 1) \equiv 0$ (ver sec. 1.1.4) y, por tanto, se puede afirmar que E es la matriz identidad.

El producto tiene algunas propiedades similares al producto de números reales (asociativa, distributiva), pero tiene otras distintas como, por ejemplo, las siguientes.

- El producto de matrices **no** es conmutativo, es decir, $A \cdot B \neq B \cdot A$ siendo A y B matrices cuadradas del mismo tamaño. Ahora bien, hay algunos casos que sí conmutan como, por ejemplo, una matriz y sus potencias.
- Hay matrices cuadradas no nulas que no tienen inversa dado que no tienen rango máximo.
- No existe la división matricial, sino que se multiplica por la matriz inversa por el lado que corresponda (si existe).

2.1.3. Ejemplos de operaciones matriciales

Se definen las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ y se calcula $C = 2B - A^t$, $D = (I + B)^3$, $\det(A \cdot B)$, $\det(A) \cdot \det(B)$. Para obtener los resultados basta con ejecutar los comandos siguientes.

```
A=[1 2; -1 3], B=[0 1; -1 -1], I=[1 0; 0 1]
C=2*B-A'
D=(I+B)^3
det(A*B), det(A)*det(B)
```

Recuérdese que hay una propiedad del determinante que indica que siempre que las matrices A y B sean cuadradas del mismo tamaño se verifica que $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$ como se aprecia al ejecutar los comandos anteriores.

2.1.4. Ejemplo de ecuación matricial

En este segundo ejemplo se resuelve una **ecuación matricial** que es una ecuación en donde aparecen matrices de dimensiones adecuadas para que se puedan realizar las operaciones indicadas, y donde la incógnita a obtener también es otra matriz. En este caso se considera

$$X + AX = B$$

donde A y B son las matrices del ejemplo anterior y se quiere calcular X .

Vamos a realizar un estudio de las dimensiones matriciales aunque en este caso no se necesita. Sea B una matriz $m \times n$. Para que las matrices X y AX se puedan sumar y sean igual a B se requiere que tanto X como AX tengan las mismas dimensiones que B . Como

AX y X tienen las mismas dimensiones que B hace falta que A sea una matriz cuadrada con el mismo número de filas que X , es decir, A es $m \times m$. En consecuencia, en $X + AX = B$ se tiene la siguiente relación de dimensiones matriciales: $(m \times n) + (m \times m) * (m \times n) = (m \times n)$.

La ecuación matricial se trata como si fuese una ecuación de números reales, pero teniendo presente las propiedades que varían en el producto matricial (ver sec. 2.1.2). Procedemos con los siguientes pasos:

1. Hay que sacar factor común la matriz X de forma adecuada. Se debe proceder del siguiente modo:

$$X + AX = (I + A)X \text{ donde } I \text{ es la matriz identidad.}$$

Los siguientes modos de proceder son incorrectos:

- a) $X + AX \neq X(1 + A)$ puesto que 1 no es matriz elemento neutro del producto matricial.
 - b) $X + AX \neq X(I + A)$ donde I es la matriz identidad, puesto que el producto matricial no es conmutativo y, a priori, $AX \neq XA$.
 - c) $X + AX \neq (1 + A)X$ puesto que 1 no es matriz elemento neutro del producto matricial.
2. Del punto anterior se tiene que $(I + A)X = B$. Ahora se quiere eliminar $(I + A)$ del miembro izquierdo de la igualdad para despejar la X y asumimos que $\det(I + A) \neq 0$ para que $(I + A)$ tenga inversa como es el caso en las matrices del ejemplo anterior. La única opción posible es multiplicar por la izquierda ambos miembros de la igualdad. En este caso se tiene que

$$(I + A)^{-1}(I + A)X = (I + A)^{-1}B \text{ que es equivalente a } X = (I + A)^{-1}B.$$

Las siguientes formas de proceder son incorrectas:

- a) Dividiendo: $X = \frac{B}{(I+A)}$ lo cual es ¡absurdo!, ¡falso! No existe la división matricial, hay que multiplicar por la inversa.
- b) Multiplicando por la inversa de $(I + A)$ por la derecha a ambos miembros de la igualdad se llega a que $(I + A)X(I + A)^{-1} = B(I + A)^{-1}$ que no sirve para nada puesto que, como el producto no es conmutativo, no se puede simplificar la matriz $(I + A)$ con su inversa $(I + A)^{-1}$.
- c) Multiplicando por la inversa de $(I + A)$ por la izquierda a la izquierda de la igualdad y por la derecha a la derecha de la igualdad se tiene $(I + A)^{-1}(I + A)X \neq B(I + A)^{-1}$ que simplificando es equivalente a $X \neq B(I + A)^{-1}$. No se verifica la igualdad porque el producto matricial no es conmutativo, siempre hay que multiplicar por el mismo lado a ambos miembros de la igualdad.

En resumen,

$$X + AX = B \Rightarrow (I + A)^{-1}(I + A)X = (I + A)^{-1}B \Rightarrow X = (I + A)^{-1}B,$$

cuyo valor se calcula con los siguientes comandos (ver sec. 1.2).

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}, \quad I = \text{eye}(2) \\ X = (I + A)^{-1} * B$$

2.2. RESOLUCIÓN DE SISTEMAS LINEALES

2.2.1. Definiciones y teorema de Rouché-Fröbenius

Como ya se ha visto en la sección 1.4.1, un **sistema lineal** de m ecuaciones y n incógnitas x_1, \dots, x_n se escribe como

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

y matricialmente como

$$A\vec{x} = \vec{b} \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad \vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad \text{y } \vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$$

siendo A la **matriz del sistema**, \vec{x} el **vector de incógnitas** y \vec{b} el **término independiente**. A la matriz $A_a = [A, \vec{b}]$ se le llama **matriz ampliada** y n es el **número de incógnitas** (número de componentes del vector de incógnitas \vec{x} que coincide con el número de columnas de A).

El **teorema de Rouché-Fröbenius** indica cuándo existe solución y cuándo es única. En particular, se dice que el sistema lineal es

- **Incompatible** si no tiene solución. Esto sucede si $\text{rang } A < \text{rang } A_a$.
- **Compatible** si tiene solución. Esto ocurre cuando $\text{rang } A = \text{rang } A_a$.
- **Compatible determinado** si hay solución y es única. Esto sucede si $\text{rang } A = \text{rang } A_a = n$.
- **Compatible indeterminado** si hay más de una solución. Ocurre cuando $\text{rang } A = \text{rang } A_a < n$.

2.2.2. Resolución de un sistema compatible determinado

En un sistema compatible y determinado $A\vec{x} = \vec{b}$, el determinante de la matriz A es no nulo (se asume que se han eliminado ecuaciones redundantes

o linealmente dependientes) y, por tanto, se puede invertir obteniendo como solución

$$\vec{x} = A^{-1}\vec{b}.$$

Aunque la expresión anterior es teóricamente exacta, es ineficiente computacionalmente (calcular la inversa de una matriz equivale a resolver n sistemas lineales cuando, en realidad, sólo se quiere resolver un sistema). Es por ello que se han desarrollado métodos más eficientes como, por ejemplo, el método de Gauss que se puede aplicar con el comando `linsolve`. La antebarra `\` también permite resolver sistemas compatibles determinados pero hay que ir con cuidado puesto que siempre da una solución aunque no la haya o aunque haya infinitas.

Se considera, como ejemplo, el sistema lineal dado por

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 3x - z = 3 \end{cases}, \text{ o bien, por } A\vec{x} = \vec{b} \text{ con}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Este sistema se puede resolver con los comandos siguientes en donde primero se calculan los rangos para verificar que $\text{rang } A = \text{rang } A_a = n$ (que sea compatible y determinado),

```
A=[2,-1,1; 1,2,3; 3,0,-1], b=[8; 9; 3]
rank(A), rank([A,b]), size(A,2) % ¿iguales?
x=A^(-1)*b % utilizando la matriz inversa
x=linsolve(A,b) % por Gauss
x=A\b % con la antebarra si existe A^(-1)
```

obteniendo

```
x =
    2.0000
   -1.0000
    3.0000
```

por lo que $x = 2$, $y = -1$, $z = 3$.

2.2.3. Resolución de un sistema compatible indeterminado

En este caso se tiene que $\text{rang } A = \text{rang } A_a = r < n$ y se sabe que se pueden poner r incógnitas en función de las otras $n - r$ que quedan como

parámetros libres. Los comandos de la sección anterior sólo pueden dar, a lo sumo, una solución de las infinitas que existen. Si se quieren obtener todas las soluciones se debe trabajar con variables simbólicas utilizando los comandos `syms` y `solve` escribiendo las ecuaciones con doble igualdad.

A modo de ejemplo se toma el sistema dado por las dos primeras ecuaciones del sistema anterior,

$$\begin{cases} 2x - y + z = 8 \\ x + 2y + 3z = 9 \end{cases}, \text{ o bien, por } A\vec{x} = \vec{b} \text{ con}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}, \vec{x} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ y } \vec{b} = \begin{pmatrix} 8 \\ 9 \end{pmatrix}.$$

Como se tiene que $r = \text{rang } A = \text{rang } A_a = 2 < n = 3$ se tiene que 2 incógnitas se pueden poner en función de las $n - r = 1$ restantes, es decir, se tiene una variable que actúa como parámetro libre que no se conoce a priori cuál es. Se sabe que al menos existe una, pero puede ser que todas puedan utilizarse como parámetro libre. Se elige, por ejemplo, a z como parámetro libre (si no se obtiene solución se debe cambiar de parámetro) y se llega a la solución con los siguientes comandos en donde z no se incluye en las variables a resolver a la derecha de las igualdades ni en las variables a asignar la solución a la izquierda. Recordad siempre escribir `*` para indicar el producto, no se debe omitir nunca.

```
syms x y z % variables separadas por espacios
[x,y]=solve(2*x-y+z==8, x+2*y+3*z==9, x,y) % z no incluida
```

obteniendo que (es importante que el **orden de las variables** a la izquierda de la igualdad sea el mismo que al final del comando `solve`):

$$\begin{aligned} x &= 5 - z \\ y &= 2 - z \end{aligned}$$

Ello indica que la solución es

$$\begin{cases} x = 5 - z \\ y = 2 - z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}.$$

Dando a z un valor real cualquiera se obtiene una terna solución (x, y, z) . Por ejemplo, si tomamos $z = -1$ se obtiene la solución $x = 6, y = 3, z = -1$, o bien, si se elige $z = 3$ se obtiene la solución $x = 2, y = -1, z = 3$ (la solución del ejemplo anterior). Alternativamente se hubiera podido obtener la solución utilizando el formato de salida por defecto de `solve` como:

```

syms x y z % variables separadas por espacios
solucion=solve(2*x-y+z==8, x+2*y+3*z==9, x, y) % z no incluida
solucion.x % variable x de la estructura 'solucion'
solucion.y % variable y de la estructura 'solucion'

```

Probemos a obtener la solución eligiendo ahora a x (en vez de z) como parámetro libre con los siguientes comandos.

```

syms x y z
[y, z]=solve(2*x-y+z==8, x+2*y+3*z==9, y, z) % x no incluida

```

Ahora procedemos igual que antes eligiendo ahora a y (en vez de z) como parámetro. A continuación se incluyen los resultados obtenidos.

```

syms x y z
[x, z]=solve(2*x-y+z==8, x+2*y+3*z==9, x, z) % y no incluida

```

$$\begin{cases} y = x - 3 \\ z = 5 - x \end{cases}, x \in \mathbb{R}, \quad \begin{cases} x = y + 3 \\ z = 2 - y \end{cases}, y \in \mathbb{R}.$$

Estas últimas soluciones coinciden con la primera pero están expresadas de distinta forma. Por ejemplo al tomar $x = 2$ y $x = 6$ como valores del parámetro libre en las ecuaciones superiores de la izquierda y al tomar $y = 3$ e $y = -1$ en las de la derecha se obtienen los mismos resultados anteriores para la terna (x, y, z) : $(6, 3, -1)$, $(2, -1, 3)$.

2.2.4. Resolución de un sistema sobredeterminado

Un sistema $A\vec{x} = \vec{b}$ es **sobredeterminado** cuando el rango de la matriz A es máximo (ver sec. 2.1.2) y el rango de la ampliada $A_a = [A, \vec{b}]$ es mayor que el número de incógnitas n . En consecuencia, es un sistema incompatible (dado que $\text{rang } A = n < \text{rang } A_a = n + 1$) y, por tanto, es imposible encontrar una solución puesto que no existe. Como no hay solución se buscan valores de \vec{x} que minimicen el **error** o *no verificación del sistema* $\vec{E} = A\vec{x} - \vec{b}$ de algún modo. Obviamente, si hubiera solución existiría un \vec{x} tal que $\vec{E} = \vec{0}$.

El método de **mínimos cuadrados** permite obtener soluciones óptimas que minimizan el error \vec{E} en magnitud euclídea (o cuadrática) para sistemas sobredeterminados. Si hubiera solución el valor mínimo sería 0. El método se resume en la siguiente afirmación:

el valor de \vec{x} que minimiza el error cuadrático del sistema $A\vec{x} = \vec{b}$
es la solución del sistema $A^t A \vec{x} = A^t \vec{b}$,

de donde se desprende que el valor *óptimo* de \vec{x} es $\vec{x} = (A^t A)^{-1} A^t \vec{b}$ dado que el sistema anterior obtenido es compatible determinado al ser la matriz A de rango máximo.

A modo de ejemplo se considera el sistema

$$\begin{cases} x + 2y = 1 \\ 3x + 5y = 2 \\ 7x + 2y = 3 \end{cases}$$

que es sobredeterminado porque hay 3 ecuaciones linealmente independientes ($\text{rang } A_a = 3$) y sólo 2 incógnitas ($n = 2$ que es el número de columnas de A). Obviamente es incompatible porque el rango de la matriz A es 2 (es máximo puesto que sólo tiene 2 columnas y éstas son independientes) y el de la ampliada A_a es 3. Se utilizan los comandos de la sección 2.2.2 para obtener la solución del sistema $A^t A \vec{x} = A^t \vec{b}$ como se procede a continuación.

```
A=[1,2; 3,5; 7,2], b=[1; 2; 3]
rank(A), rank([A,b]), n=size(A,2) % ¿sobredeterminado?
x=linsolve(A'*A, A'*b) % por Gauss
```

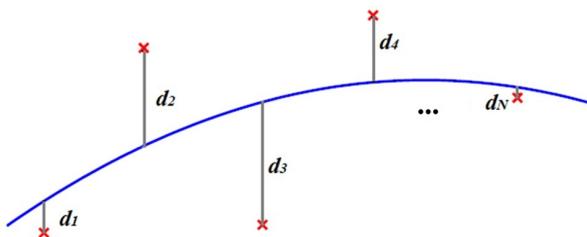
Se obtiene como solución óptima $\vec{x} = (x, y) = (0.3712, 0.1968)$ (con 4 decimales).

Por defecto, para un sistema incompatible sobredeterminado la anti-barra \ aplica directamente mínimos cuadrados por lo que la solución por mínimos cuadrados se obtiene directamente con el comando siguiente.

```
x=A\b % sobredeterminado por mínimos cuadrados
```

2.2.5. Ejemplo de regresión polinómica

Sirve como ejemplo de mínimos cuadrados cualquier problema habitual de **regresión polinómica**, es decir, del ajuste de una *nube de puntos* por un polinomio de grado r prefijado minimizando un cierto error. Si $r = 1$ se llama **regresión lineal** y si $r = 2$ **regresión cuadrática**. Se asume una nube de puntos suficientemente grande (de tamaño N) con abscisas distintas de modo que no exista un polinomio de grado r que pase exactamente por todos ellos. Se define el **error cuadrático medio (ECM)** como la suma de las distancias verticales ($d_i, i = 1, \dots, N$) al cuadrado de los puntos al polinomio dividido por el número de puntos, $\text{ECM} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N d_i^2$ (ver figura inferior). Se busca el polinomio de grado r que minimice dicho error. Ahora bien, si se quiere obtener un valor aproximado del error medio en cada punto se debe utilizar la raíz cuadrada del error cuadrático medio (**RECM**) para que éste tenga las mismas unidades que la variable dependiente, $\text{RECM} = \sqrt{\text{ECM}}$.

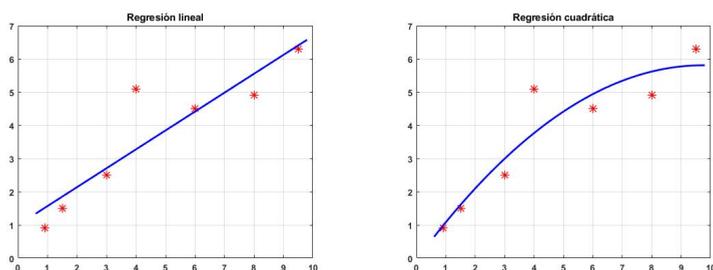


Se considera la nube de puntos $\{(x_i, y_i), i = 1, \dots, N\}$ con $N = 7$ dada por $\{(0.9, 0.9), (1.5, 1.5), (3, 2.5), (4, 5.1), (6, 4.5), (8, 4.9), (9.5, 6.3)\}$, y se quiere hacer una regresión lineal, es decir, se busca el polinomio de grado 1, $p(x) = ax + b$, que minimice el ECM. Para ello se pide que el polinomio $p(x)$ pase por todos los puntos, es decir, que $p(x_i) = y_i, i = 1, \dots, N$ generando un sistema sobredeterminado $A\vec{x} = \vec{b}$ con $\vec{x} = (a, b)$ que se resuelve como en la sección 2.2.4:

$$\left\{ \begin{array}{l} p(0.9) = 0.9a + b = 0.9 \\ p(1.5) = 1.5a + b = 1.5 \\ p(3) = 3a + b = 2.5 \\ p(4) = 4a + b = 5.1 \\ p(6) = 6a + b = 4.5 \\ p(8) = 8a + b = 4.9 \\ p(9.5) = 9.5a + b = 6.3 \end{array} \right. \quad \text{con } A = \begin{pmatrix} 0.9 & 1 \\ 1.5 & 1 \\ 3 & 1 \\ 4 & 1 \\ 6 & 1 \\ 8 & 1 \\ 9.5 & 1 \end{pmatrix}, \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} 0.9 \\ 1.5 \\ 2.5 \\ 5.1 \\ 4.5 \\ 4.9 \\ 6.3 \end{pmatrix}.$$

Se ejecutan los siguientes comandos obteniendo la gráfica inferior izquierda y que $p(x) = 0.568781 \cdot x + 0.998156$. El polinomio de ajuste se puede definir con $p=@(x)x.^{(1:-1:0)}*sol$ o bien con el comando `poly2sym`. Obsérvese que $A=[X.^1, X.^0]$ y que se tiene un error medio en cada punto, RECM, de 0.78.

```
X=[0.9;1.5;3;4;6;8;9.5]; Y=[0.9;1.5;2.5;5.1;4.5;4.9;6.3];
A=[X.^1,X.^0]; b=Y; N=length(X);
rank(A), rank([A,b]), n=size(A,2) % ¿sobredeterminado?
sol=A\b % SOLUCIÓN por mínimos cuadrados
p=poly2sym(sol) % p(x) de ajuste
xmin=min(X)-0.3; xmax=max(X)+0.3; % intervalo de dibujo
plot(X,Y,'r*'), hold on, grid on, fplot(p,[xmin,xmax],'b')
x=X; RECM=sqrt(sum((Y-eval(p)).^2)/N)
```



Ahora se busca el polinomio de ajuste cuadrático con los siguientes comandos obteniendo la figura superior derecha y que $p(x) = -0.0617158 \cdot x^2 + 1.203018 \cdot x - 0.0580161$. El polinomio de ajuste se puede definir con `p=@(x) x.^2,X.^1,X.^0` y que se tiene un error medio en cada punto, RECM, de 0.65. Al aumentar el grado de aproximación disminuye el error pero a veces carece de sentido aumentarlo.

```
A=[X.^2,X.^1,X.^0]; b=Y; N=length(X);
rank(A), rank([A,b]), n=size(A,2) % ¿sobredeterminado?
sol=A\b % SOLUCIÓN por mínimos cuadrados
p=poly2sym(sol) % p(x) de ajuste
xmin=min(X)-0.3; xmax=max(X)+0.3; % intervalo de dibujo
plot(X,Y,'r*'), hold on, grid on, fplot(p,[xmin,xmax],'b')
x=X;RECM=sqrt(sum((Y-eval(p)).^2)/N)
```

Para realizar un ajuste de un polinomio de grado r (con $r < N$) basta con modificar la matriz del sistema $A=[X.^r, X.^{r-1}, \dots, X.^1, X.^0]$ y en `sol` se obtienen los coeficientes del polinomio de ajuste en orden decreciente de las potencias de los monomios. También se dispone del comando `polyfit` para realizar este tipo de ajuste. Este método se generaliza fácilmente a otros ajustes no lineales.

2.3. APLICACIÓN DE LAS MATRICES A LAS IMÁGENES DIGITALES

2.3.1. Matrices e imágenes digitales

Toda **imagen digital en escala de grises** (*black&white*, BW) con una resolución $n \times m$ (ancho \times alto) no es más que una matriz A de números enteros positivos con m filas y n columnas. Obsérvese que las filas y columnas de una imagen digital se denotan en orden inverso a una matriz numérica. El valor del entero positivo en cada **píxel** o posición de la matriz A indica su

nivel o intensidad de blanco que, en 8 bits, va del 0 que indica el negro, al 255 que indica el blanco. En la imagen inferior izquierda se muestra la gradación de una escala de grises en 8 bits.



Por otra parte, una **imagen digital en color** en *Red-Green-Blue* (RGB) se puede considerar que es la superposición de tres imágenes definidas por tres matrices similares a la matriz A anterior, A_r , A_g y A_b , que para cada píxel contienen el nivel de intensidad en rojo (R), el nivel de intensidad en verde (G) y el nivel de intensidad en azul (B), respectivamente. Si se utilizan 8 bits para cada intensidad de color de cada píxel, su valor va del 0 al 255. Hay otras formas de representar los colores para las imágenes digitales que no vamos a ver aquí. Si A es la matriz que determina una imagen en color, las matrices de intensidad en cada color se pueden obtener con los siguientes comandos.

$A_r=A(:, :, 1)$; $A_g=A(:, :, 2)$; $A_b=A(:, :, 3)$;

En consecuencia, toda manipulación de una imagen digital no es más que una operación matricial, operación elemento a elemento o una operación que sólo afecte a submatrices (*convolución de matrices*). Para poder entender el tratamiento digital de imágenes se debe conocer bien el tratamiento operacional con matrices. A modo de ejemplo se citan las siguientes equivalencias entre tratamiento de imágenes y operaciones matriciales.

1. Extraer una parte de una imagen digital equivale a extraer una submatriz (ver sec. 1.2.1).
2. Si un píxel P tiene una intensidad de color r en rojo, g en verde y b en azul, el píxel P se representa mediante el **vector de color** $P = (r, g, b)$. El vector de color P del píxel situado en (i, j) es:

$$P=[A_r(i, j), A_g(i, j), A_b(i, j)]$$
3. La **intensidad de luz** i en un píxel P se define como la magnitud de su vector de color (r, g, b) , es decir, por $i = \sqrt{r^2 + g^2 + b^2}$. La matriz que contiene las intensidades de cada píxel es:

$$i=\text{sqrt}(A_r.^2+A_g.^2+A_b.^2)$$

4. La **luminancia** l se define como el promedio de intensidades en RGB, $l = (r + g + b)/3$. La matriz que las contiene es:

$$l = (Ar + Ag + Ab) / 3$$

5. Una imagen digital en color A se puede convertir a escala de grises mediante la intensidad de luz i de cada píxel P (dividiendo por $\sqrt{3}$ para escalar el valor máximo al rango correcto), $Ag1$, o bien, mediante su luminancia, $Ag2$, con los siguientes comandos:

$$Ag1 = \text{sqrt}(Ar.^2 + Ag.^2 + Ab.^2) / \text{sqrt}(3)$$

$$Ag2 = (Ar + Ag + Ab) / 3$$

6. **Voltear verticalmente** una imagen es equivalente a hacerlo a las matrices de píxeles que la definen (A en escala de grises, o bien, A_r , A_g y A_b en RGB). Voltear verticalmente una matriz equivale a multiplicar por la izquierda por una matriz de permutación Q de tamaño igual al número de filas de A que tiene todos sus coeficientes nulos excepto la

diagonal secundaria que contiene unos, $Q = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & & 1 \\ & \ddots & \\ 1 & & \mathbf{0} \end{pmatrix}$ (el $\mathbf{0}$ en

negrita indica que todas las posiciones fuera de la diagonal secundaria son nulas). La forma más elegante y ágil de obtener Q de tamaño $n \times n$ (no está en internet a fecha de publicación) es, $n=5$, $Q = \text{eye}(n)$; $Q = Q(:, n:-1:1)$. Para voltear una imagen a color basta multiplicar por Q las matrices A_r , A_g , A_b . Para poner en A_{vert} el volteo vertical de la imagen en escala de grises anterior $Ag1$ basta con ejecutar:

```
[n,m,rgb]=size(Ag1); Q=eye(n); Q=Q(:,n:-1:1); %Q
Avert=Q*Ag1;
```

7. **Voltear horizontalmente** una imagen es equivalente a hacerlo a las matrices de píxeles que la definen (A en escala de grises, o bien, A_r , A_g y A_b en RGB). Voltear horizontalmente una matriz equivale a multiplicar por la derecha por una matriz de permutación Q como la anterior. Obviamente el tamaño de Q debe ser igual al número de columnas de A . Para poner en A_{hor} el volteo horizontal de una imagen RGB basta con ejecutar los siguientes comandos:

```
[n,m,rgb]=size(A); Q=eye(m); Q=Q(:,m:-1:1); %Q
Ar=A(:, :, 1); Ag=A(:, :, 2); Ab=(A(:, :, 3)); %Ar, Ag, Ab
Ar=Ar*Q; Ag=Ag*Q; Ab=Ab*Q; Ahor=A; %se voltean horz.
Ahor(:, :, 1)=Ar; Ahor(:, :, 2)=Ag; Ahor(:, :, 3)=Ab;
```

8. Al **voltear centralmente** una imagen digital cada píxel se sitúa en su posición simétrica respecto el centro de la matriz (posición $(m/2, n/2)$)

aceptando la posición decimal como una fila o columna intermedia). Realizar un volteo central equivale a realizar dos volteos, uno vertical y otro horizontal.

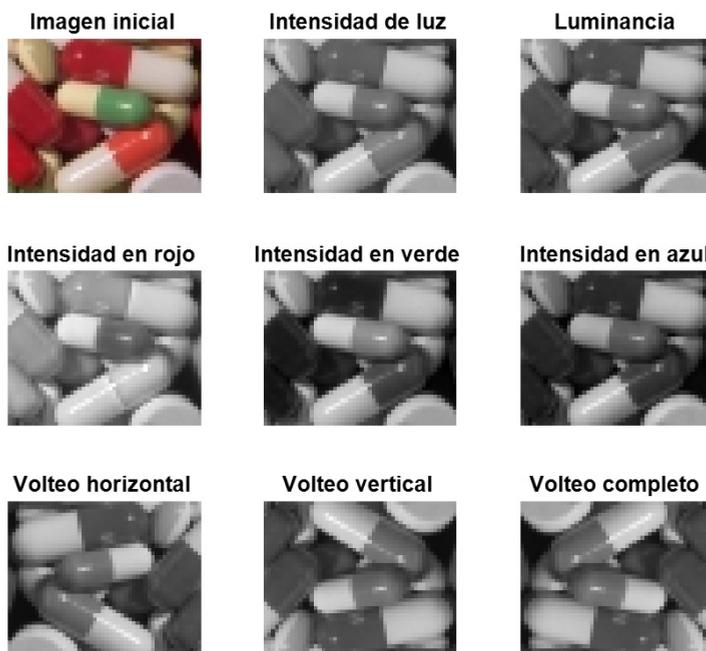
- Hay imágenes que no tienen todo el rango de intensidades de grises o de color. Se puede adaptar el rango de colores convirtiendo el color más oscuro en negro (valor 0), y el color más claro en blanco (valor 225 en 8 bits por píxel). Ello se puede conseguir en una imagen en escala de grises $Ag1$ con los siguientes comandos:

```
M=max(max(Ag1));m=min(min(Ag1));rango=M-m;
Ag1=(Ag1-m)*255/rango;
```

2.3.2. Ejemplo de tratamiento de imágenes digitales

Como ejemplo se carga la imagen *PillsS.bmp* (una sección de la imagen libre *Pills.bmp*) dentro de una matriz $A0$ cuyos valores son enteros sin signo de 8 bits (`uint8`). Este tipo de valores pueden generar problemas al realizar cálculos con ellos, por eso se pasan a doble precisión antes de operar con ellos. Luego se realizan las transformaciones necesarias y finalmente se vuelven a convertir a `uint8` para su visualización. Si un valor no es un entero se redondea al entero más cercano para su representación visual. Sobre esta imagen se realizan las operaciones indicadas en la sección anterior obteniendo las figuras siguientes mediante los comandos que se adjuntan a continuación.

```
A0=imread('PillsS.bmp'); [n,m,r]=size(A0) % n=40 x m=50 RGB
A=double(A0); % se pasa a doble (doble precisión)
P1_1=A(1,1,:) % vector de color píxel esquina superior izqda
il_1=sqrt(P1_1(1)^2+P1_1(2)^2+P1_1(3)^2) %intensidad de luz
R=A(:,:,1); % matriz con intensidades de rojo
G=A(:,:,2); % matriz con intensidades de verde
B=A(:,:,3); % matriz con intensidades de azul
BW1=sqrt(R.^2+G.^2+B.^2); % matriz con intensidades de luz
BW2=(R+G+B)/3; % matriz de luminancia
figure; subplot(3,3,1), imshow(A0), title('Imagen inicial')
subplot(3,3,2), imshow(uint8(BW1/sqrt(3))),title('Int.de luz')
subplot(3,3,3), imshow(uint8(BW2)), title('Luminancia')
subplot(3,3,4), imshow(uint8(R)),title('Intensidad en rojo')
subplot(3,3,5), imshow(uint8(G)),title('Intensidad en verde')
subplot(3,3,6), imshow(uint8(B)),title('Intensidad en azul')
Qc=eye(m);Qc=Qc(:,m:-1:1); %matriz permut. por la dcha.
Qf=eye(n);Qf=Qf(:,n:-1:1); %matriz permut. por la izqda.
subplot(3,3,7), imshow(uint8(BW2*Qc)),title('Volteo horiz.')
subplot(3,3,8), imshow(uint8(Qf*BW2)),title('Volteo vertical')
subplot(3,3,9), imshow(uint8(Qf*BW2*Qc))
title('Volteo completo')
```



2.4. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección [A.2](#).

2.4.1. Ejercicios propuestos

P2.1 Sea a el entero dado por la parte entera del promedio de los tres últimos dígitos de vuestro DNI, o pasaporte, más uno. Sean las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -6a & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} a & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$.

- Calcula $C = (B + A)(B - A)^t$.
- Calcula $D = (I + 3B)^5$.
- Obtén el rango de $A - 3B + I$.

P2.2 Resuelve la ecuación matricial $XA + B = X$ donde A y B son las matrices del ejercicio anterior.

P2.3 Clasifica los siguientes sistemas lineales y obtén su solución o soluciones, o el mejor valor posible según corresponda, donde a es el mismo valor que en el ejercicio [P2.1](#).

$$(a) \begin{cases} (2-3a)x - y + (1-a)z = 8-3a \\ x + 2y + 3z = 9 \\ 3x - z = 3 \end{cases}$$

$$(b) \begin{cases} x + y + z = 1 \\ 2x + 3y - 4z = 9 \\ x + 7z = -6 \end{cases}$$

$$(c) \begin{cases} x + y - z = 1 \\ 3x + 2y + z = 1 \\ 5x + 3y + 4z = 2 \\ -2x - y + 6az = 6 \end{cases}$$

P2.4 Se mide el espacio recorrido $x(t)$ de un vehículo cada cierto tiempo t obteniendo la tabla siguiente.

$t =$	0	5	10	15	20	25	30
$x =$	0.51	13.02	50.64	113.12	200.55	313.16	450.51

Calcula su velocidad y aceleración mediante regresión cuadrática sabiendo que sigue un movimiento uniformemente acelerado (con aceleración constante).

Indicación: En este tipo de movimiento se tiene que $x(t) = a \cdot t^2 + b \cdot t + c$ donde $c = x(0)$ es la posición inicial, $b = x'(0)$ la velocidad inicial y $a = \frac{x''(0)}{2}$ es el doble de la aceleración.

P2.5 Escoge una imagen digital en color de vuestra escuela (en formato *bmp*, *jpg* o *png*). Conviértela a escala de grises, extrae un trozo rectangular (de tamaño superior a 30×50 e inferior a 300×500 aproximadamente) y voltéala completamente utilizando productos matriciales.

2.4.2. Ejercicios de autoevaluación

T2.1 Sean A , B y C matrices de tamaños 2×3 , 3×2 , 3×3 respectivamente. Se asume que I es la matriz identidad y O un vector columna, ambos del tamaño necesario en cada caso para que las dimensiones propicien el cálculo. Indica cuál de las siguientes es cierta.

- $[A', B; I]$ es una matriz 7×7 .
- $[[A; C], [B; O, O]]$ da error.
- $[[A; C], [B; I]; O']$ es una matriz 6×5 .
- $[[B; I], [A; C]]$ es una matriz cuadrada 6×6 .

T2.2 Sean A , B y C matrices de tamaños 2×3 , 3×2 , 3×3 respectivamente. Se asume que I es la matriz identidad del tamaño necesario en cada caso para que las dimensiones propicien el cálculo. Señala cuáles de las siguientes operaciones matemáticas son posibles.

- $A+B$, $A \cdot I$.
- $A \cdot I \cdot B$, $A' \cdot A + C$.
- $A' \cdot B$, $2 \cdot A + I$.
- $B' \cdot C$, $A \cdot A' + C$.

T2.3 Sean A , B y C matrices 3×3 . Indica cuál de las siguientes afirmaciones es siempre cierta.

- (a) $A^{-1} \cdot (A \cdot B) = B$
- (b) $A^2 \cdot (A + C) = A \cdot A^2 + A^2 \cdot C$
- (c) $A \cdot (B + C) = A \cdot B + C \cdot A$
- (d) $A^3 \cdot (A^{-2} + 2 \cdot C) = A + 2 \cdot A^3 \cdot C$

Se definen las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ para los tres ejercicios siguientes.

T2.4 La solución de $B + XA = 2X$ es:

- (a) $X = [-1 \ 1; \ 2 \ -3]$
- (b) $X = [0 \ 1; \ 1 \ 4]$
- (c) $X = [-2 \ -3; \ -1 \ -2]$
- (d) Ninguna de las otras.

T2.5 La solución de $B^2 + X = A^{-1}X$ es:

- (a) $X = [-2.75 \ -1; \ 1.5 \ 1]$
- (b) $X = [2.5 \ 0; \ -2 \ 1]$
- (c) $X = [3 \ 2; \ -0.5 \ 0.5]$
- (d) Ninguna de las otras.

T2.6 La solución de $2XA + AB = -XB$ es:

- (a) $X = [0.52 \ -0.32; \ 1.08 \ -0.28]$
- (b) $X = [-0.2 \ -0.6; \ 0.48 \ 0.44]$
- (c) $X = [-1.25 \ 0; \ -0.75 \ -1]$
- (d) Ninguna de las otras.

T2.7 Se considera el sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ -x - z = 2 \end{cases}$. Se verifica que:

- (a) No tiene solución.
- (b) La solución es $\vec{x} = (1.5, 0.5, -1.5)$.
- (c) Tiene infinitas soluciones, por ejemplo, $\vec{x} = (-1.5, 1.5, -0.5)$.
- (d) Ninguna de las otras.

T2.8 Se considera el sistema $\begin{cases} 2x - 2y = -1 \\ -x + 2y = 0 \\ -x + y = 2 \end{cases}$. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta:

- (a) No tiene solución.
- (b) La solución es $\vec{x} = (-1.6, -0.8)$.
- (c) Tiene infinitas soluciones.
- (d) Ninguna de las otras.

T2.9 Se considera el sistema $\begin{cases} 2x + 2y + 2z = -1 \\ x + 2y + 3z = 0 \\ x - z = -1 \end{cases}$. Se verifica que:

- (a) No tiene solución.
- (b) La solución es $\vec{x} = (1.5, 0, -0.5)$.
- (c) Tiene infinitas soluciones, por ejemplo, $\vec{x} = (-1, 0.5, 0)$.
- (d) Ninguna de las otras.

T2.10 El número de fallecidos $f(t)$ (t en días) por *covid-19* al inicio de la pandemia sigue un modelo exponencial $f(t) = e^{a \cdot t + b}$ siendo a la tasa diaria de mortalidad. Al tomar logaritmos se tiene un modelo lineal: $y(t) = \ln(f(t)) = a \cdot t + b$. La mortalidad en los primeros días impares viene dada en la tabla siguiente.¹

$t =$	1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23
$f(t) =$	1	1	2	2	3	6	17	41	81	132	213	304

Determina la tasa a de mortalidad en dicho periodo.

Indicaciones: Define $X=[1:2:23]'$, $Y=\log([1, 1, 2, 2, 3, 6, 17, 41, 81, 132, 213, 304]')$, y obtén la pendiente del polinomio realizando un ajuste lineal por mínimos cuadrados de X e Y .

- (a) $a = 0.2935$.
- (b) $a = -0.9233$.
- (c) $a = 0.3542$.
- (d) Ninguna de las otras.

¹Datos del 11/01/2020 al 02/02/2020 cada dos días de China de Beltekian D., Gavrilo D., Hasell J., Macdonald B., Mathieu E., Ortiz-Ospina E., Ritchie H., Roser M. (2020). Data on COVID-19 by Our World in Data. GitHub. 26 de Abril de 2020, github.com/owid/covid-19-data.

Capítulo 3

Figuras y curvas en el plano euclídeo

En lo que sigue se utiliza notación clásica en geometría. En este capítulo se revisan las coordenadas, parametrizaciones y representaciones gráficas en el plano. Aunque lo habitual es utilizar coordenadas cartesianas $P(x, y)$ para un punto en el plano se van a utilizar coordenadas homogéneas $P(1, x, y)$ en vistas al capítulo siguiente de transformaciones geométricas.

En primer lugar se verán distintas coordenadas del plano y seguidamente figuras planas dadas por puntos y parametrizaciones. Se incluye un número importante de ejemplos junto con los comandos necesarios para su representación. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección A.3 se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

3.1. COORDENADAS EN \mathbb{R}^2

3.1.1. Coordenadas cartesianas

Por defecto en \mathbb{R}^2 se utilizan las **coordenadas cartesianas** en donde cada punto P queda determinado por sus valores x, y en cada eje ordenado OX, OY respectivamente y que denotaremos $P(x, y)$. En plano afín identificamos los **puntos** P con sus **vectores posición** \overrightarrow{OP} , es decir,

$$P(x, y) \equiv \overrightarrow{OP} = (x, y) - (0, 0) = (x, y) \quad (3.1)$$

donde $O(0, 0)$ es el **origen**. Gracias a ello, a las operaciones con puntos se les puede dar un sentido vectorial. Recuérdese que los vectores los representaremos como **matrices columna** (matrices de una única columna), aunque a veces se escriban en el texto como **matrices fila** (matriz con una única fila) por comodidad (ver sec. 2.1.1). A la primera coordenada x de un punto $P(x, y)$ se le llama **abscisa** y a la segunda coordenada y se le llama **ordenada**.

Por defecto, cuando se representan dos puntos éstos se unen mediante una línea recta (ver sec. 1.5.1), por ello, para dibujar una línea curva se suelen utilizar muchos puntos unidos por pequeños segmentos. Para representar en \mathbb{R}^2 una figura plana dada por la unión de una sucesión de puntos $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ basta con colocar en X todas las abscisas, en Y todas las ordenadas y, a continuación, ejecutar el comando `plot(X, Y)` como se indica a continuación. Este comando funciona independientemente si los vectores son fila o columna, pero mejor utilizar siempre vectores columna.

```
X=[x1;x2;...;xn]
Y=[y1;y2;...;yn]
plot(X, Y)
```

Se recuerda que una línea curva o poligonal continua donde el punto de inicio y final coinciden forma una **curva** o **figura cerrada** (ver sec. 1.5.1). Para obtenerla con los comandos anteriores, el punto inicial debe coincidir con el punto final, es decir, $(x_1, y_1) = (x_n, y_n)$.

3.1.2. Coordenadas homogéneas

Dado un punto P de coordenadas cartesianas (x, y) en el plano \mathbb{R}^2 , se llaman **coordenadas homogéneas** de dicho punto a la terna $(\mu, \mu \cdot x, \mu \cdot y)$ para algún $\mu \neq 0$ que representa un factor de escala. Habitualmente se elige $\mu = 1$ como también haremos nosotros. En algunas notaciones, en vez de poner μ al principio de la terna de coordenadas homogéneas, se pone al final. Utilizaremos esta formulación para las transformaciones planas del capítulo 4 usando vectores tridimensionales de la forma $\tilde{P}(1, x, y)$ que se corresponde con el punto $P(x, y)$, es decir,

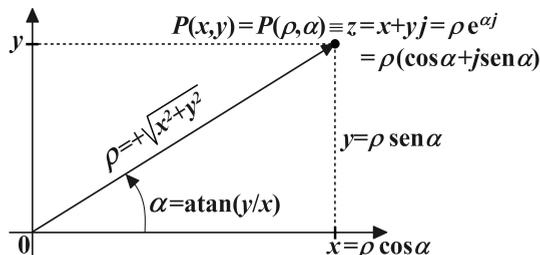
$$\tilde{P}(1, x, y) = P(x, y). \quad (3.2)$$

3.1.3. Coordenadas polares y números complejos

Cualquier punto $P(x, y)$ del plano real se puede identificar con su equivalente **número complejo** $z = x + yj$ del plano complejo donde $j = \sqrt{-1}$ como se observa en la figura inferior, obteniendo que

$$P(x, y) \equiv z = x + yj.$$

En consecuencia, todas las figuras planas se pueden representar con números complejos y recíprocamente. Los ejes OX y OY del plano real se identifican con los ejes real e imaginario del plano complejo, respectivamente.



Cualquier punto del plano real $P(x, y)$ no nulo se puede determinar por sus **coordenadas polares** (ρ, α) donde ρ es el módulo del vector (x, y) y α es el ángulo del vector (x, y) con el semieje OX positivo en sentido antihorario como se observa en la figura superior. A ρ se le llama **módulo** de P y a α **argumento** de P . Obsérvese que el **sentido** del ángulo α es **antihorario**, es decir, que se recorre en sentido inverso a las agujas de un reloj. La relación entre las coordenadas cartesianas y polares de un punto queda determinada por las razones trigonométricas de un triángulo rectángulo como se especifica en la figura anterior y, más concretamente, en las ecuaciones siguientes.

$$(a) \begin{cases} \rho = |z| = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \alpha = \arctan \frac{y}{x} \end{cases} \quad (b) \begin{cases} x = \rho \cdot \cos \alpha \\ y = \rho \cdot \sen \alpha \end{cases} \quad (3.3)$$

Para evaluar la función $\arctan(\frac{y}{x})$ se debe utilizar el comando $\text{atan2}(y, x)$ para obtener todos los posibles argumentos. Ello se debe a que como la función $\tan x$ es π -periódica se tiene que la función $\text{atan}(y/x)$ sólo recupera valores en $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ mientras que $\text{atan2}(y, x)$ lo hace en $]-\pi, \pi]$ teniendo en cuenta los signos de las coordenadas x e y .

Esta representación también tiene su reflejo en los **complejos** en la **forma polar** ρ_α , en la **forma trigonométrica** $\rho(\cos \alpha + j \sen \alpha)$ y en la **forma exponencial** $\rho e^{\alpha j}$ donde $e^{\alpha j} = (\cos \alpha + j \sen \alpha)$ es la fórmula de Euler (ver figura superior). Más concretamente, se tiene que

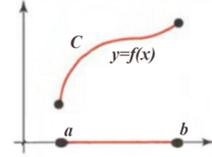
$$P(x, y) = P(\rho, \alpha) \equiv z = x + yj = \rho_\alpha = \rho(\cos \alpha + j \sen \alpha) = \rho e^{\alpha j}. \quad (3.4)$$

En algunos contextos se admiten valores negativos para el módulo ρ del vector (x, y) , en este caso se entiende que si $\rho < 0$, $(\rho, \alpha) = (-\rho, \alpha + \pi)$ (en radianes). Por defecto siempre se asumirá que es positivo o nulo a no ser que se indique lo contrario.

3.2. PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^2

3.2.1. Curva regular parametrizada

Una **curva regular** C en el plano se puede decir que es, de forma intuitiva, un subconjunto en \mathbb{R}^2 donde en cada punto podemos encontrar una porción de segmento a su alrededor que ha sido *deformado de forma suave* sin esquinas ni ángulos.



Vamos a ver las distintas formas de expresar una curva regular (ver sec. 1.5.5). Sea $f(x)$ una función continua en un intervalo $[a, b]$ y derivable en su interior. Una **curva** regular C se define de forma **explícita** como el conjunto de puntos $(x, f(x))$ donde $x \in [a, b]$, es decir,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b], y = f(x)\};$$

se dice que C está dada de forma **implícita** cuando se da una relación F *diferenciable* (con *gradiente* no nulo) entre las variables (con *gradiente* no nulo), es decir,

$$C = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : F(x, y) = 0\};$$

y se dice que C está de forma **paramétrica** cuando los puntos de la curva (x, y) de C se pueden poner en función continua, $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$, de un parámetro independiente t sobre un cierto intervalo $I = [a, b]$ (ver sec. 1.5.5). Es una **curva regular** cuando \vec{f} es *diferenciable* con \vec{f}' no nulo en $]a, b[$. En este caso se tiene que

$$C = \{(x(t), y(t)), t \in I\}.$$

Esta última forma es la que da más flexibilidad para representar curvas en el plano y, además, se tiene que el vector $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t))$, dado por las derivadas de las componentes de \vec{f} , es el **vector tangente** a la curva en el punto $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in]a, b[$. Este vector tiene un ángulo nulo con la curva en el punto de tangencia. Como es conocido, si a un vector no nulo del plano se intercambian sus coordenadas y se cambia una de ellas de signo se obtiene un vector perpendicular al primero (su *producto escalar* se anula). En consecuencia, el vector $(y'(t), -x'(t))$ es un **vector perpendicular** a la curva y al vector tangente $(x'(t), y'(t))$ en el punto $(x(t), y(t))$. Una curva regular tiene un único vector tangente \vec{f}' no nulo en $f(t)$, $t \in]a, b[$.

Se dice que una curva es **regular a trozos** cuando está formada por diferentes partes que son curvas regulares. En una *esquina* se tienen dos vectores tangentes distintos, uno por cada lado, por lo que una curva regular no puede tener *esquinas*.

Pondremos en P (variable Pt) los puntos que definen la curva, cada punto en una columna. En \tilde{P} (variable Pt) se pondrán los mismos puntos en coordenadas homogéneas, es decir, \tilde{P} será igual que P pero con un 1 en una fila superior añadida como sigue (ver sec. 3.1.2):

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (3.5)$$

Para representar las figuras dadas por estos puntos se utilizará el comando `plot(Pt(2,:), Pt(3,:))`.

Si (ρ, α) son las coordenadas polares de $P(x, y)$ (ver sec. 3.1.3), entonces la expresión del radio vector ρ en función del argumento α de $P(x, y)$, $\rho = \rho(\alpha)$, es una **parametrización** conocida como una **curva en polares**. Las expresiones polares permiten un sinfín de figuras curiosas que semejan pétalos y corazones, entre otros. A continuación se enumeran algunos ejemplos.

- La curva $\rho = 2 \cos(2\alpha)$ genera cuatro **pétalos** tangentes a las *bisectrices* de los cuadrantes del plano. Se denominan así por su semejanza con una flor.
- La curva $\rho = 2 \cos(5\alpha)$ genera una figura con 5 pétalos.
- Se puede desfasar el ángulo lo cual genera un giro en la figura como ocurre con $\rho = 2 \cos(3(\alpha - \pi/6))$ que es un **trifolium** (tres hojas o pétalos) girado $\pi/6$ radianes en sentido antihorario.
- Si se define $\rho = \rho_0 + 2 \cos(n\alpha)$ con $\rho_0 > 0$ se tiene que la curva ya no pasa por el origen y se parece a una margarita hasta cuando $\rho_0 > 2$ que se parece más a una estrella. En el caso en que $\rho_0 = 2$ y $n = 1$ se tiene una conocida figura en forma de corazón llamada **cardioide**. También se pueden definir otros ejemplos de cardioide como $\rho = \rho_0 + \cos(n\alpha)$.

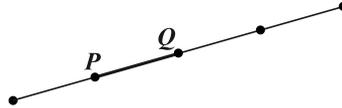
3.2.2. Parametrización de recta y segmento

La **recta** r que pasa por los puntos P y Q del plano tiene vector director \overrightarrow{PQ} , y su ecuación vectorial es

$$X = P + t \cdot (Q - P), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Para $t = 0$ se obtiene el punto P , y para $t = 1$ el punto Q . Si $t \in [0, 1]$ se obtienen los puntos del segmento \overline{PQ} como es fácil de probar.

Si t se elige, por ejemplo, en el intervalo $[-1, 3]$ se obtiene un segmento cuatro veces mayor que \overline{PQ} (el segmento tiene 3 veces la longitud de \overline{PQ} desde P en la dirección de Q , y una vez dicha longitud en sentido opuesto. En la figura inferior se realiza una representación gráfica de este segmento, $z(t) = P + t(Q - P)$, $t \in [-1, 3]$.



3.2.3. Parametrización de circunferencia y elipse

La parametrización de una **circunferencia** con centro en el origen y radio r viene dada por los puntos (ver sec. 1.5.5):

$$P(x(t), y(t)), \text{ con } x(t) = r \cdot \cos t, y(t) = r \cdot \sen t, t \in I = [0, 2\pi[.$$

Ello es evidente si se escribe P en coordenadas polares puesto que, utilizando la ecuación (3.3) se tiene que $\rho = \sqrt{(r \cdot \cos t)^2 + (r \cdot \sen t)^2} = \sqrt{r^2} = r$, y $\alpha = \arctan\left(\frac{\sen t}{\cos t}\right) = \arctan(\tan t) = t$, es decir, $P(r \cdot \cos t, r \cdot \sen t)$ de la parametrización tiene módulo r y argumento t .

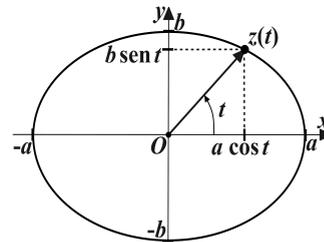
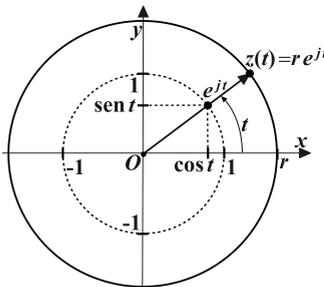
Se pueden *escalar* los ejes según los factores $a, b > 0$ definiendo

$$P(x(t), y(t)), \text{ con } x(t) = a \cdot \cos t, y(t) = b \cdot \sen t, t \in I = [0, 2\pi[$$

y en tal caso, se obtiene la parametrización de una **elipse** centrada al origen de semiejes a y b cuya ecuación cartesiana es $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ (se deja al lector su verificación).

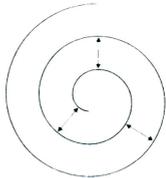
Si deseamos que la circunferencia o la elipse anteriores tengan su centro en (x_0, y_0) , fuera del origen, sólo hace falta sustituir (literalmente) x por $(x - x_0)$ e y por $(y - y_0)$.

En la figura inferior a la izquierda se presenta una interpretación esquemática de la parametrización de una circunferencia y, a la derecha, la de una elipse.



3.2.4. Parametrización de espirales

Si se hace variar el módulo en función del parámetro (curva en polares, ver sección 3.1.3), entonces se pueden obtener otras figuras como, por ejemplo, la **espiral de Arquímedes** dada por $(x(t), y(t)) = (bat \cos(at), bat \sin(at))$ con $a > 0, b > 0, 0 \leq t < \infty$, en la que todas las vueltas son equidistantes (ver figura inferior izquierda) y que se define como el lugar geométrico de un punto moviéndose a velocidad constante sobre una recta que gira sobre un punto de origen fijo a velocidad angular constante. En coordenadas polares esta espiral se escribe como $r = b\theta$ con $\theta = at$ siendo r el módulo, θ el ángulo y a, b, t verificando las mismas condiciones anteriores. Si se toma $t \in [0, 10 \cdot 2\pi]$ entonces la espiral tendrá 10 vueltas. Si se eligen distintos valores para la b en la primera y segunda componente, entonces se tendrá una espiral elíptica.



Las curvas dadas en polares por $\rho = a \cdot b^t$ con $a, b > 0$ y t el argumento, se llaman **espirales logarítmicas** y se suelen encontrar en la naturaleza como se observa en la figura superior derecha.

3.3. FIGURAS EN EL PLANO REAL

3.3.1. Ejemplo de figura plana

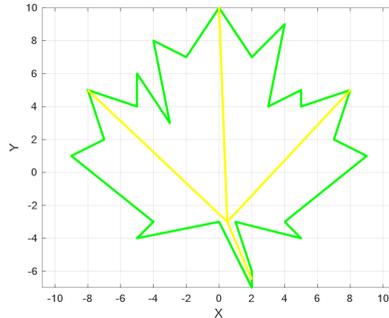
Vamos a dibujar una hoja plana uniendo los 26 puntos $\{(4,-3), (9,1), (7,2), (8,5), (5,4), (5,5), (3,4), (4,9), (2,7), (0,10), (-2,7), (-4,8), (-3,3), (-5,6), (-5,4), (-8,5), (-7,2), (-9,1), (-4,-3), (-5,-4), (0,-3), (2,-7), (2,-6), (1,-3), (5,-4), (4,-3)\}$. El primer y último punto son los mismos para cerrar la figura (ver sec. 3.1.1). Cada línea recta es la unión de dos puntos que se incluyen en la variable P. Por comodidad se definen por filas los puntos en P y luego se transponen para que sean columnas como se indica en la ecuación (3.5). A continuación se definen dichos puntos en coordenadas homogéneas en la variable Pt.

```
% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[4, -3; 9, 1; 7, 2; 8, 5; 5, 4; 5, 5; 3, 4; 4, 9; 2, 7; 0, 10; ...
  -2, 7; -4, 8; -3, 3; -5, 6; -5, 4; -8, 5; -7, 2; -9, 1; -4, -3; ...
  -5, -4; 0, -3; 2, -7; 2, -6; 1, -3; 5, -4; 4, -3]'; % (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y). Pt=P-tilde
```

```
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:), 'g')
```

Ahora vamos a añadirle los nervios principales a la hoja. Para ello pondremos los puntos necesarios en una nueva variable P1 y su correspondiente P1t en coordenadas homogéneas. Se muestra el resultado obtenido en la figura siguiente.

```
% Definición de P1(x,y) por filas y trasponer
P1=[-8,5;0.5,-3;0,10;0.5,-3;8,5;0.5,-3;2,-6.5]'; % (VARIAR)
% Definición de P1t(1,x,y). P1t=P-tilde-1
[n1,n2]=size(P1);P1t=ones(n1+1,n2);P1t(2:n1+1,:)=P1;
%figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
plot(P1t(2,:),P1t(3,:), 'y')
```



Se observa que los puntos están unidos por líneas rectas y que cada grupo de puntos se debe dibujar y tratar de forma independiente. Para dibujar otras figuras basta con modificar la línea marcada con `%...` (VARIAR) que se corresponde con la definición de los puntos. Si se quiere dibujar algo nuevo sobre una figura anterior basta con eliminar o comentar la línea que empieza con el comando `figure`.

3.3.2. Ejemplo de figura parametrizada

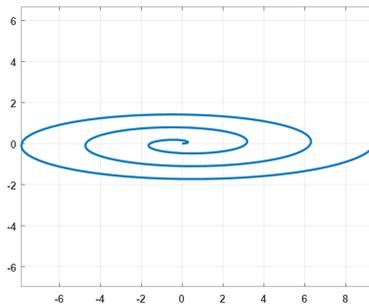
Vamos a dibujar una espiral elíptica en el plano que dé tres vueltas. Para ello se define la parametrización (ver la sec. 3.2.4):

$$(x(t), y(t)) = \left(\frac{t}{2} \cdot \cos t, \frac{t}{10} \cdot \sin t \right), \quad t \in [0, 6\pi].$$

A continuación se realiza una discretización sobre el parámetro t , se calculan las coordenadas $(x(t), y(t))$ de la curva que se escriben en coordenadas homogéneas (ver ec. (3.5)) y se representa uniendo los puntos con líneas rectas

(ver sec. 3.1.1). Para ello se ejecutan los comandos siguientes y se obtiene la figura inferior. Recuérdese que el número de puntos debe ser suficientemente elevado para que las líneas curvas se vean suaves (sin **esquinas**) pero no excesivo para que no se ralentice excesivamente el programa. Nótese que para evaluar las coordenadas de una parametrización se deben utilizar operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5).

```
% Definición de X(t) y de Y(t) FIGURA
t=linspace(0,6*pi,333); % Parámetro (VARIAR)
X=t/2.*cos(t); % X(t) (VARIAR)
Y=t/10.*sin(t); % Y(t) (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t); Pt=ones(3,n2); Pt(2:3,:)= [X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:))
```



Como el rango del parámetro (que es el argumento) es $[0, 3 \cdot 2\pi]$, se obtienen 3 vueltas alrededor del origen. Como el módulo en ambas coordenadas no se incrementa a la par, tiene forma elíptica en vez de circular. Para dibujar otras curvas o figuras parametrizadas basta con modificar las líneas marcadas con `%...` (VARIAR) que se corresponden con la discretización del parámetro y la definición de las parametrizaciones $x(t)$ e $y(t)$. Ahora bien, X e Y son vectores con las coordenadas cartesianas de los puntos de la figura y deben tener las mismas dimensiones. Si, por ejemplo, la curva estuviera sobre un valor constante de y , por ejemplo $y = 1$, no se puede poner $Y=1$ puesto que da error, se debe poner, por ejemplo, $Y=1+0*t$ manteniendo las dimensiones adecuadas en la variable Y .

3.3.3. Ejemplo de un trozo de pizza

Un trozo de pizza se corresponde con un sector circular y la curva de su contorno es una curva regular a trozos formada por dos segmentos o trozos de recta y un trozo de circunferencia. Vamos discretizar un trozo de circunferencia

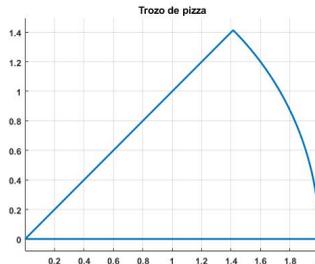
(ver sec. 3.2.3) y luego le añadiremos los segmentos al vértice que supondremos que está al origen. Como se quiere una curva cerrada se repite el punto inicial (ver sec. 3.1.1).

Vamos a considerar una octava parte de la circunferencia y de lado dos unidades, por tanto, la parametrización del trozo de circunferencia será

$$(x(t), y(t)) = (2 \cdot \cos t, 2 \cdot \sin t), \quad t \in [0, \pi/4].$$

Primero se realiza una discretización sobre el parámetro t y se calculan las coordenadas $(x(t), y(t))$ de la curva que se escriben en coordenadas homogéneas (ver ec. (3.5)). Seguidamente se añade el vértice, se repite el punto inicial para que cierre la figura y se representa uniendo los puntos con líneas rectas (ver sec. 3.1.1). Para ello se ejecutan los comandos siguientes y se obtiene la figura siguiente.

```
% Definición de X(t) y de Y(t) FIGURA
t=linspace(0,pi/4,55); % Parámetro (VARIAR)
X=2.*cos(t); % X(t) (VARIAR)
Y=2.*sin(t); % Y(t) (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t); Pt=ones(3,n2); Pt(2:3,:)=X; Y;
% Añadimos el (0,0) y repetimos el punto inicial:
Pt=[Pt, [1;0;0]]; Pt=[Pt,Pt(:,1)];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Trozo de pizza')
```



3.3.4. Ejemplo de representación de un polígono regular

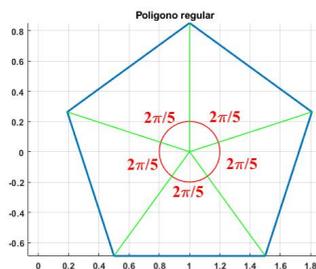
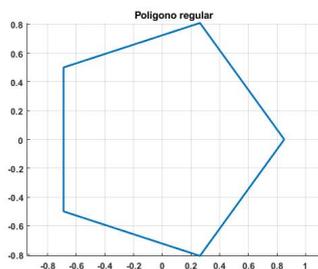
Todo polígono regular de N lados se puede representar inscrito dentro de una circunferencia. Para ello basta con calcular los vértices y unirlos con segmentos repitiendo el punto inicial para obtener una figura cerrada (ver sec. 3.1.1), es decir, hay que subdividir 2π radianes en N partes y considerar los valores 0 y 2π que generan el mismo punto y permiten cerrar la figura. En consecuencia, los puntos a representar son:

$$(R \cdot \cos t, R \cdot \sin t), \quad t = 0 \cdot \frac{2\pi}{N}, 1 \cdot \frac{2\pi}{N}, \dots, n \cdot \frac{2\pi}{N}, \quad R \text{ fijado.}$$

Si se quiere un polígono regular de lado L , entonces, por el teorema del coseno (sobre uno de los triángulos de lados R , R y L y vértice en el centro indicados en la figura inferior derecha) se tiene que $R = \frac{L}{\sqrt{2(1-\cos(2\pi/N))}}$. Le añadimos un centro (x_0, y_0) que sumaremos a los puntos anteriores y un desfase φ que sumaremos al parámetro para girar el polígono sobre su centro.

Tomamos $N = 5$ y procedemos a dibujar un pentágono centrado de lado $L = 1$ en $(x_0, y_0) = (1, 0)$ y un desfase de 90° en el parámetro que es el argumento en polares ($\varphi = 90 \frac{\pi}{180}$ radianes). Para ello utilizamos los comandos siguientes y se dibuja abajo a la izquierda sobre el origen y sin desfase y, a la derecha con el centro y desfase pedido. Recuérdese que siempre hay un punto más que intervalo y, por tanto, en el comando `linspace` hay que tomar $N+1$ puntos (ver sec. 1.2.2).

```
% POLÍGONO REGULAR de N-lados
N=5;phi=90*pi/180;L=1;x0=1;y0=0; % Datos iniciales (VARIAR)
R=L/sqrt(2*(1-cos(2*pi/N))); t=linspace(0,2*pi,N+1)+phi;
X=x0+R*cos(t); % X(t)
Y=y0+R*sin(t); % Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)=[X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Poligono regular')
```



Para dibujar cualquier otro polígono regular basta con modificar únicamente la línea marcada con `%...` (VARIAR)

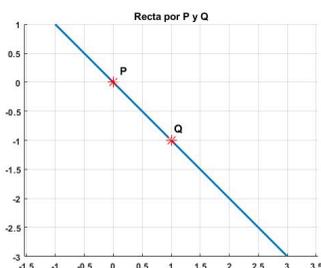
Obsérvese que todo polígono regular de N lados se puede subdividir en N triángulos isósceles iguales con vértice compartido en el centro de la circunferencia que lo contiene. El ángulo de todos los triángulos en el vértice que está en el centro de la circunferencia son iguales a $\frac{2\pi}{N}$. A modo de ejemplo se dibujan en verde los lados que definen dichos triángulos con los siguientes comandos obteniendo la figura superior derecha en donde se han añadido los ángulos mencionados.

```
X1=reshape([zeros(1,N+1)+x0;X],2*N+2,1);
Y1=reshape([zeros(1,N+1)+y0;Y],2*N+2,1);
plot(X1,Y1,'g')
```

3.3.5. Ejemplo de representación de una recta

A continuación se dibuja la recta bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, es decir, la recta que pasa por $P(0,0)$ y por $Q(1,-1)$. Aunque para dibujar un trozo de recta basta con el punto inicial y el final, ahora se va a dibujar una discretización de puntos sobre la recta con los siguientes comandos (ver sec. 3.2.2). Para dibujar otras rectas o segmentos basta con modificar la línea marcada con `%... (VARIAR)`. El punto P se coge como centro y se dibuja t_{\min} y t_{\max} veces el segmento \overline{PQ} desde P como se observa en la figura inferior.

```
% RECTA paramétrica (t=parámetro)
P=[0;0],Q=[1;-1],tmin=-1,tmax=3,N=201% (VARIAR)
t=linspace(tmin,tmax,N);% N valores de t
X=P(1)+t*(Q(1)-P(1));% X(t)
Y=P(2)+t*(Q(2)-P(2));% Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)=[X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Recta por P y Q')
plot([P(1),Q(1)], [P(2),Q(2)], '*r')
```



3.3.6. Ejemplo de representación de circunferencias y elipses

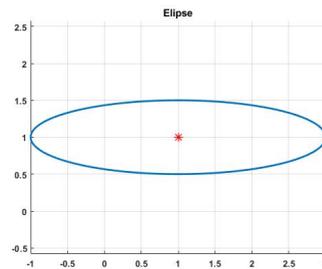
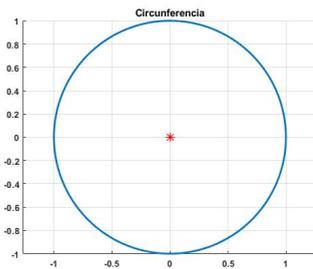
Vamos a dibujar la circunferencia unidad centrada al origen, y una elipse de semiejes 2 y 0.5 centrada en $(1,1)$ (ver sec. 3.2.3). Para ello se ejecutan los siguientes comandos obteniendo la figura inferior. Si se quieren obtener otras circunferencias o elipses basta con modificar las líneas marcadas con `%... (VARIAR)`.

```

% CIRCUNFERENCIA paramétrica
x0=0,y0=0,r=1 % centro y radio (VARIAR)
t=linspace(0,2*pi,221); % Parámetro (1 vuelta)
X=x0+r*cos(t); % X(t)
Y=y0+r*sin(t); % Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)= [X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Circunferencia')
plot(x0,y0,'*r')

% ELIPSE paramétrica
x0=1,y0=1,semiejeX=2,semiejeY=0.5 % (VARIAR)
t=linspace(0,2*pi,221); % Parámetro (1 vuelta)
X=x0+semiejeX*cos(t); % X(t)
Y=y0+semiejeY*sin(t); % Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)= [X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Elipse')
plot(x0,y0,'*r')

```



3.3.7. Ejemplo de representación paramétrica de espirales

Se van a dibujar 3 vueltas de la **espiral** de Arquímedes y de la logarítmica con $a = 1$ y $b = 1.3$ (ver sec. 3.2.4) con los comandos siguientes obteniendo las figuras inferiores. Nótese que se han utilizado operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5).

```

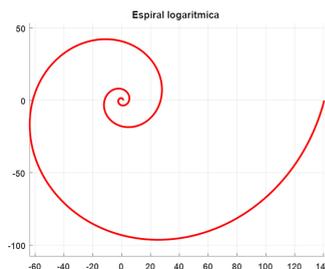
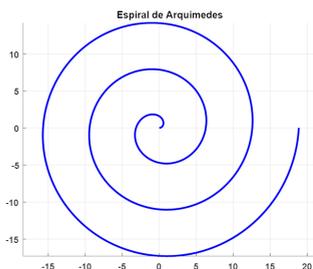
x0=0,y0=0,vueltas=3; % (VARIAR)
t=linspace(0,2*pi*vueltas,777); % Parámetro
X=x0+t.*cos(t); % X(t)
Y=y0+t.*sin(t); % Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)= [X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Espiral de Arquimedes')

```

```

x0=0,y0=0,vueltas=3,a=1,b=1.3 % (VARIAR)
t=linspace(0,2*pi*vueltas,777); % Parámetro
X=x0+a*b.^t.*cos(t); % X(t)
Y=y0+a*b.^t.*sin(t); % Y(t)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)=[X;Y];
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),title('Espiral logaritmica')

```



3.3.8. Ejemplo de representación de curvas en coordenadas polares

Para representaciones en coordenadas polares se dispone de los siguientes comandos:

- `polarplot(a,r)` dibuja en coordenadas polares los puntos que tienen argumento el vector a y módulo el vector r .
- `polarscatter(a,r)` dibuja un mapa de dispersión de puntos en coordenadas polares que tienen argumento el vector a y módulo r .
- `polarhistogram(a,r)` dibuja un histograma en coordenadas polares con argumento a y módulo r .
- `ezpolar(a,r)` dibuja de forma más sencilla funciones en coordenadas polares.

Funcionan de forma similar al `plot` indicando primero el argumento y luego el módulo. Para cualquier información adicional se puede utilizar la ayuda incorporada mediante menús o mediante el comando `help`.

A continuación, se representan la **circunferencia unidad** (ver figura inferior izquierda) y tres vueltas de la **espiral de Arquímedes** (ver figura inferior derecha) como curvas paramétricas en polares (ver sec. 3.2.1) mediante los siguientes comandos.

```

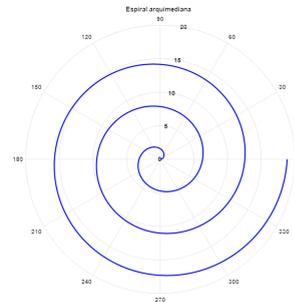
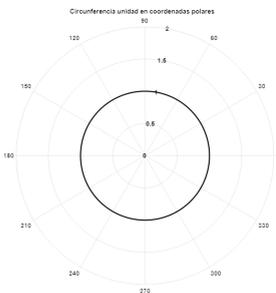
radiocircunf=1 % (VARIAR)
t=linspace(0,2*pi,221); % Ángulo (argumento)
R=radiocircunf*t.^0; % Radio (módulo)
figure,polarplot(t,R,'k') % Dibujo
title('Circunferencia unidad en coordenadas polares')

```

```

t=linspace(0,6*pi,551); % Ángulo (argumento)
R=t; % Radio (módulo)
figure % Quitar si se solapa
polarplot(t,R,'b'),title('Espiral arquimediana')

```

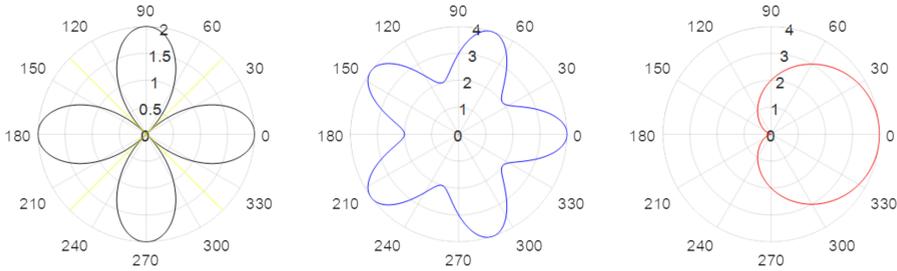


A continuación, con los siguientes comandos, dibujamos un **tetrafolio** con sus rectas tangentes en la figura inferior izquierda, seguidamente una **estrella** en la figura inferior central y finalmente la **cardioide** en la figura inferior derecha (ver sec. 3.2.1).

```

t=linspace(0,2*pi,555); % Parámetro ángulo (argumento)
r1=2*cos(2*t); % Radio (módulo) tetrafolio
r2=3+cos(5*t); % Radio (módulo) estrella
r3=2+2*cos(t); % Radio (módulo) cardioide
figure
subplot(1,3,1),polarplot(t,r1,'k'),hold on % Tetrafolio
polarplot([pi/4,pi/4],[0,2],'y') % Bisectriz 45°
polarplot([-3*pi/4,-3*pi/4],[0,2],'y')
polarplot([3*pi/4,3*pi/4],[0,2],'y') % Bisectriz -45°
polarplot([-pi/4,-pi/4],[0,2],'y')
subplot(1,3,2),polarplot(t,r2,'b') % Estrella
subplot(1,3,3),polarplot(t,r3,'r') % Cardioide

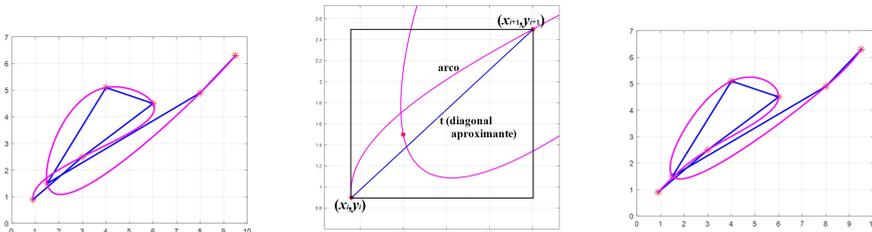
```



3.3.9. Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos

Se busca una curva parametrizada *suave* (regular) que pase por los N puntos (x_i, y_i) , $i = 1, \dots, N$, dados por $\{(0.9, 0.9), (3, 2.5), (6, 4.5), (4, 5.1), (1.5, 1.5), (8, 4.9), (9.5, 6.3)\}$ por lo que $N = 7$. Ésta se puede obtener tomando como parámetro una aproximación t a la *longitud de arco* con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda. El valor de t utilizado viene dado por la diagonal del rectángulo que definen dos puntos consecutivos (x_i, y_i) y (x_{i+1}, y_{i+1}) (ver figura inferior central), es decir, $t = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2}$, $i = 1, \dots, N - 1$. El comando `diff` calcula la diferencia entre dos componentes consecutivas cuando se aplica a un vector y permite simplificar el cálculo del valor de t . El comando `cumsum` realiza una suma acumulada de las componentes del vector que es una aproximación a la longitud total acumulada hasta el valor de t considerado. El comando `interp1` permite obtener los valores (*interpolados*) de las coordenadas de los puntos intermedios de la parametrización. Para verificar que la curva obtenida es adecuada también se representan los puntos con un asterisco unidos entre sí por segmentos en el orden a seguir por la curva.

```
x=[0.9, 3, 6, 4, 1.5, 8, 9.5], y=[0.9, 2.5, 4.5, 5.1, 1.5, 4.9, 6.3], N=7
t=sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2); t=[0, cumsum(t)];
tt=linspace(t(1), t(N), 300);
xx=interp1(t, x, tt, 'spline'); yy=interp1(t, y, tt, 'spline');
figure, hold on, axis equal, grid% Quitar si se solapa
plot(x, y, 'r*', x, y, 'b'), plot(xx, yy, 'm')
```



Se obtiene una parametrización similar a la curva anterior utilizando el comando `cscvn` como se puede ver en la figura superior derecha. Este comando devuelve una estructura con los coeficientes de los trozos de splines y los puntos de corte y se puede dibujar con el comando `fnplt`.

```
figure, plot(x,y,'r*',x,y,'b'), grid on, hold on
curva=cscvn([x;y]); hold on, fnplt(curva,'m',1.5);
```

3.4. VECTOR TANGENTE A UNA CURVA PARAMETRIZADA

Esta sección se añade a modo de *addenda* y para entender mejor el concepto de curva regular y de tangencia. Como se ha visto en la sección 3.2.1 una curva en \mathbb{R}^2 es regular cuando tiene un vector tangente único no nulo en todos sus puntos no extremos.

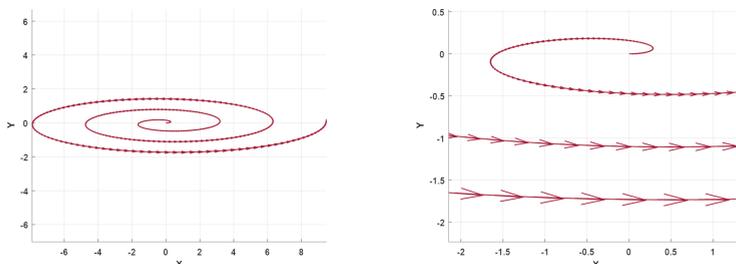
Se considera la espiral elíptica de la sección 3.3.2 parametrizada por $\vec{f}(t)$, $t \in [0, 6\pi]$, y se asumen ejecutados los comandos de dicha sección. El **vector** $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t))$ es **tangente** a la curva, da el sentido de recorrido y su magnitud indica la velocidad en que se recorre la curva en cada punto, es decir, la razón de recorrido de la curva respecto el parámetro. Si la curva $\vec{f}(t)$ indicara la trayectoria de un vehículo en el tiempo t , el vector $\vec{f}'(t)$ indicaría la velocidad de dicho vehículo. A continuación, se muestra la parametrización y el vector tangente calculado directamente:

- Parametrización: $\vec{f}(t) = (x(t), y(t)) = (\frac{t}{2} \cdot \cos t, \frac{t}{10} \cdot \sin t)$.
- Vector tangente: $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t)) = (\frac{\cos t}{2} - \frac{t \sin t}{2}, \frac{\sin t}{10} + \frac{t \cos t}{10})$.

El comando `quiver(x, y, u, v)` permite representar el vector (u, v) en el punto (x, y) en dos dimensiones. Con él se puede dibujar el vector tangente $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t))$ a cada punto de la curva regular parametrizada por $\vec{f}(t) = (x(t), y(t))$, $t \in [a, b]$. El vector tangente se puede calcular directamente como se ha hecho, o bien, se puede obtener mediante derivación simbólica y después convertir las derivadas a identificador de función como vamos a hacer a continuación con los siguientes comandos obteniendo las imágenes inferiores (ver sec. 1.3.2).

```
% PARAMETRIZACIÓN f(T)=[x(T);y(T)]
syms T a
C=[T/2*cos(T);T/10*sin(T)]% curva C (VARIAR)
Cder=diff(C,T)% C: f'(T)=[x'(T);y'(T)]
% Conversión de f'(T) a función de (a,T)
```

```
V=matlabFunction(Cder+a*T,'Vars',{a,T});
% Dibujo de los vectores tangentes f'(T)
hold on,axis equal,V=V(0,t);
quiver(X,Y,V(1,:),V(2,:)) % f'(T) (a=0)
```



En la imagen superior izquierda se muestra la figura completa y a la derecha una sección para observar con más detalle las tangencias. Se observa que las velocidades aumentan según se aleja la espiral del origen alrededor del eje OY puesto que los vectores tangentes son mayores en magnitud. Se añade una variable auxiliar simbólica a para no tener problemas en la conversión a función cuando las derivadas son, por ejemplo, constantes. Esta variable auxiliar se elimina a posteriori puesto que se evalúa en 0.

Para aplicarlo a cualquier otra curva regular basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

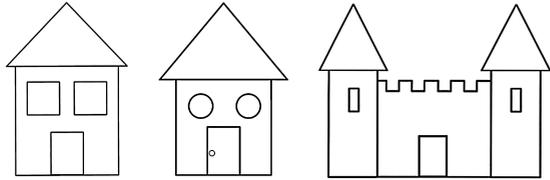
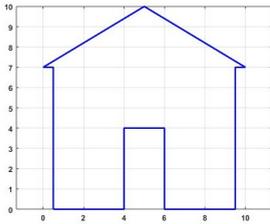
3.5. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección [A.3](#).

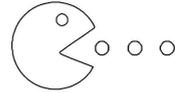
3.5.1. Ejercicios propuestos

P3.1 Dibuja dentro del cuadrado $[0,10] \times [0,10]$ alguna “casita” similar a alguna de las adjuntas. Se añaden los comandos para el primer ejemplo.

```
% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[0.5 0;4 0;4 4;6 4;6 0;9.5 0;9.5 7;10 7;...
  5 10;0 7;0.5 7;0.5 0]'; % P (VARIAR)
[n,m]=size(P);Pt=[ones(1,m);P]; % Pt
figure,plot(Pt(2,:),Pt(3,:), 'b'),axis equal,grid on
```



P3.2 Dibuja un comeocos como el de la imagen adjunta de tamaño 10 unidades de altura.



P3.3 Representa las siguientes curvas utilizando coordenadas polares.

- Una flor de 5 pétalos.
- Una espiral de Arquímedes que gire en sentido inverso centrada en el punto $(2, 0)$.
- La mitad izquierda de una elipse de semieje 2 unidades en vertical y 3 en horizontal centrada en $(3, 2)$.

P3.4 Elige entre cinco y diez puntos coordenados en $[0, 10] \times [0, 10]$ y representa una curva suave que pase por todos ellos de modo que se parezca a la inicial de tu nombre en mayúsculas.

P3.5 Demuestra que en una circunferencia los radios son perpendiculares a ésta.

Indicación: Basta demostrar que los radios son perpendiculares a los vectores tangentes. Se asume una circunferencia centrada al origen puesto que la posición en el plano es irrelevante. Si $\vec{f}(t)$ es la parametrización de la circunferencia centrada al origen de radio R , es suficiente ver que los vectores $\vec{f}(t)$ y $\vec{f}'(t)$ son perpendiculares o, equivalentemente, que su producto escalar vale cero, es decir, $\vec{f}(t) \cdot \vec{f}'(t) = 0$. Se puede hacer teóricamente con las funciones que determinan la parametrización o, aunque no sea una verdadera demostración, verificando que para cada valor de t discretizado se verifica que $\text{dot}([X; Y], V) = 0$ donde $[X; Y]$ son los puntos de la circunferencia y V sus vectores tangentes según la notación de la sección 3.4.

3.5.2. Ejercicios de autoevaluación

T3.1 Indica cual de las siguientes afirmaciones es cierta en el plano.

- $P(0, 1)$ (en cartesianas) $\equiv 1 + 0 \cdot j$
- $P(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \equiv \sqrt{2} \cdot e^{\pi \cdot j}$
- $P(1, \sqrt{2}, \sqrt{2}) \equiv 4 \cdot e^{\pi/4 \cdot j}$
- $P(1, \sqrt{3}, 1) \equiv P(2, \pi/6)$ (en polares).

T3.2 La curva de una de las siguientes opciones es distinta a las demás. Indica cuál es.

- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y = +\sqrt{1 - x^2}\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$
- $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = \cos t, y = \text{sen } t, t \in [-\pi, 0]\}$
- $\{(\cos t, \text{sen } t), 0 \leq t \leq \pi\}$

T3.3 Se consideran distintas curvas en polares. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**:

- (a) $\rho = 2 \cos(3(\alpha + \pi/6))$ es un trifolium, como una flor de 3 hojas o pétalos.
- (b) $\rho = 4 \cos(6(\alpha + \pi/3))$ es como una flor de 6 pétalos.
- (c) $\rho = 3 \cos(7(\alpha + \pi/3))$ es como una flor de 7 pétalos.
- (d) $\rho = 8 \cos(5\alpha + \pi/2)$ es como una flor de 5 pétalos.

T3.4 Señala cuál de las siguientes opciones es cierta:

- (a) La curva $\{(6t \cos(t), 6t \sin(2t), t \in [0, 6\pi])\}$ en coordenadas cartesianas es una espiral de Arquímedes.
- (b) La curva $\{(1.2^t \cos(t), 1.3^t \sin(t), t \in [0, 6\pi])\}$ en coordenadas cartesianas es una espiral logarítmica.
- (c) La curva $\{(2 \cdot 1.2^{t^2}, t), t \in [0, 6\pi])\}$ en coordenadas polares es una espiral logarítmica.
- (d) La curva $\{(6t, 2t), t \in [0, 6\pi])\}$ en coordenadas polares es una espiral de Arquímedes.

T3.5 Indica cual de las siguientes afirmaciones es cierta.

- (a) Si una curva es regular tiene vector tangente en todos sus puntos.
- (b) Ninguna de las otras.
- (c) Un cuadrado es una curva regular.
- (d) El vector tangente de una curva regular en un punto es perpendicular a ella en dicho punto.

T3.6 Sea $(x(t), y(t))$, $t \in I$, una curva parametrizada y sea N el número de puntos utilizados para discretizar t en I en la representación gráfica. Señala cual de las siguientes respuestas es cierta.

- (a) Si N es pequeño suelen aparecer esquinas en la representación aunque sea una curva regular.
- (b) El parámetro t es el argumento del punto $(x(t), y(t))$.
- (c) El valor de N debe ser superior a 200 e inferior a 500.
- (d) Si aparecen esquinas en la representación gráfica de la curva es porque no puede ser regular.

T3.7 Utilizando la notación del texto, se asume en la variable $\mathbb{P}t$ los N puntos que definen una figura en el plano. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.

- (a) Las dimensiones de $\mathbb{P}t$ son $3 \times N$.
- (b) Las dimensiones de $\mathbb{P}t$ son $N \times 3$.
- (c) Las componentes de una columna de $\mathbb{P}t$ son las coordenadas (x, y) de un punto de la figura.
- (d) La primera fila de $\mathbb{P}t$ contiene las abscisas de todos los puntos que definen la figura.

T3.8 En un polígono regular cerrado de 8 lados se verifica una de las siguientes respuestas. Señala cuál es.

- (a) Hay que representar P_t con 8 columnas correspondientes a las coordenadas de los vértices.
- (b) El radio de la circunferencia en donde se inscribe el polígono es igual al lado del polígono.
- (c) Un desfase positivo en el argumento de los vértices respecto el centro cambia la longitud del lado del polígono.
- (d) El ángulo que determinan los segmentos que unen su centro con dos vértices consecutivos es $\pi/4$.

T3.9 Indica qué representan los puntos P_t siguientes (se asume que es una circunferencia cuando los dos semiejes de una elipse son iguales):

```
t=linspace(0,pi,222)+pi; X=2+cos(t); Y=1.5*sin(t);
Pt=ones(3,222);Pt(2:3,:)= [X;Y];
```

- (a) La mitad inferior de una elipse.
- (b) La mitad superior de una elipse.
- (c) La mitad superior de una circunferencia.
- (d) La mitad inferior de una circunferencia.

T3.10 Señala qué comando se puede utilizar para dibujar una cardiode.

- (a) `polarplot(2 + 2.*cos(t), t)`
- (b) `plot((2+2*cos(t)).*cos(t), (2+2*cos(t)).*sin(t))`
- (c) `polarplot(2*cos(2+ t), t)`
- (d) `polarplot(t, 2*cos(t+ pi))`

Capítulo 4

Transformaciones geométricas en el plano

En el capítulo 3 se han visto las coordenadas habituales en el plano y ejemplos de figuras planas dadas por puntos o parametrizaciones. En este capítulo se introducen las transformaciones geométricas en el plano y se aplican sobre las figuras vistas en el capítulo anterior. Aunque con el método propuesto se puede aplicar cualquier transformación, nos vamos a centrar con las transformaciones semejantes que son base de todas ellas. Primero se presentan las transformaciones geométricas en el plano y luego se muestran ejemplos. También se considera el producto o composición de transformaciones.

Para simplificar los cálculos se utilizan coordenadas homogéneas (ver sec. 3.1.2) y se incluyen los comandos necesarios para cada transformación. Estos comandos son de interpretación directa pero también se pueden aplicar por bloques como si se tratara de funciones predefinidas. Ello facilita el seguimiento del texto con los procedimientos habituales de copia/pega. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección A.4 se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

4.1. TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^2

4.1.1. Transformaciones del plano

Se denomina **transformación** (geométrica) del plano a toda aplicación $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ biyectiva. Si $F(P) = P'$ se dice que P' es el **transformado** u **homólogo** de P mediante F . Según sea la transformación F , también se

dice que P' es el trasladado, simétrico, homotético, . . . de P . Algunos textos simplemente indican que P' es la **imagen** de P por F .

Si C es un subconjunto, o **figura**, de \mathbb{R}^2 entonces $C' = F(C)$ es la **figura** o **conjunto transformado**.

Si F y G son transformaciones del plano, también lo es la **composición de las transformaciones** $G \circ F$, que también se denomina **producto de las transformaciones** G y F y se define sobre el punto P como $(G \circ F)(P) = G(F(P))$. En general $G \circ F \neq F \circ G$. A veces $G \circ F$ se denota como simple producto, $G \cdot F$.

Dos **figuras** son **semejantes** si tienen la misma forma aunque sus orientaciones y tamaños sean distintos, es decir, cuando los segmentos o lados homólogos son proporcionales y los ángulos permanecen iguales. Como se irá viendo a lo largo del capítulo, las semejanzas transforman una figura en otra semejante a ella.

Un **punto** se llama **invariante** por una transformación si su homólogo es él mismo. Una **figura** se llama **invariante** si todos sus puntos lo son. Se define la **transformación identidad** como aquella en que todos los puntos son invariantes.

4.1.2. Isometrías y semejanzas

Se denomina **isometría** o **movimiento** de \mathbb{R}^2 a toda transformación que *conserva las distancias* entre puntos. Como consecuencia de ello, las isometrías conservan los ángulos que definen los segmentos. La isometría se denomina **directa** si conserva la orientación de los ángulos y, en caso contrario, se denomina **inversa**. El producto de isometrías es otra isometría.

Al producto de una isometría por una homotecia (ver sec. 4.2.4 para más detalle), o viceversa, se denomina **semejanza**. En consecuencia, las isometrías son un caso particular de semejanzas, y además, el producto de semejanzas es otra semejanza.

Obsérvese que todas las semejanzas son invertibles puesto que F es biyectiva. Además, una transformación por su inversa da la transformación identidad.

4.1.3. Transformación afín

Una **transformación afín** $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal de **matriz** $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ **no singular** (con determinante no nulo), seguida de

la suma de un vector $\vec{h} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$. Dado un punto $P(x, y)$ cualquiera del plano (ver sec. 3.1.1) su **transformado, imagen u homólogo** $P'(x', y')$ por F viene dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \vec{h}. \quad (4.1)$$

A la matriz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de la aplicación lineal asociada a la transformación afín** F y a $\vec{h} = \begin{pmatrix} e \\ f \end{pmatrix}$ **vector de traslación** de la transformación afín. Una transformación afín en el plano tiene seis *grados de libertad* correspondiendo a los cuatro coeficientes de la matriz y a los dos del vector de traslación.

Se utiliza una formulación más simple usando coordenadas homogéneas (ver sec. 3.1.2) de modo que el punto $\tilde{P}(1, x, y)$ se transforma en su homólogo $\tilde{P}'(1, x', y')$. Con esta notación, la transformación afín F de la ecuación (4.1) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix} \quad (4.2)$$

donde a la matriz $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de la transformación afín** y se puede escribir en *bloques* como $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{h} & A \end{pmatrix}$. Obsérvese que

las ecuaciones (4.1) y (4.2) son equivalentes.

Las **semejanzas** son transformaciones afines en el plano real. La transformación identidad (ver sec. 4.1.2) queda definida mediante la matriz identidad \tilde{I} (ver sec. 1.2.1) como matriz asociada a la aplicación lineal y traslación nula ($A = I$ y $\vec{h} = \vec{0}$ en la ec. (4.1)).

4.1.4. Producto de transformaciones afines

El **producto (o composición) de transformaciones afines** (ver sec. 4.1.1) es otra transformación afín. Dicha operación es asociativa pero no conmutativa, por lo que se debe tener siempre en cuenta el orden en que se realizan las transformaciones afines.

Sean $h_1, h_2 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ dos transformaciones afines dadas por las matrices \tilde{A}_1 y \tilde{A}_2 respectivamente. Sea \tilde{A} la matriz del producto de las transformaciones $h = h_2 \cdot h_1$. Sea \tilde{P} un punto cualquiera del plano, sea \tilde{P}' su homólogo por h_1 (i.e., $\tilde{P}' = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{P}$), y sea \tilde{P}'' el homólogo de \tilde{P}' por h_2 (i.e., $\tilde{P}'' = \tilde{A}_2 \cdot \tilde{P}'$). Se tiene que

$$\begin{aligned}\tilde{P}'' &= (h_2 \cdot h_1)(\tilde{P}) = h_2(h_1(\tilde{P})) = h_2(\tilde{P}') = \tilde{A}_2 \cdot \tilde{P}' \\ &= \tilde{A}_2 \cdot (\tilde{A}_1 \cdot \tilde{P}) = (\tilde{A}_2 \cdot \tilde{A}_1) \cdot \tilde{P} = h(\tilde{P}) = \tilde{A} \cdot \tilde{P},\end{aligned}$$

por lo que

$$\tilde{A} = \tilde{A}_2 \cdot \tilde{A}_1,$$

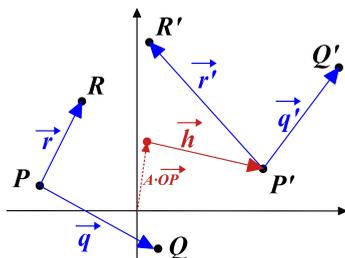
es decir, la matriz del producto de transformaciones es el producto de las matrices de las transformaciones. Obsérvese que las matrices de los nuevos productos se van añadiendo al producto por la izquierda. Este producto de transformaciones afines se puede resumir con el siguiente diagrama.

$$\begin{array}{ccccc} & & \overset{h \equiv \tilde{A}}{\curvearrowright} & & \\ & \tilde{P} & \xrightarrow{h_1 \equiv \tilde{A}_1} & \tilde{P}' & \xrightarrow{h_2 \equiv \tilde{A}_2} & \tilde{P}'' \\ & & & \tilde{P}' = \tilde{A}_1 \cdot \tilde{P} & \longrightarrow & \tilde{P}'' = \tilde{A}_2 \cdot \tilde{P}' = \tilde{A}_2 \cdot \tilde{A}_1 \cdot \tilde{P} = \tilde{A} \cdot \tilde{P} \end{array}$$

4.1.5. Caracterización de una transformación afín

Como se observa en las ecuaciones (4.1) y (4.2), una transformación afín F definida por su matriz \tilde{A} está formada por una aplicación lineal de matriz A seguida de una traslación de vector \vec{h} . Para determinar una aplicación lineal en el plano de matriz A se necesita la imagen de dos vectores linealmente independientes (que forman una base) y para determinar el vector de traslación \vec{h} se necesita la imagen de un punto. En consecuencia se tiene el siguiente resultado.

Una transformación afín en el plano queda determinada al fijar la imagen de tres puntos no alineados. Ello es debido a que al fijar la imagen de tres puntos P , Q y R no alineados ($P' = h(P)$, $Q' = h(Q)$, $R' = h(R)$), se fija la imagen de una base por la aplicación lineal asociada con matriz A ($\vec{q}' = A\vec{q}$, $\vec{r}' = A\vec{r}$ donde $\vec{q} = Q - P$, $\vec{r} = R - P$, $\vec{q}' = Q' - P'$, $\vec{r}' = R' - P'$). A partir de ésta y de la imagen P' de un punto P , se determina el vector traslación ($\vec{h} = \overrightarrow{OP'} - A \cdot \overrightarrow{OP}$) como se observa en la siguiente figura.



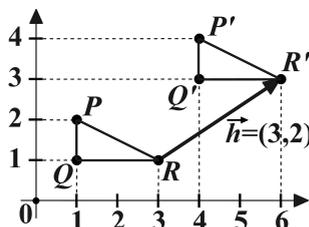
Fijar la imagen de tres puntos del plano no alineados es equivalente a imponer 6 ecuaciones (3 puntos por 2 coordenadas por punto) lineales independientes por lo que se tiene un sistema compatible y determinado con solución única para los 6 parámetros a, b, c, d, e, f de la matriz \tilde{A} . A priori, la transformación afín así determinada no tiene porqué ser una semejanza, depende de los valores de las imágenes de los puntos considerados.

4.2. SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL

4.2.1. Traslaciones

Sea \vec{h} un vector (fijo) de \mathbb{R}^2 . Se denomina **traslación** $T_{\vec{h}}$ de \mathbb{R}^2 a la isometría (directa) que verifica $T_{\vec{h}}(P) = P' = P + \vec{h}$ (i.e., $\vec{h} = \overrightarrow{PP'}$) es el vector con origen en el punto P y finalización en P' , ver sección 3.1.1) para cualquier $P \in \mathbb{R}^2$. Es una isometría (directa).

En la imagen adjunta se muestra la traslación de la figura (triángulo) de vértices $P(1, 2)$, $Q(1, 1)$ y $R(3, 1)$ por el vector $\vec{h} = (3, 2)$ obteniendo el triángulo definido por los vértices P' , Q' y R' .



La imagen $\tilde{P}'(1, x', y')$ de un punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por una traslación de vector $\vec{h} = (e, f)$, $T_{\vec{h}}$, se puede calcular mediante la matriz de traslación $\tilde{A}_{\vec{h}}$ como sigue,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & 1 & 0 \\ f & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{\vec{h}} \cdot \tilde{P}.$$

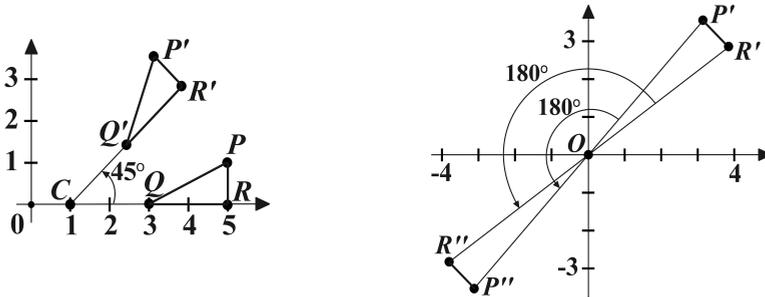
Obsérvese que la matriz de la aplicación lineal asociada es la matriz identidad y el vector de traslación es \vec{h} (ver ec. (4.2)). Al realizar una traslación ningún punto se mantiene invariante. Es fácil comprobar que la transformación inversa a $T_{\vec{h}}$ es $T_{-\vec{h}}$, es decir, es otra traslación de matriz $\tilde{A}_{-\vec{h}}$.

4.2.2. Giros y simetrías respecto a un punto

Se denomina **giro** o **rotación** de centro el punto C y ángulo φ , $G_{C,\varphi}$, a la isometría (directa) que satisface $\widehat{CP'CP'} = \varphi$ para cualquier $P \in \mathbb{R}^2$ y donde $P' = G_{C,\varphi}(P)$. Recuérdese que \widehat{uv} es el ángulo que va del vector \vec{u} al vector \vec{v} cuando se sitúan en un mismo punto (en sentido antihorario). Es una isometría (directa).

Un giro de 180° respecto a un punto C se denomina **simetría puntual** y se denota S_C . Si C es el origen se suele denominar, simplemente, **simetría central**. En la simetría central se verifica que $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$.

En la imagen inferior izquierda se muestra el giro de centro $C(1,0)$ y ángulo $+45^\circ$ de la figura (triángulo) determinada por los vértices $P(5,1)$, $Q(3,0)$, $R(5,0)$. Obsérvese que se verifica que $\widehat{CQ'CP'} = 45^\circ$ al igual que $\widehat{CP'CP'} = \widehat{CR'CR'} = 45^\circ$. En la figura inferior derecha se muestra la simetría central del segmento que une los puntos P' y R' anteriores obteniendo los puntos P'' y R'' . Obsérvese que P'' y R'' son los transformados de P y R respectivamente por el producto de transformaciones anteriores, primero el giro y luego la simetría central, y que se verifica que $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP''}$ y $\overrightarrow{OR'} = -\overrightarrow{OR''}$.



La imagen $\tilde{P}'(1, x', y')$ de un punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por un **giro** de ángulo φ respecto al un punto C , que hemos denotado por $G_{C,\varphi}$, viene determinado por el producto de su matriz de transformación $\tilde{A}_{C,\varphi}$. Cuando $C = O(0,0)$, utilizando propiedades trigonométricas, se obtiene que la transformación viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & -\operatorname{sen} \varphi \\ 0 & \operatorname{sen} \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{O,\varphi} \cdot \tilde{P}.$$

Si se quiere realizar un giro de ángulo φ respecto otro punto C distinto al origen (o una simetría puntual), primero se sitúa C al origen mediante una

traslación de vector $\vec{h} = \overrightarrow{CO}$, luego se realiza el giro pedido con $A_{O,\varphi}$ (o la simetría central), y finalmente se deshace la traslación previa (ver sec. 4.1.4), es decir,

$$\tilde{A}_{C,\varphi} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O,\varphi} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}}.$$

El único punto que se mantiene invariante al aplicar un giro o una simetría puntual es el centro C . Es fácil comprobar que la transformación inversa a $G_{C,\varphi}$ de matriz $\tilde{A}_{C,\varphi}$ es $G_{C,-\varphi}$ de matriz $\tilde{A}_{C,-\varphi}$. En consecuencia, la transformación inversa a una simetría puntual es ella misma puesto que $\tilde{A}_{C,\pi} = \tilde{A}_{C,-\pi}$. Obsérvese que, cuando $C = O(0,0)$ se tiene que $\tilde{A}_{O,-\varphi} = (\tilde{A}_{O,\varphi})^t$, es decir, la matriz de la transformación inversa a un giro sobre el origen es su traspuesta. Recuérdese que, por convención, los ángulos de rotación positivos producen rotaciones en sentido antihorario (en sentido inverso a las manecillas de un reloj).

A la transformación dada por simetría puntual de centro C la denotaremos S_C y \tilde{A}_C a su matriz. Nótese que la matriz de la aplicación lineal asociada a una simetría central es la matriz identidad cambiada de signo, es decir, la imagen $\tilde{P}'(1, x', y')$ de un punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por S_O es

$$\tilde{P}' = \tilde{A}_{O,\pi} \cdot \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_O \cdot \tilde{P}.$$

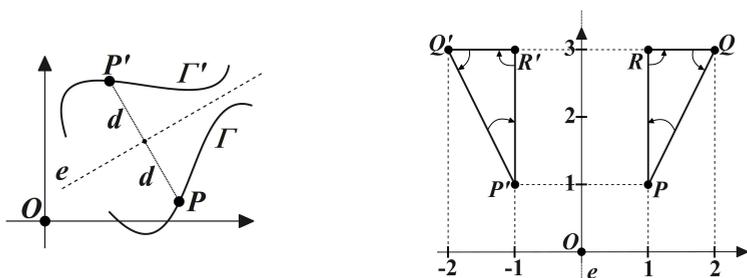
Ello corrobora que el homólogo $P'(x', y')$ del punto $P(x, y)$ por una simetría central verifica que $\overrightarrow{OP'} = -\overrightarrow{OP}$, es decir, $x' = -x$, $y' = -y$.

4.2.3. Simetrías respecto un eje

Se denomina **simetría axial**, S_e , de eje (la recta) e a la isometría (inversa) que se caracteriza porque e es la mediatriz del segmento $\overline{PP'}$ (i.e., $d(P, e) = d(P', e)$), donde d indica la distancia, en este caso, entre un punto y una recta). Se dice que P' es el simétrico de P respecto la recta o eje e .

En la imagen inferior izquierda se observa la simetría axial Γ' de una curva Γ , y P' la de un punto $P \in \Gamma$ respecto el eje e . Se observa que el segmento $\overline{PP'}$ es perpendicular al eje e y que la distancia de P al eje e coincide con la distancia de P' al mismo eje.

En la imagen inferior derecha se transforma la figura de vértices $P(1, 1)$, $Q(2, 3)$ y $R(1, 3)$ por la simetría axial que determina el eje OY obteniendo el triángulo determinado por P' , Q' y R' . Obsérvese la distinta orientación de los ángulos al ser una isometría inversa.



A la matriz de una simetría axial S_e la denotaremos \tilde{A}_e . Sea $\tilde{P}'(1, x', y')$ la imagen del punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por S_e . Entonces se tiene que $\tilde{P}' = \tilde{A}_e \tilde{P}$.

Cuando e es el eje de abscisas OX se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & +1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{OX} \cdot \tilde{P},$$

mientras que cuando e es el eje de ordenadas OY se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & +1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{OY} \cdot \tilde{P}.$$

Obsérvese que la matriz de la aplicación lineal asociada a S_{OX} y a S_{OY} es la identidad con un signo cambiado en uno de los coeficientes de la diagonal y que el vector de traslación es nulo (ver ec. (4.2)).

Sean Q y R dos puntos distintos del eje de simetría e . Se define $\vec{n} = (n_1, n_2) = \overrightarrow{QR}$ un vector director de la recta. Si e es distinto de los ejes cartesianos, primero se realiza una traslación de vector $\vec{h} = \overrightarrow{QO}$ para hacer que la recta pase por el origen, luego se realiza un giro de ángulo $\varphi = -\arctan(n_2/n_1)$ para que la recta trasladada se sitúe sobre el eje OX , a continuación, se realiza la simetría respecto al eje OX , y finalmente se deshacen las transformaciones iniciales en orden inverso realizando primero el giro inverso y luego la traslación inversa (ver sec. 4.1.4), es decir,

$$\tilde{A}_e = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O, -\varphi} \cdot \tilde{A}_{OX} \cdot \tilde{A}_{O, \varphi} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}}.$$

Todos los puntos del eje e son invariantes por S_e . Es fácil comprobar que la transformación inversa a una simetría axial es ella misma.

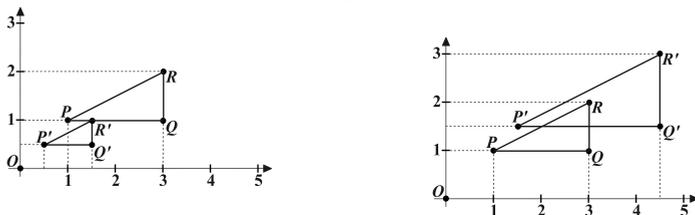
Se deja al lector comprobar que una simetría central es igual al producto de las dos simetrías axiales dados por los ejes cartesianos sin importar el orden, es decir, $\tilde{A}_O = \tilde{A}_{OY} \cdot \tilde{A}_{OX} = \tilde{A}_{OX} \cdot \tilde{A}_{OY}$.

4.2.4. Homotecias

Se denomina **homotecia** de centro (el punto) C y razón $k > 0$ a la transformación $H_{C,k}$ de \mathbb{R}^2 que se caracteriza porque $\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}$ para cada $P \in \mathbb{R}^2$. Las homotecias no son isometrías (salvo cuando $k = 1$).

Las figuras homotéticas son semejantes y los segmentos homólogos (homotéticos) mantienen la razón de proporcionalidad k respecto los originales. Por tal razón, para $k > 1$ las figuras homotéticas son *más grandes* que las originales (*zoom positivo*), y para $k < 1$ son más pequeñas (*zoom negativo*).

En la imagen inferior izquierda se transforma la figura determinada por los vértices $P(1, 1)$, $Q(3, 1)$ y $R(3, 2)$ por una homotecia de razón $k = 0.5$ centrada en el origen en el triángulo de vértices P' , Q' y R' , mientras que en la figura inferior derecha se transforma por una homotecia de razón $k = 1.5$ centrada en el origen en el triángulo de vértices P' , Q' y R' . Obsérvese que el triángulo transformado en la figura inferior izquierda es más pequeño (la mitad) que el original mientras que el transformado en la figura inferior derecha es más grande (un 50 % más) que el original. Los lados de los triángulos han cambiado su longitud en la misma proporción y se han mantenido los ángulos.



Sea $A_{C,k}$ la matriz de la homotecia $H_{C,k}$. El homólogo $\tilde{P}'(1, x', y')$ de un punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por una homotecia de razón k centrada al origen $O(0, 0)$, $H_{O,k}$, viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{O,k} \cdot \tilde{P}$$

dado que se verifica que $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$ y que no hay traslación puesto que el origen es un punto invariante. Obsérvese que el caso de una homotecia la matriz de la aplicación lineal asociada es la matriz identidad multiplicada por un número real $k > 0$ y que el vector de traslación es nulo (ver sec. 4.1.3).

Si se quiere realizar una homotecia respecto otro punto C distinto al origen primero hay que situar C al origen mediante una traslación de vector $\vec{h} = \overrightarrow{CO}$, realizar la homotecia respecto al origen, y deshacer la traslación previa (ver sec. 4.1.4), es decir,

$$\tilde{A}_{C,k} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O,k} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}}.$$

El único punto invariante por una homotecia es el centro C , excepto cuando $k = 1$ puesto que entonces todos se mantienen invariantes. Se comprueba fácilmente que la inversa de $H_{C,k}$ es $H_{C,1/k}$, es decir, otra homotecia de centro el mismo punto con factor inverso dado que (ver sec. 4.1.4)

$$\begin{aligned} \tilde{A}_{C,k} \cdot \tilde{A}_{C,1/k} &= \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O,k} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O,1/k} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} \\ &= \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{O,k} \cdot \tilde{I} \cdot \tilde{A}_{O,1/k} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{I} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} = \tilde{I} \end{aligned}$$

Un **cambio de escala** es como una homotecia con un factor distinto en cada eje ampliando o reduciendo la imagen respecto al centro considerado de forma distinta en cada eje. Para ello basta que la diagonal de la matriz de la aplicación lineal asociada tenga coeficientes positivos distintos. No vamos a considerar esta opción puesto que no es una semejanza.

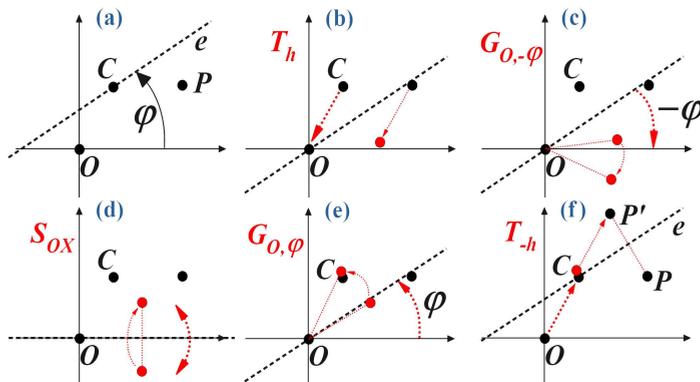
4.2.5. Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^2

Las ecuaciones que definen las semejanzas anteriores suelen ser más sencillas cuando se aplican al origen O o sobre el eje OX , y para obtener las ecuaciones fuera de estos casos se suelen utilizar productos de transformaciones ya conocidas más que calcular directamente dichas ecuaciones como se ha visto en las secciones anteriores.

Sea e un eje, C un punto y $\vec{h} = \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$ el vector que tiene origen en C y final en O . Sea φ un ángulo y $k > 0$ una razón cualesquiera fijados. A continuación se muestran algunos casos de producto (composición) de semejanzas utilizados habitualmente para realizar semejanzas con centro distinto al origen o eje de simetría distinto al eje OX . Recuérdese que la matriz del producto de transformaciones es el producto de las matrices de las transformaciones añadiendo las nuevas matrices por la izquierda (ver sec. 4.1.4).

1. $G_{C,\varphi} = T_{-\vec{h}} \cdot G_{O,\varphi} \cdot T_{\vec{h}}$, es decir, para realizar un giro alrededor de un punto cualquiera C , primero se traslada dicho punto al origen, luego se realiza el giro respecto al origen, y finalmente se deshace la traslación inicial (ver sec. 4.2.2).
2. $S_C = T_{-\vec{h}} \cdot S_O \cdot T_{\vec{h}}$, es decir, para realizar una simetría puntual con centro un punto cualquiera C , primero se traslada dicho punto al origen, luego se realiza la simetría respecto al origen, y finalmente se deshace la traslación inicial (ver sec. 4.2.2).

3. $S_e = T_{-\vec{h}} \cdot G_{O,\varphi} \cdot S_{OX} \cdot G_{O,-\varphi} \cdot T_{\vec{h}}$ donde C es un punto cualquiera del eje de simetría e y φ es el ángulo que tiene el eje e con el eje OX (ver (a) en la figura inferior). Es decir, para realizar una simetría respecto a un eje e cualquiera primero se sitúa dicho eje sobre el eje OX , luego se realiza la simetría axial sobre dicho eje (ver (d) en la figura inferior), y finalmente se deshacen por orden las transformaciones iniciales (ver (e) y (f) en la figura inferior). Para situar el eje e sobre el eje OX primero se traslada el eje e para que pase sobre el origen (ver (b) en la figura inferior) y luego se gira para ponerlo horizontal como el eje OX (ver (c) en la figura inferior). En la figura inferior se muestra esquemáticamente los productos de las transformaciones indicadas de izquierda a derecha y de arriba a abajo, un punto del plano P y su homólogo P' (ver sec. 4.2.3).



4. $H_{C,k} = T_{-\vec{h}} \cdot H_{O,k} \cdot T_{\vec{h}}$, es decir, para realizar una homotecia con centro un punto cualquiera C , primero se traslada dicho punto al origen, luego se realiza la homotecia respecto al origen, y finalmente se deshace la traslación inicial (ver sec. 4.2.4).

A continuación, se ven ejemplos prácticos de las distintas semejanzas estudiadas y de sus productos. También se incluye una transformación de cizallamiento como ejemplo de no semejanza.

4.3. EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL PLANO REAL

En esta sección se van a ver ejemplos de las transformaciones vistas en la sección 4.2. Se recuerda que para una figura plana en \mathbb{R}^2 de N puntos se utiliza un vector de vectores de puntos (una matriz) para su representación

donde cada columna corresponde a un punto en coordenadas homogéneas (ver ec. (3.5)),

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \end{pmatrix}.$$

Gracias a ello se pueden calcular las imágenes por una transformación afín de matriz \tilde{A} de todos los puntos que definen una figura con un único comando, $\tilde{P}' = \tilde{A} \cdot \tilde{P}$, que escribimos como sigue (adaptar el nombre de la matriz al que corresponda).

```
Ppt=At*Pt; % P-prima-tilde = A-tilde * P-tilde
```

Para las figuras planas el comando de representación gráfica utilizando coordenadas homogéneas es (ver sec. 3.2.1)

```
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)) % Pt=([1;x;y])
```

En caso de querer calcular sólo la imagen de un punto basta con tratarlo como si fuera una curva.

Todas las transformaciones comparten los comandos de cálculo de la transformación de la imagen y su representación gráfica que se enmarcan entre líneas como las siguientes. Se exceptúa la definición de la matriz de la transformación At que en cada caso varía.

```
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At= (...); Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
```

Aunque más adelante, en la sección 4.3.7, se indica cómo proceder para el producto de transformaciones genéricas, aquí se ha optado por presentarlo de forma más compacta en los productos habituales vistos en la sección 4.2.5. De este modo, para realizar una semejanza concreta basta con definir sus elementos esenciales en la línea marcada con `%... (VARIAR)` y tener definida la figura (o puntos) a transformar en Pt independientemente de si es una figura determinada por unos cuantos puntos o una parametrización de una curva.

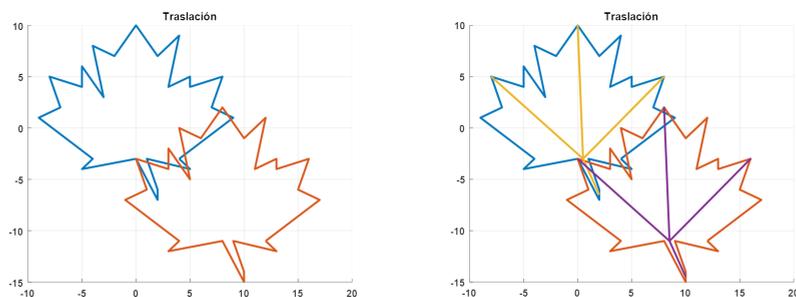
En cada uno de los ejemplos siguientes se obtiene la matriz de la transformación afín considerada que puede ser utilizada para calcular directamente la imagen de un punto dado.

4.3.1. Ejemplo de traslación

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se **traslada** 8 posiciones hacia la derecha y 8 hacia abajo, es decir, se traslada según el

vector $\vec{h} = (8, -8)$ (ver sec. 4.2.1). Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde se representa arriba a la izquierda la imagen original y abajo a la derecha la imagen trasladada. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt.

```
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los TRASLADADOS
h=[8;-8]; % Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=h % Matriz de traslación
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Traslacion')
```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* en Pt1 y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

```
Ppt1=At*Pt1; % Transformación de la figura
plot(Pt1(2,:),Pt1(3,:)), plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3,:))
```

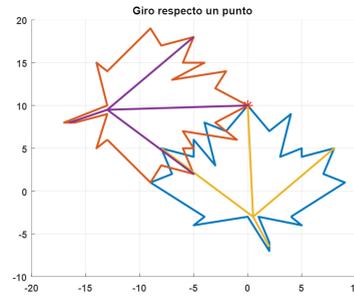
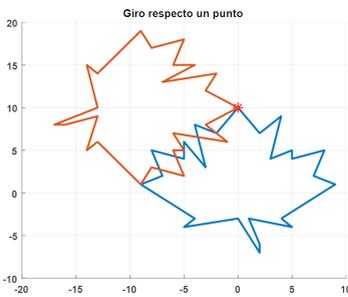
Para realizar cualquier otra traslación basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%...` (VARIAR).

4.3.2. Ejemplo de giro

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se **gira** 90° en sentido horario respecto el punto $C(0, 10)$, es decir, se gira $\varphi = -\pi/2$ radianes (ver sec. 4.2.2). Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde se representa abajo a la derecha la figura inicial, arriba a la izquierda la figura girada y en un asterisco el punto de giro.

Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt .

```
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=-pi/2;C=[0;10]; % Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
ACa=Ah1*AOa*Ah % Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on;axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')
```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* en $Pt1$ y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

```
Ppt1=At*Pt1; % Transformación de la figura
plot(Pt1(2,:),Pt1(3,:)),plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3,:))
```

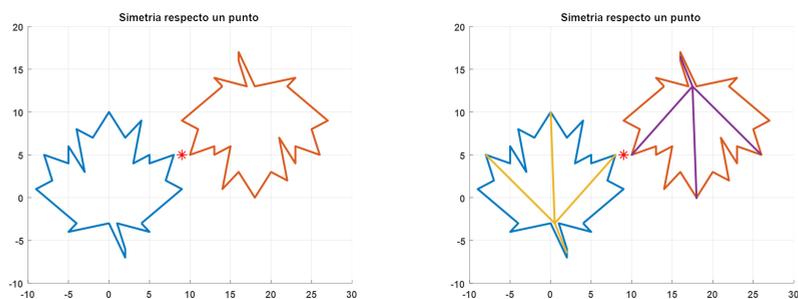
Para realizar cualquier otro giro basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%...` (*VARIAR*).

4.3.3. Ejemplo de simetría puntual

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se calcula su **simetría** respecto al punto $C(9,5)$ (ver sec. 4.2.2). Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde abajo a

la izquierda se encuentra la figura inicial, arriba a la derecha la figura simétrica y en un asterisco el punto sobre el que se realiza la simetría. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt.

```
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN PUNTO
C=[9;5]; % Centro de simetría (VARIAR)
Ah=eye(3); Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah; Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AO=diag([1,-1,-1]); % Matriz de simetría central
AC= Ah1*AO*Ah % Matriz de simetría puntual centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AC; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto un punto')
plot(C(1),C(2),'r*') % Centro C
```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* en Pt1 y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

```
Ppt1=At*Pt1; % Transformación de la figura
plot(Pt1(2,:),Pt1(3,:)),plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3,:))
```

Para realizar cualquier otra simetría puntual basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

4.3.4. Ejemplo de simetría axial

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se calcula su **simetría** respecto a la recta $e \equiv x + y = 10$ (ver sec. 4.2.3). Vamos a utilizar dos puntos distintos Q y R para definir la recta, por ejemplo, $Q(-1,11)$ y

$R(10, 0)$ que verifican su ecuación. Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde se observa la figura inicial abajo a la izquierda, la figura simétrica arriba a la derecha y un segmento de la recta de simetría al medio de ambas figuras. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt.

```
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[-1;11];R=[10;0]; % Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1)); % Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=Q; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOa1=eye(3); % Matriz de giro inversa
AOa1(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]); % Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ah1*AOa1*AOX*AOa*Ah % Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r') % Eje de simetría
```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* en Ppt1 y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

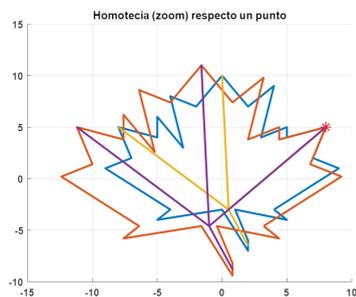
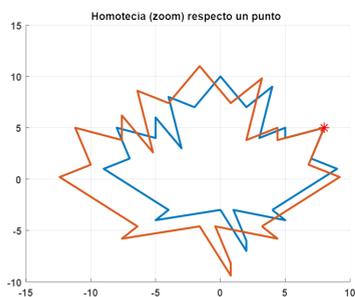
```
Ppt1=At*Ppt1; % Transformación de la figura
plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3,:)),plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3,:))
```

Para realizar cualquier otra simetría axial basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

4.3.5. Ejemplo de homotecia

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se realiza un aumento de un 20 % respecto el punto $C(8, 5)$, es decir, se realiza una **homotecia** de razón $k = 1.20$ con centro el punto C (ver sec. 4.2.4). Ello se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde la figura inicial es la más pequeña, la homotética la más grande y el asterisco es el punto sobre el que se realiza la homotecia. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt.

```
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los HOMOTÉTICOS
k=1.2;C=[8;5]; % Razón y centro homotecia (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOK=diag([1,k,k]); % Matriz de Homotecia O,k
ACK= Ah1*AOK*Ah % Matriz de Homotecia C,k
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACK; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on;axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Homotecia (zoom) respecto un punto')
plot(C(1),C(2),'r*') % Centro C
```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* en Pt1 y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

```
Ppt1=At*Pt1; % Transformación de la figura
plot(Pt1(2,:),Pt1(3:)),plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3:))
```

Para realizar cualquier otra homotecia basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%...` (VARIAR).

4.3.6. Ejemplo de cizallamiento o sesgado

En un cizallamiento o sesgado la imagen se deforma de modo distinto en diferentes zonas y permite simular distintas perspectivas. Esta transformación deforma la figura inicial y se incluye como ejemplo de no semejanza. Desplaza cada punto en la dirección de un eje e una longitud de razón proporcional $k \neq 0$ a su distancia a éste y se denotará $C_{e,k}$ con matriz $A_{e,k}$. Denotaremos $\tilde{P}'(1, x', y')$ el homólogo de un punto $\tilde{P}(1, x, y)$ por un **cizallamiento o sesgado** en el eje OX con razón $k \neq 0$. Éste viene dado por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & k \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = A_{OX,k} \cdot \tilde{P}.$$

Si el cizallamiento es respecto el eje OY , para algún $k \neq 0$ se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & k & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = A_{OY,k} \cdot \tilde{P}.$$

Se considera la figura de la hoja de la sección 3.3.1 y se calcula su cizallamiento con constante de proporcionalidad $k = 1$ respecto al eje $e \equiv x = y$. Vamos a utilizar dos puntos distintos Q y R para definir la recta, por ejemplo, $Q(-7, -7)$ y $R(7, 7)$ que verifican su ecuación. Téngase en cuenta que el orden en que se definen los puntos indica el sentido positivo del eje dado por \overrightarrow{QR} y, en consecuencia, el sentido del sesgado. Como la recta considerada no es ninguno de los dos ejes cartesianos, se procede igual que con una simetría axial (ver sec. 4.2.3). Primero se traslada el eje al origen, luego se gira para que coincida con el eje OX , se realiza el cizallamiento respecto el eje OX y, finalmente, se deshacen las transformaciones iniciales por orden, primero el giro y luego la traslación (ver sec. 4.2.5).

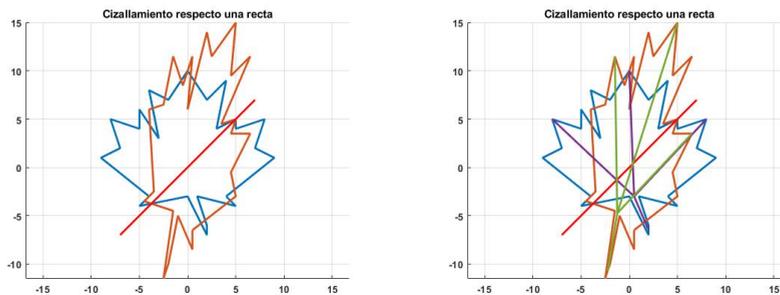
Los únicos puntos invariantes por un cizallamiento son los del eje. La transformación inversa es otro cizallamiento con los coeficientes no nulos fuera de la diagonal cambiados de signo en la misma posición de la matriz.

Un cizallamiento se consigue con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda en donde se observa que se deforma la figura (no se mantienen ángulos ni proporciones entre los lados) y, en consecuencia, se verifica que no es una semejanza. También se observa un cizallamiento positivo (hacia la parte positiva el eje OX en la parte superior del eje), y un cizallamiento negativo en la parte inferior de éste. Se incluye un segmento del eje de cizallamiento. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen la figura en Pt.

```

% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) el CIZALLAMIENTO POR UN EJE
Q=[-7;-7];R=[7;7];r=1;% Puntos eje y razón (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1));% Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q;% Matriz de traslación inicial
Ahl=Ah;Ahl(2:3,1)=Q;% Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3);% Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOal=eye(3);% Matriz de giro inversa
AOal(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
ACOX=diag([1,1,1]);ACOX(2,3)=1;% Matriz A_{OX,k}
Aek= Ahl*AOal*ACOX*AOa*Ah% Matriz de sesgado eje QR
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aek; Ppt=At*Pt;% Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:))% --
title('Cizallamiento respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r')% Eje QR

```



Si se quieren transformar de forma simultánea otras figuras basta aplicar la matriz de la transformación ya calculada a los nuevos puntos y representarlos como se realiza con los siguientes comandos. Se asumen ejecutados los comandos de la sección 3.3.1 que definen los *nervios* y se aplica la transformación a éstos obteniendo la figura superior derecha.

```

Ppt1=At*Pt1;% Transformación de la figura
plot(Pt1(2,:),Pt1(3:)),plot(Ppt1(2,:),Ppt1(3:))

```

Para realizar otro cizallamiento basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

4.3.7. Procedimiento para el producto de semejanzas

Ahora se va a considerar el **producto o composición de varias transformaciones** semejantes. Se asume definida la figura o puntos a transformar

en la variable P_t (P -tilde) y se colocarán sus homólogos por una transformación en la variable P_{pt} (P -prima-tilde). Para componer distintas transformaciones bastará con insertar el comando $P_t=P_{pt}$; entre ellas. A continuación se enumeran los pasos a seguir.

1. Definir la figura (o puntos a transformar) en la variable P_t .
2. Copiar y pegar los comandos de cada transformación considerada (ver secciones 4.3.1-4.3.5) cambiando únicamente la línea que define los parámetros indicada con `%... (VARIAR)`.
3. Intercalar entre las líneas de comandos de cada transformación el comando $P_t=P_{pt}$; para iniciar la siguiente transformación con la imagen transformada por la anterior.
4. Comentar los comandos `figure` que se quiera para que se represente gráficamente sobre una misma figura.

4.3.8. Ejemplo de producto de transformaciones afines

Supongamos que, a modo de ejemplo, se quiere dibujar el triángulo de vértices $(0, 0)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$ al que se quieren realizar las siguientes transformaciones:

1. Primero realizar un giro de 60° en sentido horario centrado en el origen.
2. Luego bajarlo verticalmente una unidad.
3. Finalmente hacer una simetría respecto a la recta $x = 1$.

En este caso los vértices del triángulo (repitiendo el primero para que se cierre la figura) son:

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{o bien, } \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Teniendo en cuenta los pasos indicados en la sección anterior se ejecutan los siguientes comandos. Se han utilizado, por orden, los comandos de las secciones 4.3.2, 4.3.1 y 4.3.4 modificando únicamente las líneas marcadas con `%... (VARIAR)`.

```

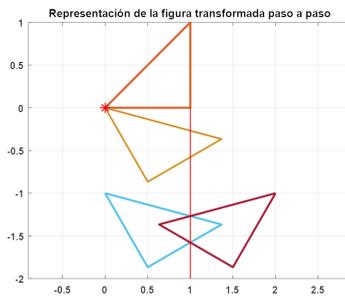
% DEFINICIÓN DE LA FIGURA
% Puntos columna [x;y] (por filas y trasponer)
P=[0,0; 1,0; 1,1; 0,0]'; % P (VARIAR)
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P; % Pt
figure,hold on;axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:))
%
% PRIMERA TRANSFORMACIÓN: GIRO
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=-pi/3;C=[0;0]; % Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
ACa=Ah1*AOa*Ah % Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
%figure,hold on;axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')
%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%
% SEGUNDA TRANSFORMACIÓN: TRASLACIÓN
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los TRASLADADOS
h=[0;-1]; % Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=h % Matriz de traslación
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
%figure,hold on;axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Traslación')
%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%
% TERCERA TRANSFORMACIÓN: SIMETRÍA AXIAL
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[1;0]; R=[1;-2]; % Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1)); % Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=Q; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];

```

```

AOa1=eye(3); % Matriz de giro inversa
AOa1(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]); % Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ah1*AOa1*AOX*AOa*Ah % Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
%figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r') % Eje de simetría
%
title('Representación de la figura transformada paso a paso')

```



El triángulo superior es el inicial, el inmediatamente inferior es el girado 60° en sentido horario ($-\pi/3$ radianes) respecto el punto marcado con un asterisco. El triángulo de abajo a la izquierda es el anterior trasladado una unidad vertical negativa, y el de la derecha el simétrico del de la izquierda respecto la recta vertical dibujada.

La matriz A de la transformación producto considerada es el producto de las matrices de cada transformación $A_e \cdot A_h \cdot A_{Q,a}$ por orden de derecha a izquierda, donde $A_{Q,a}$ es la matriz del giro (primera transformación), A_h es la matriz de la traslación (segunda transformación), y A_e es la matriz de la simetría axial (tercera transformación). Estas matrices se han mostrado en los resultados a los comandos anteriores obteniendo que

$$\begin{aligned}
 A &= A_e \cdot A_h \cdot A_{Q,a} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & -0 \\ 0 & -0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0.866 \\ 0 & -0.866 & 0.5 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & -0.5 & -0.866 \\ -1 & -0.866 & 0.5 \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

4.3.9. Ejemplo de determinación de una transformación a partir de tres puntos

Ahora se va a determinar la transformación afín anterior que obtiene directamente el último triángulo a partir del primero, es decir, la que transforma los puntos no alineados $P = (0, 0)$, $Q = (1, 0)$, $R = (1, 1)$ (vértices del primer triángulo), en sus imágenes $P' = (2, -1)$, $Q' = (3/2, -2521/1351)$, $R' = (1351/2131, -780/571)$ (vértices del último triángulo). Se definen en coordenadas homogéneas los puntos anteriores, $\tilde{P} = (1, 0, 0)$, $\tilde{Q} = (1, 1, 0)$, $\tilde{R} = (1, 1, 1)$, $\tilde{P}' = (1, 2, -1)$, $\tilde{Q}' = (1, 3/2, -2521/1351)$, $\tilde{R}' = (1, 1351/2131, -780/571)$, y se quiere

$$\text{encontrar } \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ e & a & b \\ f & c & d \end{pmatrix} \text{ tal que } \begin{cases} \tilde{A} \cdot \tilde{P} = \tilde{P}' \\ \tilde{A} \cdot \tilde{Q} = \tilde{Q}' \\ \tilde{A} \cdot \tilde{R} = \tilde{R}' \end{cases} . \quad (4.3)$$

A partir de la sección 4.1.5 sabemos que existe una solución única para los coeficientes de la matriz \tilde{A} puesto que los puntos no están alineados. Para determinarlos ponemos en Pt los puntos \tilde{P} , \tilde{Q} y \tilde{R} en columnas (una a continuación de otra), en Ppt los puntos \tilde{P}' , \tilde{Q}' y \tilde{R}' y resolvemos el sistema anterior (ec. (4.3)) con los siguientes comandos. Por comodidad, las coordenadas de los puntos se entran por filas y luego se traspone.

```
% TRES puntos (no alineados) en P e imágenes en Pp
P=[0,0;1,0;1,1]' % (VARIAR)
Pp=[2,-1;3/2,-2521/1351;1351/2131,-780/571]' % (VARIAR)
[n1,n2]=size(P); Pt=ones(n1+1,n2); Pt(2:n1+1,:)=P; % Pt
Ppt=Pt; Ppt(2:n1+1,:)=Pp; % Ppt
% CÁLCULO de At (A-tilde):
syms a b c d e f; At=[1 0 0; e a b; f c d];
[a,b,c,d,e,f]=solve(At*Pt==Ppt, a,b,c,d,e,f);
At=eval(At)
```

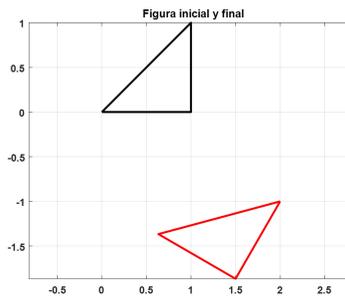
Con `eval(At)` se verifica que se obtiene de forma directa la matriz A producto de las transformaciones de la sección anterior:

```
At =
    1.0000         0         0
    2.0000   -0.5000   -0.8660
   -1.0000   -0.8660    0.5000
```

Seguidamente se aplica la transformación obtenida a la figura inicial con los siguientes comandos.

```
% FIGURA INICIAL: ((x,y) por fila y se traspone)
P=[0,0; 1,0; 1,1; 0,0]' % P (VARIAR)
```

```
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;% Pt
%
Ppt=At*Pt;% TRANSFORMACIÓN por At
%
% REPRESENTACIÓN GRÁFICA:
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:),'k',Ppt(2,:),Ppt(3,:),'r')
title('Figura inicial y final')
```



Como se puede observar comparando esta última figura con la de la sección 4.3.8, el triángulo inicial (el superior) y el final (el inferior) coinciden.

También se dispone del comando `fitgeotrans` para ajustar una transformación geométrica a partir de puntos y de `imwarp` para aplicar una transformación geométrica a una imagen digital. Consultar la ayuda para más información. También se dispone del comando `affine2d` para definir una transformación geométrica a partir de la matriz de una transformación afín.

4.4. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección A.4.

4.4.1. Ejercicios propuestos

P4.1 Aplica un *zoom* al 200% centrado al punto $(10, 0)$ y luego una simetría axial sobre el eje $x - y = 20$ a la espiral de Arquímedes de la sección 3.3.7. Dibuja las tres figuras conjuntamente y explica el comportamiento de las transformaciones realizadas. ¿Es Arquimediana la última espiral obtenida?

Indicación: Se puede justificar a partir del dibujo y también de observar si únicamente se han aplicado isometrías.

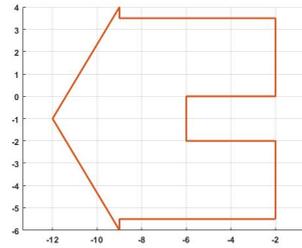
P4.2 Aplica una simetría puntual respecto $(1, 1)$ a la cardiode de la sección 3.3.8 y justifica su comportamiento.

Indicación: Utiliza los comandos que la definen discretizada en $(r3, t)$ en coordenadas polares. Utiliza la ecuación (3.3)(b) para obtener las coordenadas cartesianas (x, y) y definir el vector Pt . Aplica la transformación a Pt .

P4.3 Considera dentro de la variable Pt la “casita” dibujada en el ejercicio P3.1 y hazla girar hacia la derecha sobre su centro como si fuera una rueda. La “casita” inicial está en el intervalo $[0, 10]$ sobre el eje OX . Dibuja 4 instantáneas siguientes de su movimiento.

P4.4 Supón que el comecocos del ejercicio P3.2 se está moviendo por un pasillo en dirección vertical hacia arriba situado entre las rectas $x = 20$ y $x = 30$. Dibújalo en ese pasillo centrado en el punto $(25, 8)$ aplicando las trasformaciones geométricas adecuadas al del ejercicio P3.2 que se asume definido en Pt .

P4.5 Determina la matriz de la transformación afín que transforma directamente la “casita” ejemplo del ejercicio P3.1 en la de la imagen adjunta.



4.4.2. Ejercicios de autoevaluación

T4.1 Si se realiza un giro de 135° en sentido antihorario centrado en el punto $(2, -3)$, el punto $(1, -1)$ se transforma en el punto:

- (a) $(1.2929, -5.1213)$.
- (b) $(4.1213, -3.7071)$.
- (c) $(3.1728, -4.9038)$.
- (d) $(2.8194, -5.0805)$.

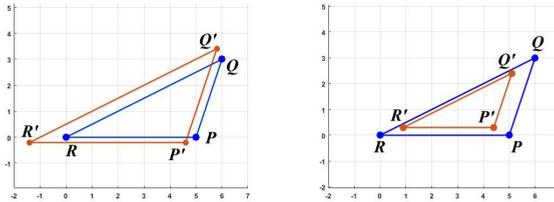
T4.2 Al realizar una simetría respecto la recta $x - 2y = 1$, el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 1)$ se convierte en el segmento que une los puntos:

- (a) $(1.6, -0.8)$ y $(3.6, -1.8)$.
- (b) $(-1.2, 1.2)$ y $(0.4, -1.4)$.
- (c) $(0.4, -0.8)$ y $(0.0, -3.0)$.
- (d) $(-2.0, 0.0)$ y $(1.0, 0.0)$.

T4.3 Si primero se realiza un zoom al 80% respecto al punto $(2, 5)$ y seguidamente un giro de 45° en sentido antihorario respecto el punto $(1, -1)$, el segmento que une los puntos $(0, 0)$ y $(-2, 1)$ se convierte en el segmento que une los puntos:

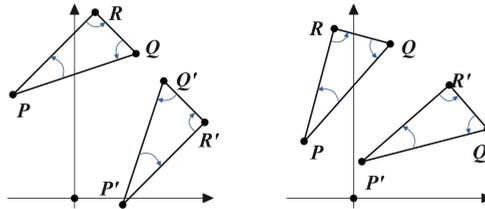
- (a) $(1.9899, 0.8385)$ y $(1.4243, 2.5355)$.
- (b) $(0.0686, 0.2000)$ y $(-1.6284, -0.3657)$.
- (c) Ninguna de las otras.
- (d) $(-0.8385, -0.0101)$ y $(-2.5355, -0.5757)$.

T4.4 Al triángulo T de vértices P, Q, R se le aplica una transformación F en la figura de la izquierda y una G a la derecha, ambas de centro C , obteniendo el triángulo transformado de vértices P', Q', R' . Señala la respuesta correcta.



- (a) F y G son homotecias. C está dentro de T en F y fuera de T en G .
- (b) F y G son homotecias. C está fuera de T en F y dentro de T en G .
- (c) F y G son simetrías puntuales. C está dentro de T en F y fuera de T en G .
- (d) F y G son simetrías puntuales. C está fuera de T en F y dentro de T en G .

T4.5 Al triángulo de vértices P, Q, R se le aplica una transformación F en la figura de la izquierda y una transformación G a la derecha obteniendo el triángulo transformado de vértices P', Q', R' . Indica cuál de las siguientes afirmaciones puede ser cierta.



- (a) F un giro y G una simetría.
- (b) F una simetría y G un giro.
- (c) F una simetría axial y G una simetría puntual.
- (d) F una simetría puntual y G una simetría axial.

T4.6 Indica cuál es la matriz \tilde{A} de las siguientes opciones que realiza directamente las siguientes transformaciones: primero una simetría respecto a la recta $x + y = 2$, luego un giro de 90° en sentido horario respecto al punto $(2, 2)$ y finalmente una simetría respecto al punto $(2, 1.5)$.

- (a) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- (b) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & -1 & 0 \\ -8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (c) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 16 & -1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
- (d) $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -16 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

T4.7 Se considera el rectángulo con lados paralelos a los ejes coordenados del cual se conocen tres vértices, $V_1(-1, 5)$, $V_2(-1, -1)$ y $V_3(3, -1)$. Si el vértice desconocido se traslada al punto $S(2, 3)$ y se realiza una simetría respecto la bisectriz del segundo y cuarto cuadrante se obtiene otro rectángulo con tres de los vértices iguales a los siguientes. Señala la respuesta correcta.

- (a) $(-6, -5)$, $(0, -1)$ y $(0, -5)$.
- (b) $(2, 3)$, $(-2, 3)$ y $(-2, -3)$.
- (c) $(3, 2)$, $(-3, -2)$ y $(3, -2)$.
- (d) $(-1, 0)$, $(-5, 0)$ y $(-5, -6)$.

T4.8 La transformación F que verifica que $F(0, 0) = (2, -1)$, $F(1, 0) = (3, -2)$ y $F(1, 1) = (0.5, 1.5)$ transforma el punto $(6, 4)$ en:

- (a) $(7, 2)$.
- (b) $(-7, -2)$.
- (c) Ninguna de las otras.
- (d) $(-2, 7)$.

T4.9 La matriz inversa de un giro de 90° en sentido antihorario de centro $(2, 0)$ es:

- (a) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$
- (b) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
- (c) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.8961 & -0.4481 & -0.8940 \\ -1.7880 & 0.8940 & -0.4481 \end{pmatrix}$
- (d) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2.8961 & -0.4481 & 0.8940 \\ 1.7880 & -0.8940 & -0.4481 \end{pmatrix}$

T4.10 Una simetría respecto la recta $x + y = 1$ transforma la circunferencia unidad en:

- (a) Una elipse de centro $(1, 1)$ y semiejes 1 en horizontal y 0.8 en vertical.
- (b) Una elipse de centro $(1, -1)$ y semiejes 0.8 en horizontal y 1 en vertical.
- (c) Una circunferencia de centro $(1, 1)$ y radio 1.
- (d) Ninguna de las otras.

Capítulo 5

Curvas y superficies en el espacio euclídeo

En lo que sigue se utiliza notación clásica en geometría. En este capítulo se revisan las coordenadas, parametrizaciones y representaciones gráficas de curvas y superficies en el espacio. Aunque lo habitual es utilizar coordenadas cartesianas $P(x, y, z)$ para un punto en el espacio se van a utilizar coordenadas homogéneas $P(1, x, y, z)$, en vistas al capítulo siguiente de transformaciones geométricas.

En primer lugar se verán distintas coordenadas del espacio y seguidamente curvas y superficies. Se incluye un número importante de ejemplos junto con los comandos necesarios para su representación. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección A.5 se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

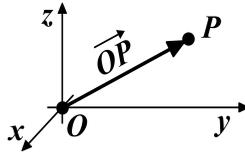
5.1. COORDENADAS EN \mathbb{R}^3

5.1.1. Coordenadas cartesianas

Por defecto en \mathbb{R}^3 se utilizan las **coordenadas cartesianas** en donde cada punto P queda determinado por sus valores x, y, z en cada eje ordenado OX, OY, OZ respectivamente y que denotaremos $P(x, y, z)$. Recuerdese que O es el **origen**, es decir, $O(0, 0, 0)$. En espacio afín se identifican los **puntos** P con sus **vectores posición** \overrightarrow{OP} (ver imagen inferior), es decir,

$$P(x, y, z) \equiv \overrightarrow{OP} = (x, y, z) - (0, 0, 0) = (x, y, z).$$

De este modo, a las operaciones con puntos se les puede dar un sentido vectorial.



Los vectores son siempre matrices de una columna (ver sec. 2.1.1), aunque a veces se escriban como matriz fila por comodidad (es un abuso habitual de la notación).

5.1.2. Coordenadas homogéneas

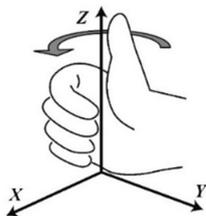
Dado un punto P de coordenadas cartesianas (x, y, z) en \mathbb{R}^3 , se llaman **coordenadas homogéneas** de dicho punto a la cuaterna $(\mu, \mu \cdot x, \mu \cdot y, \mu \cdot z)$ para algún $\mu \neq 0$ que representa un factor de escala. Habitualmente se elige $\mu = 1$ como también haremos nosotros. En algunas notaciones, en vez de poner μ al principio de la cuaterna de coordenadas homogéneas, se pone al final. Utilizaremos esta formulación para las transformaciones usando vectores con cuatro coordenadas de la forma $\tilde{P}(1, x, y, z)$ que corresponde al punto $P(x, y, z)$, es decir,

$$\tilde{P}(1, x, y, z) = P(x, y, z).$$

5.1.3. Coordenadas cilíndricas

Las coordenadas cilíndricas se pueden considerar como una generalización al espacio tridimensional de las coordenadas polares. Éstas son útiles cuando se tiene simetría de rotación respecto a un eje, por ejemplo, una porción de cilindro o un muelle circular. Habitualmente se utilizan coordenadas polares en el plano XY y el valor en el eje OZ se deja invariable, pero se podrían intercambiar los ejes teniendo presente la **regla de la mano derecha** para definir el sentido positivo del eje de rotación al girar en el sentido positivo del eje, el resto de dedos marca el sentido positivo de giro (ver figura inferior izquierda). El sentido positivo del eje queda fijado por el sentido del vector director del eje que, en este caso, es $(0, 0, 1)$. Por convención, los ángulos de rotación positivos producen rotaciones en sentido antihorario (en contra de las manecillas del reloj) sobre el eje de rotación si se observa el giro desde la parte positiva del eje. Otra forma de determinar la dirección de un giro positivo es mediante la **regla del sacacorchos** que indica que, si

se introduce un sacacorchos desde la parte positiva del eje, el sentido positivo viene dado por el sentido de giro en que se extrae el sacacorchos del tapón (véase la imagen inferior derecha).



Sea $\overrightarrow{OP'} = (x, y, 0)$ la proyección ortogonal sobre el plano XY del vector $\overrightarrow{OP} = (x, y, z)$ que tiene su inicio en el origen O y finaliza en el punto $P(x, y, z)$ (ver la figura inferior). Un punto del espacio $P(x, y, z)$ queda definido de forma única por su distancia r al eje OZ , por el ángulo θ del vector $\overrightarrow{OP'}$ respecto al semieje OX positivo y por la altura z respecto al plano XY . A estos valores (r, θ, z) se les llama **coordenadas cilíndricas**.

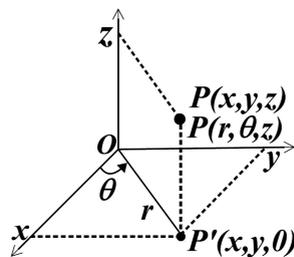
Por construcción, el rango de valores posibles para las coordenadas cilíndricas es

$$(r, \theta, z) \quad \text{con} \quad r \in [0, +\infty[, \quad \theta \in [0, 2\pi[, \quad z \in]-\infty, +\infty[$$

aunque a veces se considera el intervalo $]-\pi, \pi]$ para θ . Utilizando las relaciones trigonométricas de un triángulo rectángulo se tiene que las ecuaciones que definen el cambio de coordenadas de cilíndricas a cartesianas y recíprocamente, y su representación gráfica son, respectivamente, los siguientes:

$$(x, y, z) \equiv \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases} \quad (5.1)$$

$$(r, \theta, z) \equiv \begin{cases} r = \sqrt{x^2 + y^2} \\ \theta = \arctan \frac{y}{x} \\ z = z \end{cases} \quad (5.2)$$



Al igual que en caso de las coordenadas polares en el plano, para evaluar la función $\arctan(y/x)$ se debe utilizar el comando $\text{atan2}(y, x)$ (ver sec. 3.1.3).

5.1.4. Coordenadas esféricas

Las coordenadas esféricas están indicadas cuando se tiene simetría de rotación respecto a un punto como, por ejemplo, una esfera o una cuña esférica.

5.2. PARAMETRIZACIONES EN \mathbb{R}^3

5.2.1. Curva paramétrica

Una **curva regular** en \mathbb{R}^3 se puede decir que es, de forma intuitiva, un subconjunto en \mathbb{R}^3 donde en cada punto podemos encontrar una porción de segmento a su alrededor que ha sido *deformado de forma suave*.

Se dice que la **curva** está en forma **paramétrica** cuando sus puntos (x, y, z) se pueden poner en función $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$ de un parámetro t en un cierto intervalo $I = [a, b]$,

$$C = \{(x(t), y(t), z(t)), t \in I = [a, b]\}.$$

Cuando $\vec{f}(t)$ es derivable en $]a, b[$ y no nulo se tiene que es una **curva regular** y el vector de las derivadas de sus funciones componentes $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ es un **vector tangente** a cada punto $\vec{f}(t)$. Una curva regular no presenta esquinas ni ángulos y se define como aquélla que en todos sus puntos presenta un único vector tangente no nulo.

Una **curva** regular C también puede definirse de forma **implícita** cuando se dan dos relaciones F y G (*diferenciables y localmente independientes*) entre las coordenadas, i.e.,

$$C = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0, G(x, y, z) = 0\}.$$

Se dice que una curva es **regular a trozos** cuando está formada por diferentes partes que son curvas regulares.

Por defecto, cuando se representan dos puntos éstos se unen mediante la línea recta (ver sec. 1.5.1), por ello, para representar una línea curva *suave* se suelen utilizar muchos puntos unidos por pequeñas líneas rectas. Para representar en \mathbb{R}^3 una figura curva dada por la unión de una sucesión de puntos $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), \dots, (x_n, y_n, z_n)$ basta con colocar en X todas las abscisas, $X = [x_1, x_2, \dots, x_n]$, en Y todas las ordenadas, $Y = [y_1, y_2, \dots, y_n]$, en Z todas las alturas, $Z = [z_1, z_2, \dots, z_n]$ y, a continuación, ejecutar el comando `plot3(X, Y, Z)` (ver sec. 1.6.1). Obviamente, si se quiere cerrar una figura delimitada por segmentos, el punto inicial debe coincidir con el punto final, es decir, $(x_1, y_1, z_1) = (x_n, y_n, z_n)$.

Al igual que en el plano real (ver sec. 3.2.1), pondremos en P (variable \mathbb{P}) los puntos que definen la curva, cada punto en una columna, mientras que \tilde{P} (variable $\mathbb{P}t$) será igual que P pero con un 1 en una fila superior añadida (en coordenadas homogéneas, ver sección 5.1.2) como sigue:

$$P = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots \\ z_1 & z_2 & \cdots \end{pmatrix}, \quad \tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots \\ x_1 & x_2 & \cdots \\ y_1 & y_2 & \cdots \\ z_1 & z_2 & \cdots \end{pmatrix}. \quad (5.5)$$

Para representar figuras dadas por puntos que definen una curva (ver. ec. (5.5)) se utilizará el comando siguiente.

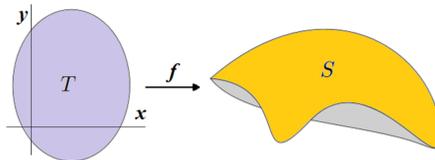
```
plot3 (Pt (2, :), Pt (3, :), Pt (4, :))
```

Existen otras opciones como el comando `fplot3` para representar curvas parametrizadas en el espacio (ver sec. 1.6.1).

5.2.2. Superficie paramétrica

Una **superficie regular** en \mathbb{R}^3 se puede decir que es, de forma intuitiva, un subconjunto en \mathbb{R}^3 donde en cada punto podemos encontrar una porción de plano a su alrededor que ha sido *deformada de forma suave*. Obviamente, una superficie regular no presenta esquinas ni ángulos y se define como aquella que en todos sus puntos presenta dos (únicos) *vectores tangentes linealmente independientes*. Por lo general, dada una función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ diferenciable en un cierto dominio *sencillo* (*simplemente conexo*, que no tiene partes separadas ni agujeros) T de \mathbb{R}^2 , puede definirse una **superficie** S de forma **explícita** como el conjunto de puntos $(x, y, f(x, y))$ donde (x, y) pertenece a T , es decir,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : (x, y) \in T, z = f(x, y)\}.$$



Se dice que una **superficie** es **regular a trozos** cuando está formada por diferentes partes que son superficies regulares. Se dice que una **superficie** está dada de forma **implícita** cuando se tiene una relación F diferenciable entre las variables,

$$S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : F(x, y, z) = 0\}.$$

Finalmente se dice que la **superficie** está en forma **paramétrica** cuando los puntos de la superficie (x, y, z) se pueden poner en función (*diferenciable*) $\vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ de dos parámetros independientes u, v , en un cierto dominio T *sencillo* (*simplemente conexo*),

$$S = \{(x(u, v), y(u, v), z(u, v)), (u, v) \in T\}.$$

Esta última forma es la que da más flexibilidad para representar superficies en el espacio. Además, si la superficie es regular, existen las derivadas de las funciones componentes $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ respecto a cada uno de los parámetros u, v , y generan dos **vectores tangentes** *linealmente independientes* a cada punto de la superficie:

$$\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u, v) = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right).$$

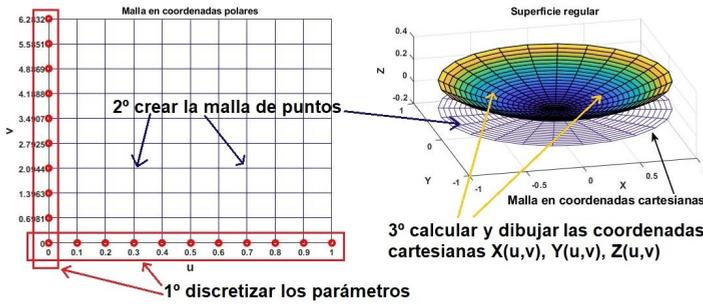
Obsérvese que si una superficie está dada en forma explícita $z = f(x, y)$ entonces se puede considerar una superficie parametrizada con $x = u$ e $y = v$, es decir, de la forma $(u, v, f(u, v))$.

Como una superficie regular es localmente bidimensional (en un entorno pequeño), se necesita una malla bidimensional para poder representarla en el espacio mediante una deformación *localmente suave* de dicha malla. Es por ello que inicialmente se suele definir una malla en el dominio *sencillo* T en donde toman valores los parámetros y, seguidamente, se procede a deformar la malla y a representarla en el espacio. Los puntos de la superficie se denotarán

$$\tilde{P}(i, j) = \begin{pmatrix} 1 \\ X(i, j) \\ Y(i, j) \\ Z(i, j) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_2, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (5.6)$$

donde n_1 es el número de puntos tomados en la discretización del primer parámetro, y n_2 en el segundo parámetro. Más concretamente, para representar una superficie regular utilizando una parametrización se realizan los siguientes pasos resumidos en la figura inferior:

1. Definir el dominio de los parámetros $(u, v) \in [a, b] \times [c, d]$.
2. Crear una malla sobre el dominio de los parámetros. Para ello primero se discretiza por separado el dominio de u (con n_1 puntos), y el de v (con n_2 puntos), y a partir de dichas discretizaciones, se crea la malla bidimensional (de tamaño $n_2 \times n_1$).
3. Definir la parametrización de la superficie regular $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$ y proyectar la malla en el espacio utilizando la parametrización.



Para representar figuras dadas por puntos que definen una superficie (ver ec. (5.6)) se utilizará el comando siguiente dado que se tiene una malla $n_2 \times n_1 \times 4$ en \tilde{P} .

```
surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4))
```

Existe otra forma de representar de forma aproximada una superficie mediante una nube de puntos sobre ella distribuidos de forma más o menos aleatoria como se muestra en la sección 5.3.7.

Existen otras opciones como el comando `fsurf` para representar superficies parametrizadas en el espacio (ver sec. 1.6.2).

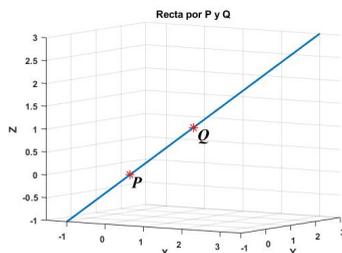
5.3. FIGURAS EN EL ESPACIO REAL

5.3.1. Ejemplo de representación de una recta

La parametrización de una curva en 3 dimensiones es prácticamente igual que en 2 dimensiones (ver sec. 3.3.5). A continuación se va a dibujar la **recta** bisectriz del primer octante que pasa por los puntos $P(0,0,0)$ y $Q(1,1,1)$. Aunque para dibujar un trozo de recta basta con el punto inicial y el final, ahora se va a dibujar una discretización de puntos sobre la recta con los siguientes comandos. Para dibujar otras rectas o segmentos basta con modificar la línea marcada con `%...` (**VARIAR**). El punto P se elige como centro y se dibuja t_{\min} y t_{\max} veces el segmento \overline{PQ} desde P como se observa en la figura inferior.

```
% RECTA paramétrica (t=parámetro)
P=[0;0;0], Q=[1;1;1], tmin=-1, tmax=3, N=201 % (VARIAR)
t=linspace(tmin, tmax, N); % N valores de t
X=P(1)+t*(Q(1)-P(1)); % X(t)
Y=P(2)+t*(Q(2)-P(2)); % Y(t)
Z=P(3)+t*(Q(3)-P(3)); % Z(t)
% Definición de Pt(1,x,y,z) (P-tilde)
n2=length(t); Pt=ones(3, n2); Pt(2:4, :)=[X; Y; Z];
```

```
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)),title('Recta por P y Q')
plot3([P(1),Q(1)], [P(2),Q(2)], [P(3),Q(3)], '*r')
```



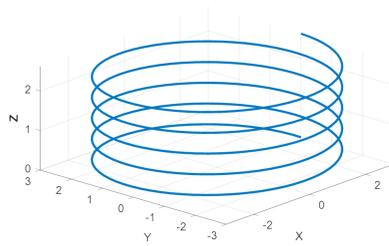
5.3.2. Ejemplo de curva parametrizada

Se quiere dibujar un muelle en vertical alrededor del eje OZ de diámetro 6 unidades. Como se tiene simetría respecto a su eje se utiliza representación polar en plano XY , es decir, coordenadas cilíndricas (ver ec. (5.1)):

$$\begin{cases} x = 3 \cos t \\ y = 3 \operatorname{sen} t \\ z = t/12 \end{cases}, t \in [0, 10\pi].$$

Para representar la curva se calculan muchos puntos de ésta y se unen con pequeños segmentos siguiendo los pasos indicados en la sección 5.2.1. Primero se discretiza el parámetro t y seguidamente se evalúan y representan gráficamente los puntos $(1, x(t), y(t), z(t))$ de la curva dados en coordenadas homogéneas (ver sec. 5.1.2). Para ello se ejecutan los comandos siguientes y se obtiene la figura inferior. Se han obtenido 5 vueltas en el muelle puesto que el rango del parámetro t (ángulo) es $[0, 5 \cdot 2\pi]$. Nótese que para definir las coordenadas cartesianas en una parametrización se deben utilizar operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5).

```
% CURVA paramétrica en Pt(1,X,Y,Z) (P-tilde): MUELLE
R=3;a=0;b=10*pi;% Datos iniciales (VARIAR)
N=555;t=linspace(a,b,N);% Parámetro t en [a,b]
X=R.*cos(t);% X(t) (VARIAR)
Y=R.*sin(t);% Y(t) (VARIAR)
Z=t./12;% Z(t) (VARIAR)
Pt=ones(3,N);Pt(2,:)=X;Pt(3,:)=Y;Pt(4,:)=Z;
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))
```



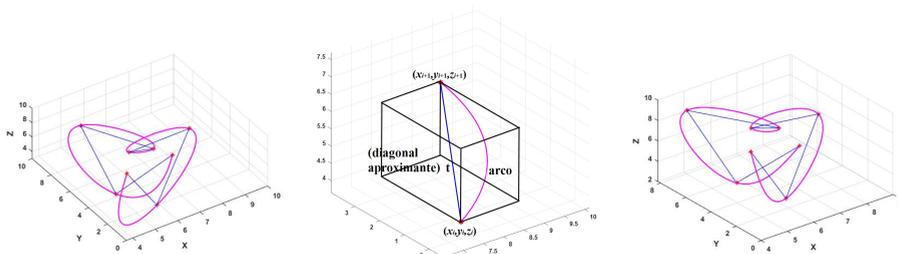
Para dibujar otras curvas parametrizadas basta con modificar las líneas marcadas con `%...` (**VARIAR**) que se corresponden con los datos iniciales y con la definición de las parametrizaciones. Ahora bien, X , Y y Z son vectores con las coordenadas cartesianas de los puntos de la curva y deben tener las mismas dimensiones. Si, por ejemplo, la curva se encontrara en el plano $z = 1$, no se puede poner $Z=1$ puesto que da error, se debe poner, por ejemplo, $Z=1+0*U$ manteniendo las dimensiones adecuadas en la variable Z .

5.3.3. Ejemplo de trayectoria delimitada por puntos

Se busca una curva parametrizada *suave* (regular) que pase por N puntos del espacio fijados. Como en el caso del plano (ver sec. 3.3.9), se obtiene una parametrización utilizando una aproximación t a la *longitud de arco* con los siguientes comandos obteniendo la figura inferior izquierda. El valor de t utilizado viene dado por la diagonal del paralelepípedo en tres dimensiones (ver figura inferior central) que definen dos puntos consecutivos (x_i, y_i, z_i) y $(x_{i+1}, y_{i+1}, z_{i+1})$, es decir, $t = \sqrt{(x_{i+1} - x_i)^2 + (y_{i+1} - y_i)^2 + (z_{i+1} - z_i)^2}$, $i = 1, \dots, N-1$. El comando `diff` calcula la diferencia entre dos componentes consecutivas cuando se aplica a un vector y permite simplificar el cálculo del valor de t . El comando `cumsum` realiza una suma acumulada de las componentes del vector que es una aproximación a la longitud total acumulada hasta el valor de t considerado. El comando `interp1` permite obtener los valores (*interpolados*) de las coordenadas de los puntos intermedios de la parametrización. En el ejemplo considerado a continuación se eligen al azar entre 0 y 10 con un decimal las coordenadas de los puntos a interpolar (ver sec. 1.2.1). Cada vez que se ejecuta el comando aparece un resultado distinto puesto que los valores de x, y, z varían. Para verificar que la curva obtenida es adecuada también se representan los puntos con un asterisco unidos entre sí por segmentos en el orden a seguir por la curva.

```
N=8; % N=núm. de puntos
P=floor(rand(3,N)*100.9999)/10 % Puntos (VARIAR)
x=P(1,:);y=P(2,:);z=P(3,:);
t=sqrt(diff(x).^2+diff(y).^2+diff(z).^2);t=[0,cumsum(t)];
```

```
tt=linspace(t(1),t(N),300); xx=interp1(t,x,tt,'spline');
yy=interp1(t,y,tt,'spline'); zz=interp1(t,z,tt,'spline');
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot3(x,y,z,'r*','x,y,z','b'), plot3(xx,yy,zz,'m')
```

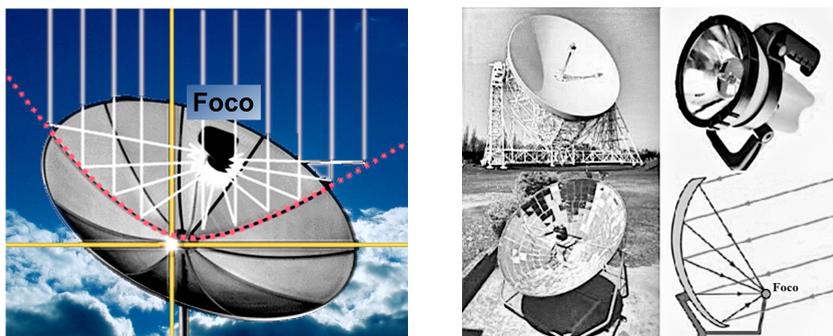


Se obtiene una interpolación similar a la curva anterior utilizando el comando `cscvn` como se puede ver en la figura superior derecha. Este comando devuelve una estructura con los coeficientes de los trozos de splines y los puntos de corte y se puede dibujar con el comando `fnplt`.

```
figure,plot3(x,y,z,'r*','x,y,z','b'), grid on, hold on
curva=cscvn([x;y;z]); fnplt(curva,'m',1.5)
```

5.3.4. Ejemplo de superficie paramétrica

Las antenas parabólicas tienen la propiedad de que todas las ondas que reciben paralelas a su eje principal rebotan sobre su superficie y se proyectan sobre el foco en donde se concentran. Allí se coloca un receptor como se observa en la figura inferior en donde también se muestran algunas aplicaciones.



Una **superficie de revolución** es aquella que se obtiene al girar una curva alrededor de un eje (ambos en un mismo plano). Una **antena parabólica** viene dada por un **paraboloide** definido mediante la rotación de una parábola respecto a su eje por lo que es una superficie de revolución. Gracias

a la simetría que poseen respecto a su eje suele ser adecuado representarlas utilizando coordenadas cilíndricas (ver sec. 5.1.3). Por defecto se asumirá que el eje de simetría es el eje OZ aunque se puede variar. En este caso la coordenada z viene dada en función del radio r o distancia al eje OZ (si no fuese así, no sería una superficie de revolución).

Por ejemplo, $z = (x^2 + y^2)/4$ es un paraboloides en coordenadas cartesianas que tiene como eje el eje OZ y que, en coordenadas cilíndricas (ver sec. 5.1.3), se puede escribir un trozo de él como

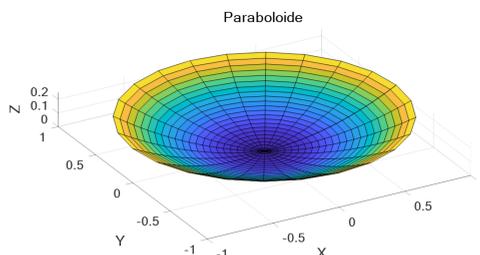
$$z = r^2/4, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Por tanto, tomando $u = r$ y $v = \theta$ en este caso, la parametrización $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ viene dada por

$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \sin v \\ z = u^2/4 \end{cases}, \quad (u, v) \in T = [0, 1] \times [0, 2\pi].$$

Para representarla gráficamente se siguen los pasos indicados de la sección 5.2.2. Se ejecutan los comandos siguientes y se obtiene el paraboloides de la figura inferior. Nótese que para definir las coordenadas cartesianas en una parametrización se deben utilizar operaciones elemento a elemento (ver sec. 1.2.5).

```
% SUPERFICIE Pt (1,X,Y,Z)
radio=1; au=0; bu=radio; av=0; bv=2*pi; % Datos (VARIAR)
n1=23; n2=25; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au, bu, n1); v=linspace(av, bv, n2); % Paso 1: vecs u, v
[U,V]=meshgrid(u, v); % Paso 2: malla 2D en (u, v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=U.^2/4; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2, n1, 4); Pt(:, :, 2)=X; Pt(:, :, 3)=Y; Pt(:, :, 4)=Z;
figure, axis equal, hold on, grid % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4))
```



Para dibujar otras superficies parametrizadas basta con modificar las líneas marcadas con `%... (VARIAR)` que se corresponden con los datos iniciales y la definición de las parametrizaciones. Ahora bien, X , Y y Z son matrices con las coordenadas cartesianas de los puntos de la superficie y deben tener las mismas dimensiones. Si, por ejemplo, la superficie se encontrara en el plano $z = 1$, no se puede poner $Z=1$ puesto que da error, se debe poner, por ejemplo, $Z=1+0*U$ manteniendo las dimensiones adecuadas en la variable Z .

5.3.5. Ejemplo de casquete esférico

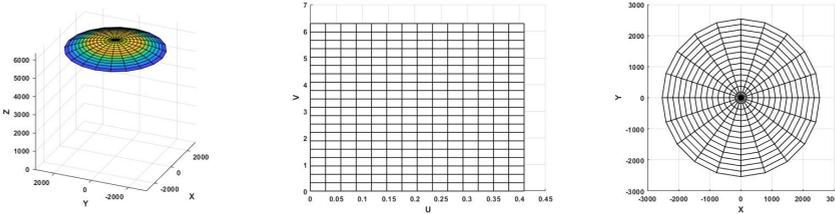
Se va a considerar ahora un casquete esférico correspondiente a la zona que incluye el círculo polar ártico que delimita el extremo sur del día polar del solsticio de verano y la noche polar del solsticio de invierno. Éste se encuentra aproximadamente en la latitud $66^{\circ}33'48''N$ (fluctúa dentro de un pequeño margen). Por lo tanto, está situado en una colatitud aproximada de $90 - 66.56333^{\circ} = 23.43667^{\circ}$ que equivale a unos 0.409046 radianes. Se asume que la Tierra tiene un radio (medio) de 6371 Km. En consecuencia, se puede utilizar la siguiente parametrización para el casquete polar ártico (ver ec. (5.3)):

1. Dominio: $(\phi, \theta) \in T = [0, 0.409046] \times [0, 2\pi]$, $\rho = 6371$ Km, con $u = \phi$ y $v = \theta$.

$$2. \text{ Parametrización: } \begin{cases} x = 6371 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 6371 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 6371 \cos u \end{cases} .$$

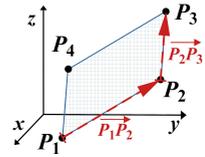
La superficie anterior se puede obtener con los siguientes comandos obteniendo la imagen inferior izquierda (ver sec. 5.3.4). En la imagen inferior central se muestra la discretización rectangular en el dominio (*sencillo*) de los parámetros (u, v) y en la imagen inferior derecha se muestra la misma malla en coordenadas cartesianas vista desde el semieje OZ positivo.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en esféricas
R=6371; au=0; bu=0.409046; av=0; bv=2*pi; % Datos (VARIAR)
n1=15; n2=21; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au, bu, n1); v=linspace(av, bv, n2); % Paso 1: vec u, v
[U,V]=meshgrid(u, v); % Paso 2: malla 2D en (u, v)
X=R.*sin(U).*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=R.*sin(U).*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=R.*cos(U); % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2, n1, 4); Pt(:, :, 2)=X; Pt(:, :, 3)=Y; Pt(:, :, 4)=Z;
figure, axis equal, hold on % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4))
axis([-7000 7000 -7000 7000 0 7000]), grid on
```



5.3.6. Ejemplo de paralelepípedo al espacio

Dados tres puntos no alineados en el espacio P_1 , P_2 , P_3 se quiere parametrizar el paralelepípedo definido por $\{P_1, P_2, P_3, P_4 = P_1 + \overrightarrow{P_2P_3}\}$ de la figura adjunta. Es bastante útil para parametrizar las caras de un poliedro cualquiera. La parametrización viene dada por

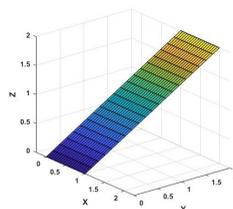


$$(x, y, z) = P_1 + u \cdot \overrightarrow{P_1P_2} + v \cdot \overrightarrow{P_2P_3}, \quad (u, v) \in [0, 1] \times [0, 1].$$

y se obtiene la figura inferior con los siguientes comandos (ver sec. 5.3.4) para los puntos $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 0, 0)$ y $P_3(2, 2, 2)$.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
P=[0 0 0; 1 0 0; 2 2 2]' % Puntos P1,P2,P3 (VARIAR)
W=diff(P)'; P1=P(:,1); % W=vectores P1P2, P2P3.
au=0;bu=1;av=0;bv=1; % Intervalos en los parámetros
n1=20;n2=21; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vecs u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=P1(1)+U*W(1,1)+V*W(1,2); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=P1(2)+U*W(2,1)+V*W(2,2); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=P1(3)+U*W(3,1)+V*W(3,2); % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid % Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))
```

Para dibujar otros paralelepípedos basta con modificar la primera línea marcada con `%...` (VARIAR). Variando los límites en los parámetros (`au, bu, av, bv`) se pueden representar otras zonas del plano que incluye al paralelepípedo.

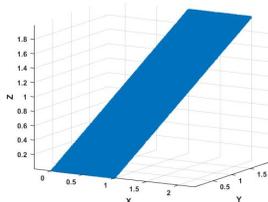


5.3.7. Ejemplo de representación aproximada de una superficie mediante una nube de puntos

Otra forma de obtener una representación aproximada de una superficie a la dada en 5.2.2 es dibujar un gran número de puntos de ésta distribuidos por la zona a representar gráficamente de forma más o menos aleatoria. A este proceso se suele llamar representación mediante una **nube de puntos** y sólo lo utilizaremos de forma excepcional. Ahora no se considera una malla de puntos, sino un gran número de valores de los parámetros distribuidos de forma más o menos aleatoria dentro del dominio considerado. A partir de ahí se calculan los valores de las coordenadas cartesianas dadas por la parametrización y se representan gráficamente como si fueran una curva. En este caso no se deben unir los puntos mediante líneas rectas dado que el segmento que los une puede no estar incluido dentro de la superficie por lo que se utilizará `plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:),'.')` para la representación gráfica con puntos.

Se considera la superficie de la sección 5.3.6 y se obtiene la figura inferior con los siguientes comandos para los puntos $P_1(0, 0, 0)$, $P_2(1, 0, 0)$ y $P_3(2, 2, 2)$.

```
% SUPERFICIE NUBE DE PUNTOS Pt(1,X,Y,Z)
P=[0 0 0; 1 0 0; 2 2 2]'; % Puntos P1,P2,P3 (VARIAR)
au=0;bu=1;av=0;bv=1; % Intervalos en los parámetros
W=diff(P)';P1=P(:,1); % W=vectores P1P2, P2P3.
N=99999; % Número de puntos en (u,v)
% Se calculan los valores ALEATORIOS en los parámetros:
U=(bu-au)*rand(1,N)+au;V=(bv-av)*rand(1,N)+av;
X=P1(1)+U*W(1,1)+V*W(1,2); % X(U,V) (VARIAR)
Y=P1(2)+U*W(2,1)+V*W(2,2); % Y(U,V) (VARIAR)
Z=P1(3)+U*W(3,1)+V*W(3,2); % Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(4,N);Pt(2,:)=X;Pt(3,:)=Y;Pt(4,:)=Z;
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:),'.')
```



Modificando la primera línea marcada con `%... (VARIAR)` se puede representar cualquier otro paralelepípedo. También se puede utilizar la representación mediante nube de puntos para cualquier otra parametrización modificando las líneas marcadas con `%... (VARIAR)`.

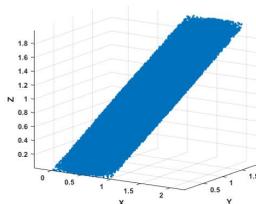
Un caso curioso y fácil de implementar mediante una nube de puntos y sin la parametrización vista en la sección 5.2.2 es la representación de un polígono plano. Se consideran m puntos al espacio, P_1, \dots, P_m , incluidos en un mismo plano y con al menos tres puntos no alineados. Se quiere representar el polígono *convexo* plano que tiene por vértices dichos puntos. Se va a utilizar una extensión de las *coordenadas baricéntricas* de un triángulo dada por

$$(x, y, z) = \frac{\lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_m P_m}{\lambda_1 + \dots + \lambda_m}, \quad \lambda_i \in [0, 1], i = 1, \dots, m, \lambda_1 + \dots + \lambda_m \neq 0.$$

Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo la figura inferior para los puntos $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,0,0)$ y $P_3(2,2,2)$, $P_4(1,2,2)$. Los puntos se entran por filas por comodidad y luego se trasponen para que estén por columnas.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
P=[0 0 0; 1 0 0; 2 2 2; 1 2 2]' % Puntos P1,...,Pm (VARIAR)
m=size(P,2);N=999999; L=rand(m,N);
C=(sum(L)<1e-5).*ones(m,N);L=L+C*(1/m);%1/m si suman 0
L=L./sum(L); % Se impone que sumen 1
X=P(1,:)*L; % X
Y=P(2,:)*L; % Y
Z=P(3,:)*L; % Z
Pt=ones(3,N);Pt(2,:)=X;Pt(3,:)=Y;Pt(4,:)=Z;
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:),'.')
```

Para dibujar otros polígonos basta con modificar la primera línea marcada con `%...` (VARIAR). El orden de los puntos no importa. El número de puntos se concentra más al centro de la figura, por lo que hay que tomar un número de puntos bastante elevado a representar para obtener una figura bastante completa. Si los puntos no están contenidos dentro de un mismo plano se obtienen puntos dentro del volumen que definen pero se requiere un número excesivo de puntos para que la figura quede definida, por lo que no se aconseja esta opción.



5.3.8. Ejemplo de un cilindro con tapas

Se va a dibujar un cilindro con tapas de altura 10 y radio 2 unidades centrado al origen y alrededor del eje OZ . Dicho cilindro es una superficie

regular a trozos puesto que está formado por tres superficies regulares, la superficie lateral (en forma de tubo) que llamaremos S_1 , y las tapas superior e inferior que las llamaremos S_2 y S_3 , respectivamente. Como hay simetría respecto a un eje es conveniente utilizar coordenadas cilíndricas (r, θ, z) (ver ec. (5.2)). Para cada una de las superficies se muestra el dominio utilizado T y la parametrización $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in T$ (ver sec. 5.2.2 y la ec. (5.1)).

- Para S_1 (lateral del cilindro de radio $r = 2$ con $-5 \leq z \leq 5$):

1. Dominio: $(\theta, z) \in T = [0, 2\pi] \times [-5, 5]$ donde $u = \theta$ y $v = z$.

2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = 2 \cos u \\ y = 2 \operatorname{sen} u \\ z = v \end{cases}$$

- Para S_2 (tapa superior, círculo con $0 \leq r \leq 2$ y $z = 5$):

1. Dominio: $(r, \theta) \in T = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ donde $u = r$ y $v = \theta$.

2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = 5 \end{cases}$$

- Para S_3 (tapa inferior, círculo con $0 \leq r \leq 2$ y $z = -5$):

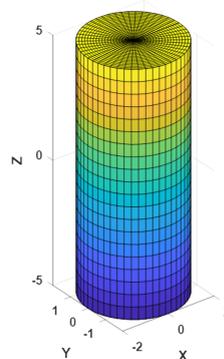
1. Dominio: $(r, \theta) \in T = [0, 2] \times [0, 2\pi]$ donde $u = r$ y $v = \theta$.

2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = u \cos v \\ y = u \operatorname{sen} v \\ z = -5 \end{cases}$$

Las superficies anteriores se pueden conseguir con los siguientes comandos, obteniendo la imagen adjunta.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas: CILINDRO CON TAPAS
H=10;R=2; % Datos iniciales (VARIAR)
n1=15;n2=21; % Número de líneas en la malla
%
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas S1: lateral
au=0;bu=2*pi;av=-H/2;bv=H/2; % Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=R*cos(U); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
```

Cilindro sobre OZ de altura 10 centrado en (0,0,0)



```

Y=R*sin(U); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=V; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
figure,axis equal,hold on % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
%
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas S2: tapa sup.
au=0;bu=R;av=0;bv=2*pi; % Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=H/2+0*U; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
%figure,axis equal,hold on % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
%
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas S3: tapa inf.
au=0;bu=R;av=0;bv=2*pi; % Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=-H/2+0*U; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
%figure,axis equal,hold on % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
% Extras gráficos:
title('Cilindro en OZ de altura 10 centrado en (0,0,0)')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z'),grid

```

5.3.9. Ejemplo de un trozo de sandía

Supongamos que tenemos una sandía esférica de 60 cm de diámetro y cortamos una rodaja verticalmente. Como hay simetría de rotación respecto a un punto (el centro) es conveniente utilizar coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) (ver ec. 5.4). Obsérvese que (ver sec. 5.1.4):

- $R = 30$ cm será el radio de la sandía, lo que implica que $\rho \in [0, 30]$ (módulo).
- Se toma un trozo de sandía en vertical de medio círculo, por lo que $\phi \in [0, \pi]$ (colatitud).
- Se toma un trozo suficientemente ancho de 15° , en consecuencia, $\theta \in [0, \pi/12]$ (longitud).

La superficie del trozo de sandía está formada por tres superficies regulares parametrizadas, por lo que es una superficie regular a trozos. Para cada una de ellas se muestra el dominio T y la parametrización utilizada (ver sec. 5.2.2 y la ec. (5.3)).

- Para S_1 (corteza de sandía, parte de una esfera):

1. Dominio: $(\phi, \theta) \in T = [0, \pi] \times [0, \pi/12]$, $\rho = 30$, con $u = \phi$ y $v = \theta$.

2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = 30 \operatorname{sen} u \cos v \\ y = 30 \operatorname{sen} u \operatorname{sen} v \\ z = 30 \cos u \end{cases}$$

- Para S_2 (un lateral del trozo de sandía, un semicírculo):

1. Dominio: $(\rho, \phi) \in T = [0, 30] \times [0, \pi]$, $\theta = 0$ con $u = \rho$ y $v = \phi$.

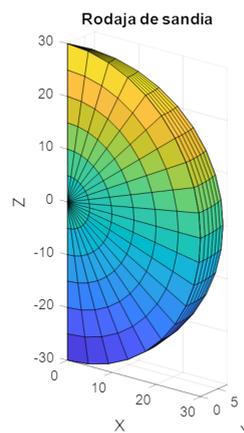
2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = u \operatorname{sen} v \cos 0 = u \operatorname{sen} v \\ y = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen} 0 = 0 \\ z = u \cos v \end{cases}$$

- Para S_3 (el otro lateral del trozo de sandía, un semicírculo):

1. Dominio: $(\rho, \phi) \in T = [0, 30] \times [0, \pi]$, $\theta = \pi/12$, con $u = \rho$ y $v = \phi$.

2. Parametrización:
$$\begin{cases} x = u \operatorname{sen} v \cos(\pi/12) \\ y = u \operatorname{sen} v \operatorname{sen}(\pi/12) \\ z = u \cos v \end{cases}$$

Las superficies anteriores se pueden conseguir con los siguientes comandos obteniendo la imagen adjunta.



```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en esféricas: TROZO DE SANDÍA
R=30;the0=0;the1=pi/12;% Datos iniciales (VARIAR)
n1=15;n2=21;% Número de líneas en la malla
%
% SUPERFICIE en ESFÉRICAS S1: corteza o base
au=0;bu=pi;av=the0;bv=the1;% Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2);% Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v);% Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=R.*sin(U).*cos(V);% Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=R.*sin(U).*sin(V);% Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=R.*cos(U);% Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
```

```

Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
figure,axis equal,hold on % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
%
% SUPERFICIE en ESFÉRICAS S2: Lateral longitud the0
au=0;bu=R;av=0;bv=pi; % Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*sin(V).*cos(the0); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V).*sin(the0); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=U.*cos(V); % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
%figure,hold on,axis equal% Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
%
% SUPERFICIE en ESFÉRICAS S3: Lateral longitud the1
au=0;bu=R;av=0;bv=pi; % Datos iniciales (VARIAR)
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vec u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*sin(V).*cos(the1); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V).*sin(the1); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=U.*cos(V); % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:, :, 2)=X;Pt(:, :, 3)=Y;Pt(:, :, 4)=Z;
%figure,hold on,axis equal% Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))
% Extras gráficos:
title('Rodaja de sandia')
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z'),grid

```

5.4. VECTORES TANGENTES A CURVAS Y SUPERFICIES

Esta sección se añade a modo de addenda y para entender mejor el concepto de curva y superficie regular. Una curva en \mathbb{R}^3 es regular cuando tiene un vector tangente único no nulo en todos sus puntos no extremos (ver sec. 5.2.1) mientras que una superficie es regular cuando tiene dos (únicos) vectores tangentes linealmente independientes en todos sus puntos *interiores* (ver sec. 5.2.2).

5.4.1. Vectores tangentes a una curva parametrizada

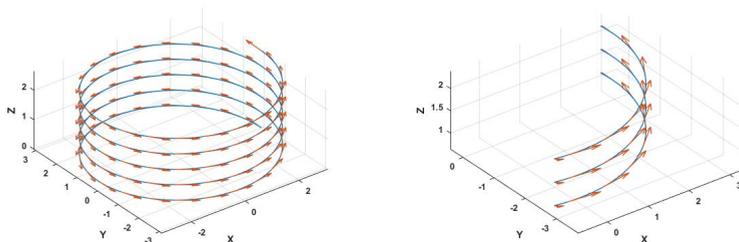
Los resultados aquí presentados son similares a los obtenidos para curvas en el plano (ver sec. 3.4). Se considera el muelle de la sección 5.3.2 parame-

trizado por $\vec{f}(t)$, $t \in [0, 10\pi]$, y se asumen ejecutados los comandos de dicha sección. El **vector** $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ **tangente** a la curva, da el sentido de recorrido y su magnitud indica la velocidad en que se recorre la curva en cada punto, es decir, la razón de recorrido de la curva respecto el parámetro. Si la curva $\vec{f}(t)$ indicara la trayectoria de un vehículo en el tiempo t , el vector $\vec{f}'(t)$ indicaría la velocidad de dicho vehículo. A continuación, se indica la parametrización y el vector tangente calculado directamente:

- Parametrización: $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t)) = (3 \cos t, 3 \sin t, \frac{t}{12})$.
- Vector tangente: $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t)) = (-3 \sin t, 3 \cos t, \frac{1}{12})$.

El comando `quiver3(x, y, z, h1, h2, h3)` permite representar el vector (h_1, h_2, h_3) en el punto (x, y, z) en tres dimensiones. Con él se puede representar el vector tangente $\vec{f}'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ a cada punto de la curva regular parametrizada por $\vec{f}(t) = (x(t), y(t), z(t))$, $t \in [a, b]$. El vector tangente se puede calcular directamente, o bien, se puede obtener mediante derivación simbólica y después convertir las derivadas a identificador de función como vamos a hacer a continuación con los siguientes comandos obteniendo las imágenes inferiores (ver sec. 1.3.2).

```
% PARAMETRIZACIÓN C: f(T)=[x(T);y(T);z(T)]
syms T a
C=[3*cos(T);3*sin(T);T/12] % curva C (VARIAR)
Cder=diff(C,T) % f'(T)=[x'(T);y'(T);z'(T)]
% Conversión de f' a función de (a,T)
V=matlabFunction(Cder+a*T, 'Vars', {a,T});
% Dibujo de los vectores tangentes f'(T)
hold on,axis equal,V=V(0,t); % Se impone a=0
quiver3(X,Y,Z,V(1,:),V(2,:),V(3,:)) % f'(T)
```



En la imagen superior izquierda se muestra la figura completa y a la derecha una sección para observar con más detalle las tangencias. No se han dibujado los vectores tangentes en todos los puntos para no sobrecargar la imagen. Se añade una variable auxiliar simbólica a para no tener problemas

en la conversión a función cuando las derivadas son, por ejemplo, constantes. Esta variable auxiliar se elimina a posteriori puesto que se evalúa en 0.

Para aplicarlo a cualquier otra curva regular basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

5.4.2. Vectores tangentes a una superficie parametrizada

Se considera el cilindro de la sección 5.3.8 y se asumen ejecutados sólo los comandos de dicha sección que corresponden a la superficie lateral S_1 (lateral del cilindro de radio 2 con $-5 \leq z \leq 5$) que es regular y que está parametrizada por $\vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, $(u, v) \in T$. Se tiene que los vectores $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u, v) = (\frac{\partial x}{\partial u}(u, v), \frac{\partial y}{\partial u}(u, v), \frac{\partial z}{\partial u}(u, v))$ y $\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u, v) = (\frac{\partial x}{\partial v}(u, v), \frac{\partial y}{\partial v}(u, v), \frac{\partial z}{\partial v}(u, v))$ son dos **vectores tangentes linealmente independientes** (dan dos direcciones distintas no nulas) a cada punto. Si se busca un vector perpendicular a la superficie bastaría con calcular el producto vectorial de ambos vectores. La parametrización y sus derivadas vienen dadas por:

- $\vec{f}(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v)) = (2 \cos u, 2 \sin u, v)$.
- $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u, v) = (-2 \sin u, 2 \cos u, 0)$ vector tangente en la dirección de las circunferencias circulares (v constante).
- $\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u, v) = (0, 0, 1)$ vector tangente en la dirección de las líneas verticales (u constante).

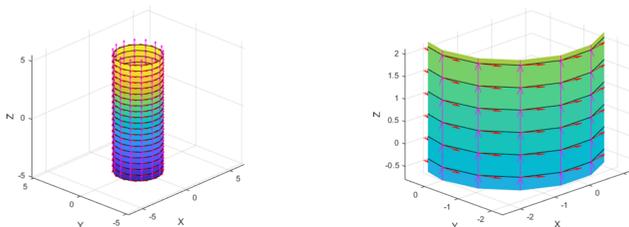
El comando `quiver3(x, y, z, h1, h2, h3)` permite representar el vector (h_1, h_2, h_3) en el punto (x, y, z) en tres dimensiones. Con él se pueden representar los vectores tangentes $\frac{\partial \vec{f}}{\partial u}(u, v)$ y $\frac{\partial \vec{f}}{\partial v}(u, v)$ a cada punto de la superficie regular parametrizada por $\vec{f}(u, v)$, $(u, v) \in T$. Los vectores tangentes se puede calcular directamente como se ha hecho, o bien, se pueden obtener mediante derivación simbólica y después convertir las derivadas a identificador de función como vamos a hacer a continuación con los siguientes comandos obteniendo las imágenes inferiores (ver sec. 1.3.2).

```
syms u v a
% DEFINICIÓN DE LA PARAMETRIZACIÓN de S, y
% CÁLCULO DE SUS DERIVADAS PARCIALES en u y en v
S=[2*cos(u);2*sin(u);v] % S: parametrización (VARIAR)
Tu=diff(S,u),Tv=diff(S,v) % Tu=df/du, Tv=df/dv
% CONVERSIÓN DE df/du, df/dv A FUNCIONES DE (a,u,v)
Tu=matlabFunction(Tu+a*u+a*v,'Vars',{a,u,v});
Tv=matlabFunction(Tv+a*u+a*v,'Vars',{a,u,v});
Tu=Tu(0,reshape(U,1,n2*n1),reshape(V,1,n2*n1));
```

```

Tv=Tv(0, reshape(U, 1, n2*n1), reshape(V, 1, n2*n1));
Tu1=reshape(Tu(1, :, :), n2, n1); Tu2=reshape(Tu(2, :, :), n2, n1);
Tu3=reshape(Tu(3, :, :), n2, n1); Tv1=reshape(Tv(1, :, :), n2, n1);
Tv2=reshape(Tv(2, :, :), n2, n1); Tv3=reshape(Tv(3, :, :), n2, n1);
% DIBUJO DE LOS VECTORES TANGENTES df/du, df/dv
hold on,axis equal,grid on
quiver3(X,Y,Z,Tu1,Tu2,Tu3,'r')
quiver3(X,Y,Z,Tv1,Tv2,Tv3,'m')

```



En la imagen superior izquierda se muestra la figura completa y a la derecha una sección para observar con más detalle las tangencias. Sobre la superficie regular se ha representado una malla que corresponde a valores constantes de u o de v . El vector derivada respecto u , $Tu = \frac{\partial \vec{f}}{\partial u}$, es tangente en las intersecciones de la malla en la dirección que marca un incremento positivo en u , y el vector derivada respecto de v , $Tv = \frac{\partial \vec{f}}{\partial v}$, es tangente en las intersecciones de la malla en la dirección que marca un incremento positivo en v . Las funciones Tu y Tv se evalúan bien sobre vectores de puntos pero presentan un cierto problema cuando se evalúa sobre matrices de puntos en superficies, por lo que se utiliza el comando `reshape` para solucionarlo. Se añade una variable auxiliar simbólica `a` para facilitar la conversión a función cuando las derivadas son, por ejemplo, constantes. Esta variable auxiliar se elimina a posteriori puesto que se evalúa en 0.

Para aplicarlo a cualquier otra curva regular basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

5.5. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección [A.5](#).

5.5.1. Ejercicios propuestos

- P5.1 Dibuja un muelle helicoidal de 10 cm de diámetro y 50 cm de altura centrado en el eje OZ utilizando coordenadas cilíndricas con una representación polar sobre el plano XY (ver ec. (5.1)). Vuelve a dibujar el mismo muelle centrado ahora sobre el eje OY con representación polar sobre el plano XZ . Indica qué velocidad de giro se ha utilizado y aproximadamente cuántas vueltas se han obtenido en el muelle. Indica también la dirección positiva del eje mediante la regla de la mano derecha en ambos casos.
- P5.2 A partir de un pequeño número de puntos dibuja la trayectoria que puede seguir un cohete pirotécnico antes de encender por error la cima de una falla de Gandia. Indicación: El punto de encendido del cohete puede estar en el suelo en $(0,0,0)$ y la cima del monumento de la falla en $(8,12,6)$ en metros. Añade unos cuantos puntos intermedios e interpolar la trayectoria.
- P5.3 Dibuja sobre la tierra la primera vuelta al mundo capitaneada por Magallanes y Elcano a partir de unos 10 puntos. Indicaciones: Busca la trayectoria que hicieron y obtén la latitud y longitud de unos 10 puntos significativos y transfórmalos a coordenadas esféricas utilizando radio constante (ver sec. 5.1.4). Interpola la colatitud y longitud de los puntos ordenados considerados como si fueran coordenadas cartesianas en el plano (ver sec. 3.3.9). Puede que la trayectoria marcada para los barcos atravesase algún trozo de tierra debido a los pocos puntos utilizados.
- P5.4 Dibuja las superficies que definen una cuña de un queso que tiene una forma cilíndrica de 30 cm de diámetro y 10 cm de altura.
- P5.5 Dibuja una “seta” que esté formada por un cilindro sin tapas situado sobre el $(0,0,0)$ y una semiesfera encima de modo que el plano de la base de la semiesfera esté situado en el límite superior del cilindro. Sean a y b los dos últimos dígitos o nulos de vuestro DNI o pasaporte (a el penúltimo y b el último). El cilindro debe tener diámetro a y altura $2a + 2b$, mientras que la semiesfera debe tener radio $a + b$.
Observación: El cilindro pedido viene dado en coordenadas cilíndricas (r, θ, z) por $r = a$, $\theta \in [0, 2\pi[$, $z \in [0, 2a + 2b]$, mientras que la semiesfera en coordenadas esféricas (ρ, ϕ, θ) verifica que $\rho = a + b$, $\phi \in [0, \pi/2]$, $\theta \in [0, 2\pi[$ trasladada verticalmente la altura del cilindro, por tanto, hay que sumarle $2a + 2b$ a la coordenada z .

5.5.2. Ejercicios de autoevaluación

- T5.1 Indica cual de las siguientes afirmaciones es cierta en el espacio.
- $P(1, 1, 1)$ (en cartesianas) $\equiv P(\sqrt{3}, \pi/4, \pi/4)$ (en esféricas)
 - $P(1, 1, 1, 1) \equiv P(\sqrt{2}, \pi/4, 1)$ (en cilíndricas)
 - $P(1, 1, 1, 1) \equiv P(\sqrt{3}, 45, 1)$ (en cilíndricas)
 - Ninguna de las otras.
- T5.2 Sabiendo que el radio (medio) de la tierra es $R = 6371\text{Km}$, indica cuáles son las coordenadas cartesianas de la localización (en Km) de la primera vuelta a la tierra en el día 440 desde su salida (coordenadas $52^\circ 14' 2.8''\text{S}$ de latitud y $69^\circ 14' 9.9''\text{W}$ de longitud sobre la superficie terrestre). Se asume que el origen de coordenadas está en el centro de la tierra, que el semieje OZ positivo pasa por el polo norte y que el semieje OX positivo pasa por el punto con latitud y longitud terrestre nulas. Indicación: Las coordenadas $a^\circ b' c''$ equivalen a $a + b/60 + c/3600$ grados.

- (a) (-4802.9, 584.3032, -4144.9)
- (b) Ninguna de las otras.
- (c) (1383.3, -3648.4, -5036.4)
- (d) (1383.3, 3648.4, 5036.4)

T5.3 Utilizando la notación del texto, se asume en la variable `Pt` los $n_1 \cdot n_2$ puntos que definen en el espacio una superficie parametrizada $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$, donde n_1 y n_2 son el número de puntos utilizados en la discretización de los parámetros u y v respectivamente. Señala la opción verdadera.

- (a) Las dimensiones de `Pt` son $n_2 \times n_1 \times 4$.
- (b) Las dimensiones de `Pt` son $3 \times n_1 \times n_2$.
- (c) Las dimensiones de `Pt` son $n_1 \times n_2 \times 3$.
- (d) Las dimensiones de `Pt` son $4 \times n_1 \times n_2$.

T5.4 La figura dada por la parametrización $x(u, v) = u \cos v$, $y(u, v) = u \sin v$, $z(u, v) = 0$ con u y v entre 0 y 2π es:

- (a) Ninguna de las otras.
- (b) Un círculo plano.
- (c) Una antena parabólica.
- (d) Una espiral alrededor del eje OZ .

T5.5 Se considera la superficie dada por $1.2x^2 - 1.2y^2 = z$ alrededor del origen. Indica cuál de las siguientes es cierta (al menos un trozo de ella de forma aproximada).

- (a) Tiene forma de una silla de montar.
- (b) Tiene forma de cono (o pirámide) circular.
- (c) Ninguna de las otras.
- (d) Tiene forma de paraboloides.

T5.6 Indica cual de las siguientes afirmaciones es cierta.

- (a) Si una superficie es regular tiene un único vector tangente en todos sus puntos.
- (b) Ninguna de las otras.
- (c) Un cubo (un paralelepípedo) es una superficie regular.
- (d) Si una superficie es regular tiene dos vectores tangentes en todos sus puntos marcando una misma dirección.

T5.7 Indica qué conjunto de comandos de los siguientes puede ser utilizado para dibujar el lateral de un cono invertido (una pirámide circular invertida) centrado sobre el eje OZ con base de radio 2 en $z = 2$ y vértice en el origen. Obsérvese que el cono que se considera en este ejercicio se puede obtener mediante el giro alrededor del eje OZ de una recta que pasa por el origen, por lo que es una superficie de revolución.

- (a) `u=linspace(0,2,n1); v=linspace(0,2*pi,n2);`
`[U,V]=meshgrid(u,v); X=V.*cos(U); Y=V.*sin(U); Z=V;`
- (b) `u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2,n2);`
`[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*cos(V); Y=U.*sin(V); Z=V;`

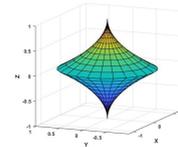
- (c) $u=\text{linspace}(0,2,n1)$; $v=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=U.*\cos(V)$; $Y=U.*\sin(V)$; $Z=U$;
- (d) $u=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n1)$; $v=\text{linspace}(0,2,n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=V.*\cos(U)$; $Y=V.*\sin(U)$; $Z=U$;

T5.8 Indica qué conjunto de comandos de los siguientes puede ser utilizado para dibujar el lateral de una pirámide circular invertida (un cono) centrado sobre el eje OZ con base de radio $\sqrt{2}$ en $z=\sqrt{2}$ y vértice en el origen.

- (a) $u=\text{linspace}(0,2,n1)$; $v=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=V.*\sin(\text{pi}/4).*\cos(U)$;
 $Y=V.*\sin(\text{pi}/4).*\sin(U)$; $Z=V.*\cos(\text{pi}/4)$;
- (b) $u=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n1)$; $v=\text{linspace}(0,2,n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=U.*\sin(V).*\cos(\text{pi}/4)$;
 $Y=U.*\sin(V).*\sin(\text{pi}/4)$; $Z=U.*\cos(V)$;
- (c) $u=\text{linspace}(0,2,n1)$; $v=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=V.*\sin(U).*\cos(\text{pi}/4)$;
 $Y=V.*\sin(U).*\sin(\text{pi}/4)$; $Z=V.*\cos(U)$;
- (d) $u=\text{linspace}(0,2,n1)$; $v=\text{linspace}(0,2*\text{pi},n2)$;
 $[U,V]=\text{meshgrid}(u,v)$; $X=U.*\sin(\text{pi}/4).*\cos(V)$;
 $Y=U.*\sin(\text{pi}/4).*\sin(V)$; $Z=U.*\cos(\text{pi}/4)$;

T5.9 Indica cuál de las siguientes parametrizaciones representa a una *peonza doble*. Obsérvese que es una superficie de revolución alrededor del eje OZ .

- (a) Ninguna de las otras.
- (b)
$$\begin{cases} x = |u - 1|^2 \cos v \\ y = |u - 1|^2 \sin v \\ z = u \end{cases}, \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi].$$
- (c)
$$\begin{cases} x = |1 - u^2| \cos v \\ y = |1 - u^2| \sin v \\ z = u \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [-1, 1].$$
- (d)
$$\begin{cases} x = (|u| - 1)^2 \cos v \\ y = (|u| - 1)^2 \sin v \\ z = u \end{cases}, \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [0, 2\pi].$$



T5.10 Indica cuál de las siguientes superficies parametrizadas representa un *rollito de anís* (una rosquilla circular dulce con agujero al centro). Su superficie (regular) se llama **toro** en matemáticas.

- (a) Ninguna de las otras.
- (b)
$$\begin{cases} x = (3 + \cos u) \cos v \\ y = (3 + \cos u) \sin v \\ z = \sin u \end{cases}, \quad (u, v) \in [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi].$$
- (c)
$$\begin{cases} x = (5 + 4 \cos u) \cos v \\ y = (5 + \cos u) \sin v \\ z = 0.8 \sin u \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, 2\pi].$$
- (d)
$$\begin{cases} x = (2 + 2 \cos u) \cos v \\ y = \sin u \\ z = (2 + 2 \cos u) \sin v \end{cases}, \quad (u, v) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi].$$



Capítulo 6

Transformaciones geométricas en el espacio

En este capítulo se introducen las transformaciones geométricas en el espacio y se aplican sobre las figuras vistas en el capítulo anterior. Aunque con el método propuesto se puede aplicar cualquier transformación, nos vamos a centrar con las transformaciones semejantes que son base de todas ellas. En primer lugar se presentan las transformaciones geométricas en el espacio y luego se muestran ejemplos de cómo ejecutar cada una de ellas tanto en curvas como en superficies. También se considera el producto o composición de transformaciones.

Se incluyen los comandos que permiten dicho tratamiento geométrico. Estos comandos son de interpretación directa pero también se pueden aplicar por bloques como si se tratara de funciones predefinidas. Ello facilita el seguimiento del texto con los procedimientos habituales de copia/pega. Al final se incluyen algunos ejercicios propuestos y de autoevaluación. En la sección [A.6](#) se encuentran las soluciones y los posibles comandos a utilizar para la resolución de los ejercicios test incluidos en la autoevaluación de este capítulo.

6.1. TRANSFORMACIONES EN \mathbb{R}^3

6.1.1. Transformaciones del espacio

Muchos de los conceptos definidos en \mathbb{R}^2 se generalizan de manera obvia al espacio \mathbb{R}^3 (ver sec. 4.1). Se denomina **transformación** (geométrica) del espacio a toda aplicación $F : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ biyectiva. Si $F(P) = P'$ se dice que P' es el **transformado** u **homólogo** de P mediante F . Según sea la transforma-

ción F , también se dice que P' es el trasladado, simétrico, homotético, . . . de P . Algunos textos simplemente indican que P' es la **imagen** de P por F .

Si C es un subconjunto, o **figura**, de \mathbb{R}^3 entonces $C' = F(C)$ es la **figura** o **conjunto transformado**.

Si F y G son transformaciones del plano, también lo es la **composición de las transformaciones** $G \circ F$, que también se denomina **producto de las transformaciones** G y F y se define sobre el punto P como $(G \circ F)(P) = G(F(P))$. En general $G \circ F \neq F \circ G$. A veces $G \circ F$ simplemente se denota como $G \cdot F$.

Dos **figuras** son **semejantes** si tienen la misma forma aunque sus orientaciones y tamaños sean distintos, es decir, si los segmentos o lados homólogos son proporcionales y los ángulos permanecen iguales. Como se irá viendo a lo largo del capítulo, las semejanzas transforman una figura en otra semejante a ella.

Un **punto** se llama **invariante** por una transformación si su homólogo es él mismo. Un conjunto de puntos C se llama invariante si $F(C) = C$. Se define la **transformación identidad** como aquella en que todos los puntos son invariantes.

6.1.2. Isometrías y semejanzas

Se denomina **isometría** o **movimiento** de \mathbb{R}^3 a toda transformación que *conserva las distancias* entre puntos. Como consecuencia de ello, las isometrías conservan los ángulos que definen los segmentos. La isometría se denomina **directa** si conserva la orientación de los ángulos y, en caso contrario, se denomina **inversa**. El producto de isometrías es otra isometría.

Al igual que en \mathbb{R}^2 , el producto de una isometría por una homotecia (ver sec. 6.2.3 para más detalle), o viceversa, se denomina **semejanza** y, además, el producto de semejanzas es otra semejanza.

Obsérvese que todas las semejanzas son invertibles al ser biyectivas y que una transformación por su inversa da la transformación identidad.

6.1.3. Transformación afín

Al igual que se ha visto en \mathbb{R}^2 (ver sec. 4.1.3), una **transformación afín** $F : R^3 \rightarrow R^3$ es una aplicación lineal de **matriz** $A = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ **no singular** (con determinante no nulo), seguida de la suma de un vector

$\vec{h} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix}$. Dado un punto $P(x, y, z)$ cualquiera del espacio (ver sec. 5.1.1)

su **transformado, imagen u homólogo** $P'(x', y', z')$ por F viene dado por

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \\ h_3 \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} + \vec{h}. \quad (6.1)$$

A la matriz A se le llama **matriz de la aplicación lineal asociada a la transformación afín** F y a \vec{h} **vector de traslación**. Una transformación afín en el espacio tiene doce *grados de libertad* que corresponden a los nueve coeficientes de la matriz y a los tres del vector de traslación.

Se prefiere utilizar la formulación que permiten las coordenadas homogéneas (ver sec. 5.1.2) de modo que el punto $\tilde{P}(1, x, y, z)$ se transforma en su homólogo $\tilde{P}'(1, x', y', z')$. Con esta notación, la transformación afín h de la ecuación (6.1) se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ h_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ h_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix} \quad (6.2)$$

donde a la matriz $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ h_2 & a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ h_3 & a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{pmatrix}$ se le llama **matriz de la**

transformación afín y se puede escribir en *bloques* como $\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & \vec{0}^t \\ \vec{h} & A \end{pmatrix}$.

Obsérvese que las ecuaciones (6.1) y (6.2) son equivalentes.

La transformación identidad queda definida mediante la matriz identidad \tilde{I} como matriz asociada a la aplicación lineal y traslación nula ($A = I$ y $\vec{h} = \vec{0}$ en la ec. (6.1)).

A continuación se van a considerar las semejanzas en el espacio (en el caso del plano real, ya se han visto en la sección 4.2).

6.1.4. Producto de transformaciones afines

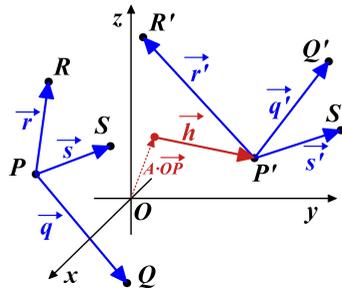
El **producto (o composición) de transformaciones afines** (ver sec. 6.1.1) es otra transformación afín.

Lo que se ha visto para el plano real en la sección 4.1.4 es válido también en el espacio real y es de aplicación en este capítulo.

6.1.5. Caracterización de una transformación afín

Para determinar una aplicación lineal en el espacio de matriz A se necesita la imagen de tres vectores linealmente independientes (que forman una base) y para determinar el vector de traslación \vec{h} se necesita la imagen de un punto. En consecuencia, se tiene el siguiente resultado.

Una transformación afín en el espacio queda determinada al fijar la imagen de cuatro puntos sin que haya tres alineados. Ello se debe a que al fijar la imagen por h de los puntos P, Q, R y S no alineados tres a tres ($P' = h(P), Q' = h(Q), R' = h(R), S' = h(S)$), se fija la imagen de una base de \mathbb{R}^3 por la aplicación lineal asociada con matriz A ($\vec{q}' = A\vec{q}, \vec{r}' = A\vec{r}, \vec{s}' = A\vec{s}$ donde $\vec{q} = \overrightarrow{PQ}, \vec{r} = \overrightarrow{PR}, \vec{s} = \overrightarrow{PS}, \vec{q}' = \overrightarrow{P'Q'}, \vec{r}' = \overrightarrow{P'R'}, \vec{s}' = \overrightarrow{P'S'}$). El vector traslación se determina como $\vec{h} = \overrightarrow{OP'} - A \cdot \overrightarrow{OP}$. En la figura inferior se incluye un esquema representativo.



Fijar la imagen de cuatro puntos del espacio no alineados tres a tres es equivalente a imponer 12 ecuaciones (4 puntos por 3 coordenadas por punto) lineales independientes por lo que se tiene un sistema compatible y determinado con solución única para los 12 parámetros de la matriz \tilde{A} . A priori, la transformación afín así determinada no tiene porqué ser una semejanza, depende de los valores de las imágenes de los puntos considerados.

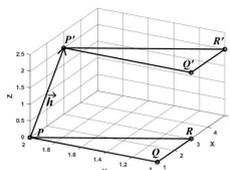
6.2. SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL

Primero se verán las traslaciones, las simetrías puntuales y las homotecias que son una extensión directa de las transformaciones planas vistas en la sección 4.2. Seguidamente se verán las simetrías planas, los giros respecto a un eje y las simetrías axiales.

6.2.1. Traslaciones

Sea \vec{h} un vector (fijo, no nulo) de \mathbb{R}^3 . Al igual que en el plano (ver sec. 4.2.1), se denomina **traslación** $T_{\vec{h}}$ de \mathbb{R}^3 a la isometría (directa) que verifica $T_{\vec{h}}(P) = P' = P + \vec{h}$ (i.e., $\vec{h} = \overrightarrow{PP'}$ es el vector con origen en el punto P y finalización en P' , ver sección 5.1.1) para cualquier $P \in \mathbb{R}^3$.

En la imagen adjunta se muestra la traslación de la figura (triángulo) de vértices $P(1, 2, 0)$, $Q(1, 1, 0)$ y $R(3, 1, 0)$ situado en el plano XY por el vector $\vec{h} = (2, 0, 2)$ obteniendo el triángulo definido por los vértices P' , Q' y R' .



Sea $\vec{h} = (h_1, h_2, h_3)$. La imagen $\tilde{P}'(1, x', y', z')$ de un punto $\tilde{P}(1, x, y, z)$ por $T_{\vec{h}}$ con matriz $\tilde{A}_{\vec{h}}$ es

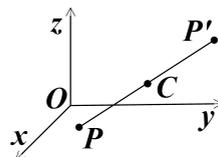
$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & 1 & 0 & 0 \\ h_2 & 0 & 1 & 0 \\ h_3 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{\vec{h}} \cdot \tilde{P}.$$

Obsérvese que la matriz A de la aplicación lineal asociada a la transformación afin es la matriz identidad y el vector de traslación es \vec{h} (ver ec. (6.2)).

Al realizar una traslación no nula (i.e. $\vec{h} \neq \vec{0}$) ningún punto se mantiene invariante. Es fácil comprobar que la transformación inversa a $T_{\vec{h}}$ es $T_{-\vec{h}}$, es decir, es otra traslación de matriz $\tilde{A}_{-\vec{h}}$.

6.2.2. Simetrías respecto un punto

Una simetría respecto a un punto C , al igual que en el plano real (ver sec. 4.2.2), se denomina **simetría puntual** y se denota S_C . Se caracteriza porque la imagen P' de un punto P de \mathbb{R}^3 verifica que $\overrightarrow{CP'} = -\overrightarrow{CP}$, es decir, el punto P' equidistante a C situado sobre la recta que pasa por P y C . Si C es el origen se suele denominar, simplemente, **simetría central**.



Sea \tilde{A}_O la matriz de una simetría central. Si $P'(x', y', z')$ es el homólogo de $P(x, y, z)$ respecto una simetría central se verifica que $\overrightarrow{OP} = -\overrightarrow{OP'}$, en consecuencia, la matriz de la aplicación lineal asociada es la identidad cambiada de signo. Como el origen es invariante, el vector de traslación es nulo.

Por tanto, se tiene que

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_O \cdot \tilde{P}.$$

Si se quiere hacer una simetría puntual respecto a un punto cualquiera C , basta con trasladar el punto C al origen, realizar una simetría central y hacer la traslación inversa. Por tanto, la matriz de transformación de una simetría puntual respecto de un punto cualquiera C , \tilde{A}_C , es (ver sec. 6.1.4)

$$\tilde{A}_C = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_O \cdot \tilde{A}_{\vec{h}},$$

donde $\vec{h} = \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$.

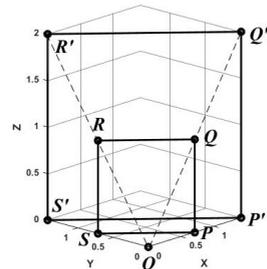
El único punto que se mantiene invariante al aplicar una simetría puntual es el centro C . Es fácil comprobar que la inversa de una simetría puntual de matriz \tilde{A}_C es ella misma puesto que $\tilde{A}_C \cdot \tilde{A}_C = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_O \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_O \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_O \cdot \tilde{I} \cdot \tilde{A}_O \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{I} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}} = \tilde{I}$.

6.2.3. Homotecias

Al igual que en el plano real (ver sec. 4.2.4), se denomina **homotecia** de centro el punto C y razón $k > 0$ a la transformación $H_{C,k}$ de \mathbb{R}^3 que se caracteriza porque $\overrightarrow{CP'} = k \cdot \overrightarrow{CP}$ para cada $P \in \mathbb{R}^3$. Las homotecias no son isometrías (salvo cuando $k = 1$).

Las figuras homotéticas son semejantes y los segmentos homólogos (homotéticos) mantienen la razón de proporcionalidad k respecto los originales. Por tal razón, para $k > 1$ las figuras homotéticas son *más grandes* que las originales, y para $k < 1$ son más pequeñas.

Si se aplica una homotecia de razón $k = 2$ con centro al origen, $H_{O,2}$, al cuadrado unidad de vértices $P(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 0)$, $Q(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, 1)$, $R(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 1)$, $S(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0)$ se obtiene el cuadrilátero dado por los puntos $P'(\sqrt{2}, 0, 0)$, $Q'(\sqrt{2}, 0, 2)$, $R'(0, \sqrt{2}, 2)$, $S'(0, \sqrt{2}, 0)$ que vuelve a ser otro cuadrado como se observa en la figura adjunta puesto que es una semejanza. Nótese que los lados del cuadrado homotético miden 2 unidades, es decir, k veces la longitud inicial.



El homólogo $P'(x', y', z')$ de un punto $P(x, y, z)$ por una homotecia de razón $k > 0$ centrada al origen O , $H_{O,k}$, viene dado por multiplicar por k las

coordenadas de P , es decir, $\overrightarrow{OP'} = k \cdot \overrightarrow{OP}$, por lo que la matriz de la aplicación lineal asociada es la matriz identidad multiplicada por k (ver ec. (6.1)). Como el origen es invariante, el vector de traslación es nulo. En consecuencia, la ecuación matricial de la homotecia es

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k & 0 & 0 \\ 0 & 0 & k & 0 \\ 0 & 0 & 0 & k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{O,k} \cdot \tilde{P}.$$

Si se quiere realizar respecto otro punto C distinto al origen primero hay que situar C al origen mediante una traslación, realizar la homotecia pedida respecto el origen, y deshacer la traslación previa (ver sec. 6.1.4),

$$\tilde{A}_{C,k} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{C,k} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}},$$

donde $\vec{h} = \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$.

El único punto invariante por una homotecia es el centro C , excepto cuando $k = 1$ puesto que entonces todos se mantienen invariantes. Se comprueba fácilmente que la transformación inversa a $H_{C,k}$ es $H_{C,1/k}$ puesto que $\tilde{A}_{C,k} \cdot \tilde{A}_{C,1/k} = \tilde{I}$.

Si cada coordenada se multiplica por un factor positivo distinto se tiene un **cambio de escala**, ahora bien, esta transformación ya no es una semejanza y no se va a considerar aquí.

6.2.4. Giros sobre un eje y simetría axial

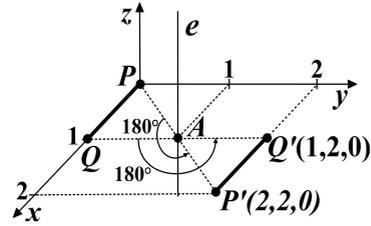
Sea e una recta de \mathbb{R}^3 y $\alpha \in [0, 2\pi[$. Se llama **giro de eje** e y amplitud α a la isometría (directa) del espacio, denotada $G_{e,\alpha}$, que a cada punto $P \in \mathbb{R}^3$ le hace corresponder el punto P' de manera que:

- se mantiene la distancia al eje: $d(P, e) = d(P', e)$.
- el eje e está contenido en el plano mediatriz (único) del segmento $\overline{PP'}$.
- α es el ángulo que forman los planos dados por P con e , y P' con e .

Por tanto, α es el ángulo que también forman \overrightarrow{AP} y $\overrightarrow{AP'}$, donde A es el punto de corte del eje e con el plano ortogonal al eje que pasa por P y P' . El signo de α o el sentido de giro viene dado por la dirección positiva del eje e teniendo presente la regla de la mano derecha (ver sec. 5.1.3).

Si $0 < \alpha < 360^\circ$ entonces los únicos puntos invariantes son los del eje e . Si $\alpha = 0$ todos los puntos se mantienen invariantes. En el caso en que $\alpha = 180^\circ$ se le denomina **simetría axial** respecto el eje e .

Sea e la recta que pasa por $A(1, 1, 0)$ y tiene como vector director $\vec{w} = (0, 0, 1)$. En la imagen adjunta se muestra la transformación del segmento \overline{PQ} con $P(0, 0, 0)$, $Q(1, 0, 0)$, por el giro de eje e y amplitud 180° en otro segmento $\overline{P'Q'}$ siendo $P'(2, 2, 0)$ y $Q'(1, 2, 0)$. Obsérvese que $\overline{P'Q'}$ es el simétrico de \overline{PQ} respecto al eje e .



Denotaremos $\tilde{A}_{e,\alpha}$ la matriz del giro $G_{e,\alpha}$. Sea $P(x, y, z)$ un punto del espacio y $P'(x', y', z')$ su homólogo por $G_{e,\alpha}$. Cuando e es el eje OX , utilizando propiedades trigonométricas, se obtiene que la transformación viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{OX,\alpha} \cdot \tilde{P}.$$

De la misma forma, cuando e es el eje OY el giro viene dado por,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & 0 & -\sin \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \alpha & 0 & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{OY,\alpha} \cdot \tilde{P}.$$

Finalmente, cuando e es el eje OZ la transformación viene dada por,

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \alpha & -\sin \alpha & 0 \\ 0 & \sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{OZ,\alpha} \cdot \tilde{P}.$$

Se comprueba fácilmente que la inversa de $G_{e,\alpha}$ es $G_{e,-\alpha}$. En consecuencia, la inversa de una simetría axial es ella misma puesto que $G_{e,\pi} = G_{e,-\pi}$. Cuando e coincide con un eje cartesiano, la matriz asociada al giro de ángulo $-\alpha$ coincide con la matriz traspuesta del giro de ángulo α .

Recuérdese que, por convención, los ángulos de rotación positivos producen rotaciones en sentido antihorario (en contra de las manecillas del reloj) sobre el eje de rotación si se observa el giro desde la parte positiva del eje (ver la regla de la mano derecha de la sección 5.1.3). La dirección positiva del eje la marca el sentido de su vector director. Para los ejes coordenados se suelen utilizar los vectores directores habituales: $\vec{i} = (1, 0, 0)$, $\vec{j} = (0, 1, 0)$, $\vec{k} = (0, 0, 1)$.

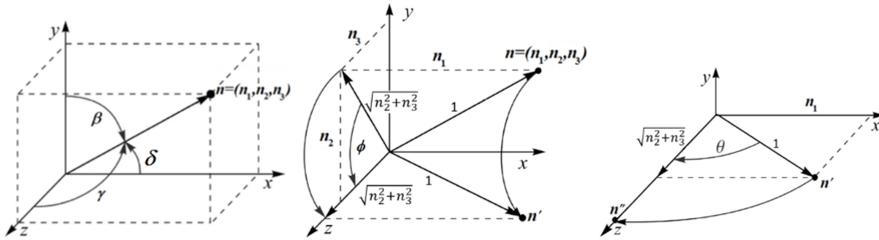
Si se quiere realizar un giro de ángulo α respecto otro eje e distinto a los ejes cartesianos se procede como se indica en los pasos siguientes que luego se concreta en la ecuación (6.3):

- (i) Primero se traslada el eje e para que pase por el origen.
- (ii) Luego se realizan dos giros para que el eje trasladado coincida con el eje OZ .
- (iii) Seguidamente se realiza el giro pedido sobre el eje OZ con $A_{OZ,\alpha}$.
- (iv) Se deshacen los giros de (ii) en orden inverso.
- (v) Se deshace la traslación de (i).

Dado P un punto cualquiera del eje de giro e y $\vec{h} = \overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP}$, se consideran las matrices de traslación $\tilde{A}_{\vec{h}}$ y $\tilde{A}_{-\vec{h}}$ para trasladar el eje al origen y para devolverlo a su posición inicial respectivamente. Sea $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$ el vector director del eje de rotación elegido de módulo unidad. \vec{n} también indica el sentido positivo del eje, por tanto, si se utilizara el vector $-\vec{n}$ equivaldría a rotar en sentido contrario. A partir de la figura inferior izquierda se tiene que $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = (\cos \delta, \cos \beta, \cos \gamma)$ donde δ, β, γ son los ángulos del vector director \vec{n} con los ejes cartesianos. Se definen ϕ, θ como los ángulos de proyección del vector director con los planos coordenados como se ve en las figuras inferiores centro y derecha. Girando un ángulo ϕ sobre el eje OX y un ángulo θ sobre el eje OY se consigue poner el eje de giro e ya trasladado al origen sobre el eje OZ . Estos giros se consiguen con las matrices $\tilde{A}_{OX,\phi}$ y $\tilde{A}_{OY,\theta}$, y con $\tilde{A}_{OY,-\theta}$ y $\tilde{A}_{OX,-\phi}$ se deshacen. Además, para realizar los giros anteriores no hace falta obtener los ángulos, pues es suficiente con sus valores cosenos y senos que verifican $\sin \phi = \frac{n_2}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}$, $\cos \phi = \frac{n_3}{\sqrt{n_2^2 + n_3^2}}$, $\sin \theta = n_1$, $\cos \theta = \sqrt{n_2^2 + n_3^2}$ como se puede deducir de las figuras inferiores y las relaciones trigonométricas de un triángulo rectángulo. De ese modo se tiene que

$$\tilde{A}_{OX,\phi} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & n_3/\sqrt{n_2^2 + n_3^2} & -n_2/\sqrt{n_2^2 + n_3^2} \\ 0 & 0 & n_2/\sqrt{n_2^2 + n_3^2} & n_3/\sqrt{n_2^2 + n_3^2} \end{pmatrix},$$

$$\tilde{A}_{OY,\theta} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{n_2^2 + n_3^2} & 0 & -n_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & n_1 & 0 & \sqrt{n_2^2 + n_3^2} \end{pmatrix}.$$



Si $\sqrt{n_2^2 + n_3^2} = 0$ significa que el eje de giro es paralelo al eje OX por lo que no se requiere aplicar ningún giro sobre el eje OX (se puede tomar $\tilde{A}_{OX,\phi}$ como la identidad).

En resumen, dado un eje de giro e determinado por un punto P y un vector director unitario $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3)$, la matriz que realiza la transformación de girar un ángulo α en sentido antihorario (según la regla de la mano derecha en la dirección positiva de \vec{n} , ver sección 5.1.3) es (ver sec. 6.1.4)

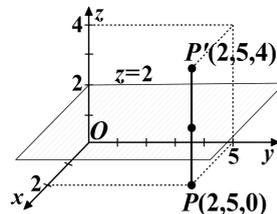
$$\tilde{A}_{e,\alpha} = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{OX,-\phi} \cdot \tilde{A}_{OY,-\theta} \cdot \tilde{A}_{OZ,\alpha} \cdot \tilde{A}_{OY,\theta} \cdot \tilde{A}_{OX,\phi} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}}. \quad (6.3)$$

Un eje de giro es una recta e que también se puede determinar por dos puntos distintos $Q(q_1, q_2, q_3)$ y $R(r_1, r_2, r_3)$ de ésta. En este caso se puede tomar $P = Q$ y $\vec{n} = (n_1, n_2, n_3) = \frac{1}{\|\vec{RQ}\|} \vec{RQ} = \frac{(q_1-r_1, q_2-r_2, q_3-r_3)}{\sqrt{(q_1-r_1)^2 + (q_2-r_2)^2 + (q_3-r_3)^2}}$. Se insiste en que el signo de rotación positivo en el ángulo viene dado por la regla de la mano derecha con el pulgar apuntando en el sentido del vector director \vec{n} (ver sec. 5.1.3). Ello implica que se debe ir con atención a la hora de nombrar los puntos puesto que, como $\vec{QR} = -\vec{RQ}$, puede ser que no se obtenga la orientación de giro adecuada sino la contraria.

6.2.5. Simetrías respecto un plano

Dado un plano π se llama **simetría ortogonal**, o simplemente **simetría plana** respecto a π a la isometría (inversa), denotada S_π , que a cada punto P de \mathbb{R}^3 le hace corresponder el punto P' de manera que π es el plano mediatriz del segmento $\overline{PP'}$. A su matriz la denotaremos \tilde{A}_π .

Sea π el plano horizontal dado por $z = 2$. En la imagen adjunta se muestra el simétrico respecto a π del punto $P(2, 5, 0)$ que viene dado por $P'(2, 5, 4)$. Obsérvese que el plano π corta perpendicularmente al segmento $\overline{PP'}$ por su punto medio.



Sea $\tilde{P}'(1, x', y', z')$ la imagen de un punto $\tilde{P}(1, x, y, z)$ por una simetría respecto el plano π , entonces se tiene que $\tilde{P}' = \tilde{A}_\pi \cdot \tilde{P}$. Cuando se realiza una

simetría respecto algún plano coordenado simplemente hay que cambiar el signo a la coordenada restante. Más concretamente, una simetría axial respecto el plano XY (plano $z = 0$) viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{XY} \cdot \tilde{P},$$

una simetría axial respecto el plano YZ (plano $x = 0$) viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{YZ} \cdot \tilde{P},$$

y una simetría axial respecto el plano XZ (plano $y = 0$) viene dada por

$$\begin{pmatrix} 1 \\ x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \text{ i.e., } \tilde{P}' = \tilde{A}_{XZ} \cdot \tilde{P}.$$

Si se desea realizar la simetría respecto un plano cualquiera $\pi \equiv ax + by + cz + d = 0$ basta con situarlo sobre el plano XY , realizar una simetría con \tilde{A}_{XY} y retornarlo a su posición inicial. Para ello se realizan los siguientes pasos obteniéndose la ecuación (6.4):

- (i) Se traslada π para que pase por el origen.
- (ii) Se realizan dos giros para ponerlo horizontal, es decir, para que el vector director unitario del plano (y perpendicular a éste) $\vec{n} = \frac{1}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}(a, b, c)$ sea paralelo al eje OZ . Ello se consigue mediante los giros determinados por las matrices $\tilde{A}_{OX,\phi}$ y $\tilde{A}_{OY,\theta}$ de la sección 6.2.4 con los valores actuales de \vec{n} .
- (iii) Se realiza una simetría respecto el plano XY .
- (iv) Se deshacen los giros de (ii) en orden inverso.
- (v) Se deshace la traslación de (i).

En consecuencia (ver sec. 6.1.4),

$$\tilde{A}_\pi = \tilde{A}_{-\vec{h}} \cdot \tilde{A}_{OX,-\phi} \cdot \tilde{A}_{OY,-\theta} \cdot \tilde{A}_{XY} \cdot \tilde{A}_{OY,\theta} \cdot \tilde{A}_{OX,\phi} \cdot \tilde{A}_{\vec{h}}, \quad (6.4)$$

donde, si P es un punto cualquiera del plano π , $\vec{h} = \overrightarrow{PO} = -\overrightarrow{OP}$.

Los puntos del plano π son los únicos invariantes. Es fácil comprobar que la inversa de una simetría plana es ella misma.

Una simetría central (ver sec. 6.2.2) se puede obtener como producto de las tres simetrías dadas por los planos coordenados (el orden no importa al conmutar las matrices por ser todas diagonales), obteniendo su matriz como la matriz producto: $\tilde{A}_O = \tilde{A}_{XZ} \cdot \tilde{A}_{YZ} \cdot \tilde{A}_{XY}$.

6.2.6. Productos habituales de semejanzas en \mathbb{R}^3

Al igual que en \mathbb{R}^2 , las ecuaciones que definen las semejanzas suelen ser más sencillas cuando se aplican al origen O , sobre el eje OZ o sobre el plano XY , y para obtener las ecuaciones fuera de estos casos se suelen utilizar productos de transformaciones ya conocidas en vez de calcular directamente dichas ecuaciones como se ha visto en las secciones anteriores.

Sea e un eje, π un plano, C un punto y $\vec{h} = \overrightarrow{CO} = -\overrightarrow{OC}$ el vector que tiene origen en C y final en O . Sea α un ángulo y $k > 0$ una razón cualesquiera fijados. A continuación se muestran algunos casos de producto (composición) de semejanzas utilizados habitualmente para realizar semejanzas con centro distinto al origen, eje distinto a la recta OZ o plano distinto al plano XY . Recuérdese que cuando se tiene un producto de transformaciones éstas se van multiplicando de derecha a izquierda.

1. $S_C = T_{-\vec{h}} \cdot S_O \cdot T_{\vec{h}}$, es decir, para realizar una simetría puntual con centro un punto cualquiera C , primero se traslada dicho punto al origen, luego se realiza la simetría central, y finalmente se deshace la traslación inicial (ver sec. 6.2.2).
2. $H_{C,k} = T_{-\vec{h}} \cdot H_{O,k} \cdot T_{\vec{h}}$, es decir, para realizar una homotecia con centro un punto cualquiera C , primero se traslada dicho punto al origen, luego se realiza la homotecia respecto al origen, y finalmente se deshace la traslación inicial (ver sec. 6.2.3).
3. $G_{e,\alpha} = T_{-\vec{h}} \cdot G_{OX,-\phi} \cdot G_{OY,-\theta} \cdot G_{OZ,\alpha} \cdot G_{OY,\theta} \cdot G_{OX,\phi} \cdot T_{\vec{h}}$ donde C es un punto cualquiera del eje e , ϕ es el ángulo que va de la proyección del eje sobre el plano YZ al eje OZ , θ es el ángulo que va de la proyección del eje sobre el plano XZ al eje OZ (ver sec. 6.2.4). Es decir, para realizar un giro alrededor de un eje cualquiera, primero se sitúa dicho eje sobre el eje OZ , luego se realiza el giro respecto al eje OZ y finalmente se deshacen las transformaciones iniciales. Para situar el eje e sobre el eje OZ primero se traslada para que pase por el origen y luego se realizan dos giros uno sobre el eje OX y otro sobre el eje OY para ponerlo vertical.

4. $S_\pi = T_{-\vec{h}} \cdot G_{OX,-\phi} \cdot G_{OY,-\theta} \cdot S_{XY} \cdot G_{OY,\theta} \cdot G_{OX,\phi} \cdot T_{\vec{h}}$ donde C es un punto cualquiera del plano de simetría π , ϕ es el ángulo que va de la proyección del vector director del plano π sobre el plano YZ al eje OZ , θ es el ángulo que va de la proyección del vector director del plano π sobre el plano XZ al eje OZ (ver sec. 6.2.5). Es decir, para realizar una simetría respecto a un plano cualquiera, primero se sitúa dicho plano sobre el plano XY , luego se realiza la simetría sobre el plano XY , y finalmente se deshacen las transformaciones iniciales. Recuérdese que el vector director de un plano es perpendicular a dicho plano. Para situar el plano π sobre el plano XY primero se traslada para que pase por el origen y luego se realizan dos giros uno sobre el eje OX y otro sobre el eje OY para poner vertical el vector director del plano y, en consecuencia, situar el plano de forma horizontal.

6.3. EJEMPLOS DE SEMEJANZAS EN EL ESPACIO REAL

En esta sección se van a ver ejemplos de las transformaciones vistas en la sección 6.2 y de algunos productos. Recuérdese que para las figuras curvas en \mathbb{R}^3 de N puntos se utiliza una matriz en donde cada columna representa a un punto el espacio en coordenadas homogéneas (ver sec. 5.2.1),

$$\tilde{P} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 & \cdots & x_N \\ y_1 & y_2 & y_3 & \cdots & y_N \\ z_1 & z_2 & z_3 & \cdots & z_N \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Por ese motivo se pueden calcular las imágenes por una transformación afín de matriz \tilde{A} de todos los puntos que definen la curva con un único comando, $\tilde{P}' = \tilde{A} \cdot \tilde{P}$, que escribimos como sigue (adaptar los nombres según corresponda).

```
Ppt=At*Pt; % P-prima-tilde = A-tilde * P-tilde
```

Para las figuras dadas por curvas el comando de representación gráfica utilizando coordenadas homogéneas es (ver sec. 5.2.1)

```
plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Pt=([1;x;y;z])
```

Como se ha visto en la sección 5.2.2, para representar una superficie se requiere de una matriz (una malla) de vectores de puntos

$$\tilde{P}(i,j) = \begin{pmatrix} 1 \\ X(i,j) \\ Y(i,j) \\ Z(i,j) \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, n_2, \quad j = 1, \dots, n_1, \quad (6.6)$$

por lo que se tiene un *array* `Pt` con tres dimensiones. En este caso no se pueden calcular todas las imágenes a la vez y se necesita de dos bucles¹,

$$\widetilde{P}'(i, j) = \tilde{A} \cdot \widetilde{P}(i, j), \quad i = 1, \dots, n_2, \quad j = 1, \dots, n_1,$$

que calculamos de la siguiente forma:

```
Ppt=Pt; for j=1:n1; for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i, j, :)=At*reshape(Pt(i, j, :), 4, 1); % Ppt=At*Pt
end; end; % fin bucles malla
```

El comando utilizado para la representación gráfica de superficies es (ver sec. 5.2.2)

```
surf(Ppt(:, :, 2), Ppt(:, :, 3), Ppt(:, :, 4))
```

aunque también hay otros comandos posibles como, por ejemplo, `contour`, `surf`, `mesh`, `meshc`, y `pcolor`.

Para no tener que repetir los comandos para curvas y para superficies, se va a incluir un condicional para diferenciarlos:

```
if ndims(Pt) < 3, comandos para curvas
else, comandos para superficies
end;
```

Si la variable `Pt` tiene tres dimensiones (ver ec. (6.6)), entonces se está considerando una superficie. Si es menor que tres (ver ec. (6.5)) entonces se está considerando una curva. Por tanto, para aplicar la transformación dada por la matriz `At` se van a ejecutar los comandos siguientes:

```
if ndims(Pt) < 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt; for j=1:n1; for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i, j, :)=At*reshape(Pt(i, j, :), 4, 1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end; end; end; % Fin bucles malla
```

De forma similar, para la representación gráfica se diferenciará según la variable `Pt` tenga tres dimensiones (una superficie, ver ec. (6.6)) o menos (una curva, ver ec. (6.5)). Se representarán los puntos iniciales (`Pt`) y los puntos transformados (`Ppt`). Para ello se utilizarán los comandos siguientes:

```
figure, hold on, axis equal, grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt) < 3, plot3(Pt(2, :), Pt(3, :), Pt(4, :)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2, :), Ppt(3, :), Ppt(4, :)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :, 2), Ppt(:, :, 3), Ppt(:, :, 4)), end % Superficie
```

¹Se podría omitir un bucle calculando la imagen de toda una fila o columna de puntos de la malla a la vez, pero no simplifica el proceso de forma significativa.

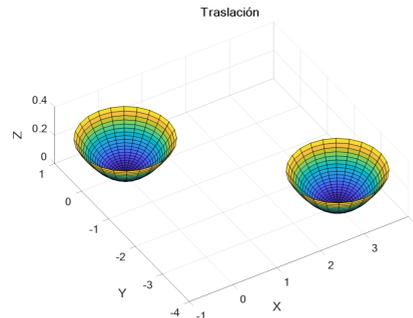
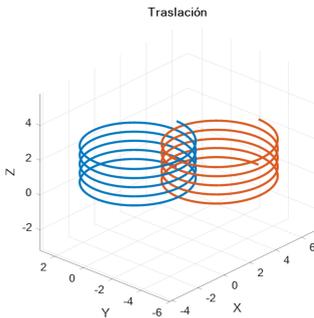
En caso de querer dibujar encima de un gráfico anterior se debe comentar o eliminar la línea que empieza con `figure, ...`. En caso de querer calcular sólo la imagen de un punto basta con tratar el punto como si fuera una curva.

Aunque más adelante, en la sección 6.3.7, se indica cómo proceder para el producto de transformaciones genéricas, se ha optado por presentarlo de forma compacta en los productos habituales vistos en la sección 6.2.6. De este modo, para realizar una semejanza concreta basta con definir sus elementos esenciales en la línea marcada con `%... (VARIAR)` y tener predefinida la figura (o puntos) a transformar en `Pt`.

6.3.1. Ejemplo de traslación

Se va a **trasladar** una figura situada sobre el origen $O(0, 0, 0)$ a la posición $Q(3, -3, 0)$, por tanto, el vector de traslación es $\vec{h} = \overrightarrow{OQ} = Q - O = (3, -3, 0)$ (ver sec. 6.2.1). Se considera primero la figura curva de la sección 5.3.2 que se asume definida en `Pt`. Seguidamente se efectúan las órdenes siguientes obteniendo la imagen inferior izquierda en donde se observa a la izquierda la curva inicial situada sobre O y a la derecha la curva trasladada situada sobre Q .

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt la TRASLACIÓN
h=[3;-3;0]; % Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(4); Ah(2:4,1)=h % MATRIZ DE TRASLACIÓN
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah; if ndims(Pt) < 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt; for j=1:n1; for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:) = At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure, hold on, axis equal, grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt) < 3, plot3(Pt(2,:), Pt(3,:), Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:), Ppt(3,:), Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :, 2), Ppt(:, :, 3), Ppt(:, :, 4)), end % Superficie --
title('Traslación')
```



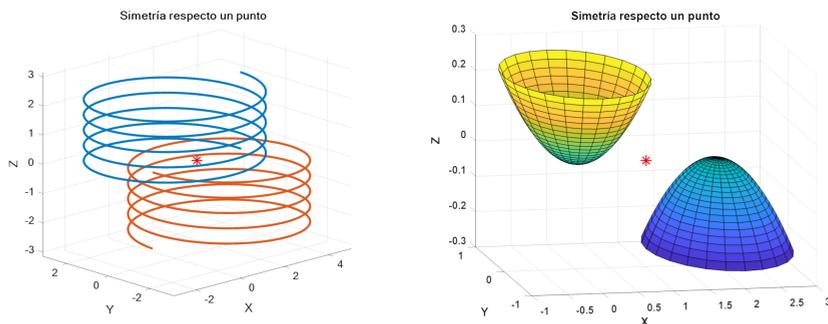
Seguidamente se transforma la figura dada por el paraboloides de la sección 5.3.4 que se asume definida en Pt . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa a la izquierda la superficie inicial situada sobre O y a la derecha la superficie trasladada situada sobre Q .

Para realizar cualquier otra traslación basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

6.3.2. Ejemplo de simetría respecto un punto

Se calcula primero la **simetría** respecto el punto $C(1,0,0)$ (ver sec. 6.2.2) de la figura curva de la sección 5.3.2 que se asume definida en Pt . Con los comandos siguientes se obtiene la imagen inferior izquierda en donde se observa el muelle inicial más elevado, el muelle simétrico más bajo y el centro de simetría marcado con un asterisco.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PUNTO
C=[1;0;0]; % Centro de simetría (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Ac1=eye(4);Ac1(2:4,1)=C;
Ao=diag([1,-1,-1,-1]); % Matriz de simetría central
Asc=Ac1*Ac % MATRIZ DE SIMETRÍA PUNTUAL
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Asc;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end % Superficie --
title('Simetría respecto un punto');
plot3(C(1),C(2),C(3),'r*') % Se dibuja el centro C
```



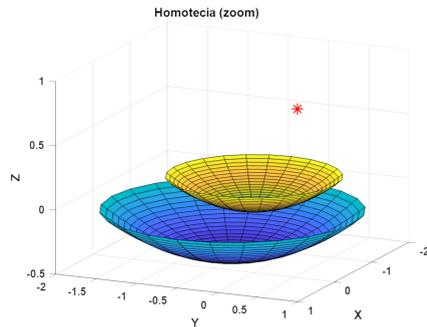
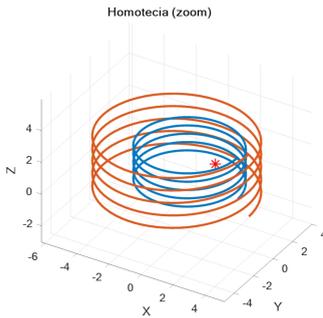
Seguidamente se transforma el paraboloide de la sección 5.3.4 que se asume definido en Pt . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa la superficie inicial arriba a la izquierda, la simétrica abajo a la derecha y el centro de simetría marcado con un asterisco.

Para realizar cualquier otra simetría puntual basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

6.3.3. Ejemplo de homotecia

Se va a realizar un *zoom* al 150%, es decir, una **homotecia** de razón $k = 1.5$, respecto al punto $C(1, 1, 1)$ (ver sec. 6.2.3) de la figura curva de la sección 5.3.2 que se asume definida en Pt . Con los comandos siguientes se obtiene la imagen inferior izquierda en donde se observa el muelle inicial más pequeño, el homotético que es el más grande y el punto sobre el que se realiza la homotecia marcado con un asterisco.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt los HOMOTÉTICOS
r=1.5;C=[1;1;1]; % Razón y centro (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Acl=eye(4);Acl(2:4,1)=C;
Aor=diag([1,r,r,r]); % Matriz homotetica de razón r
AhCr=Acl*Aor*Ac % MATRIZ DE HOMOTECIA
% A continuación: CÁLCULO REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AhCr;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :, 2),Ppt(:, :, 3),Ppt(:, :, 4)), end% Superficie --
title('Homotecia (zoom)');
plot3(C(1),C(2),C(3),'*r'); % Se dibuja el centro C
```



Seguidamente se transforma el paraboloides de la sección 5.3.4 que se asume definido en Pt . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa la superficie inicial (la superior), la superficie homotética (la inferior) y el centro sobre el que se realiza la homotecia marcado con un asterisco.

Para realizar cualquier otra homotecia basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

6.3.4. Ejemplo de giro y simetría respecto un eje

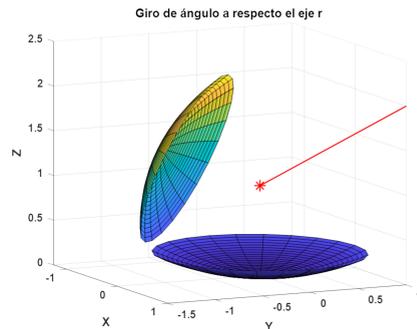
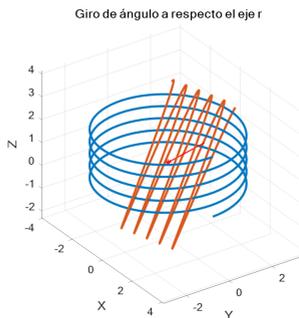
Se va a realizar un **giro** de 180° o **simetría axial** respecto a la recta dada por $x = y = z - 1$ (ver sec. 6.2.4) a la figura curva de la sección 5.3.2 que se asume definida en Pt . La recta se determina mediante dos puntos distintos de ésta. En este caso se toman, por ejemplo, $Q(0, 0, 1)$ y $R(1, 1, 2)$ que verifican las ecuaciones de la recta. Se toma como vector director unitario \vec{N} de la recta el vector \overline{RQ} normalizado, en consecuencia, el sentido positivo de la recta es el que va de R a Q . Ello define el sentido positivo de giro mediante la regla de la mano derecha poniendo el pulgar en R en dirección a Q (ver sec. 5.1.3). Con los comandos siguientes se obtiene la imagen inferior izquierda en donde se observa en vertical el muelle inicial e inclinado el muelle girado. También se representa el segmento \overline{RQ} que es un trozo del eje de giro y la posición de Q con un asterisco que indica el sentido positivo de la recta.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=pi;Q=[0;0;1];R=[1;1;2]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
```

```

Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq% MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)<3,Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else,Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)<3,plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else,surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)),end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R];plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');

```



Seguidamente se transforma el paraboloides de la sección 5.3.4 que se asume definido en Pt . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa abajo la superficie inicial y arriba la girada respecto al segmento de recta también representado. También se muestra la posición de Q con un asterisco que indica el sentido positivo de la recta.

Para realizar cualquier otro giro basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

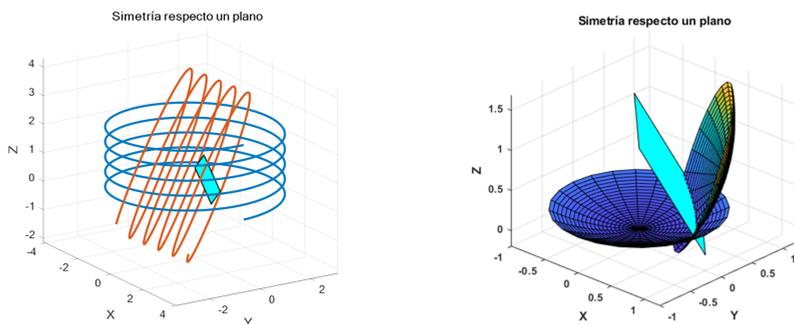
6.3.5. Ejemplo de simetría respecto un plano

Definiremos un plano π en \mathbb{R}^3 mediante un punto P y un vector perpendicular a éste \vec{N} . Si π se define mediante una restricción lineal del tipo

$ax + by + cz + d = 0$ donde a, b, c, d son coeficientes reales se puede elegir $\vec{N} = (a, b, c)$ (no nulo) y P un punto (x, y, z) cualquiera que verifique la restricción. Alternativamente, si el plano se determina por tres puntos A, B, C no alineados se puede tomar $P = A$, y $\vec{N} = \overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}$. Si A, B y C son los vectores que definen los puntos A, B y C , entonces $N = \text{cross}(B-A, C-A)$.

En este ejemplo se busca la **simetría** de la figura curva de la sección 5.3.2 respecto el plano $\pi \equiv x + y + z - 1 = 0$ (ver sec. 6.2.5) que se asume definida en Pt . En este caso se puede tomar $P(1, 0, 0)$ que verifica la ecuación y $\vec{N} = (1, 1, 1)$. Se ejecutan los comandos siguientes y se obtiene la imagen inferior izquierda en donde se observa el muelle original en vertical, el muelle simétrico inclinado y un trozo del plano de simetría.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PLANO
P=[1;0;0];N=[1;1;1];% P, N (VARIAR)
N=N/norm(N);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);
Ap=eye(4);Ap(2:4,1)=-P;Ap1=eye(4);Ap1(2:4,1)=P;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);Aoy1=Aoy;
Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);Aoy1(4,2)=Aoy(2,4);
Aoy1(2,4)=Aoy(4,2); Axy=diag([1,1,1,-1]);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aspi=Ap1*Aox1*Aoy1*Axy*Aoy*Aox*Ap% MATRIZ DE SIMETRÍA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aspi;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Simetría respecto un plano');
%Se dibuja un trozo del plano (a partir de 4 puntos)
fill3([1;0;-1;0],[0;1;1;0],[0;0;1;1],'c')% (VARIAR)
```



Seguidamente se transforma el paraboloides de la sección 5.3.4 que se asume definido en $\mathbb{P}t$. Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa abajo en horizontal la superficie inicial, arriba a la derecha la simétrica y un trozo del plano de simetría.

Para realizar cualquier otra simetría plana basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

6.3.6. Ejemplo de cizallamiento o sesgado

En un cizallamiento o sesgado la imagen se deforma de modo distinto en diferentes zonas y permite simular distintas perspectivas. Esta transformación no es una semejanza y se incluye como ejemplo de tales transformaciones afines. Sea e un eje ordenado, un **cizallamiento** o **sesgado** en la dirección de e desplaza cada punto una longitud proporcional a sus distancias a e y se denotará C_e con matriz $\tilde{A}_{C,e}$. El cambio en el eje ordenado es una combinación lineal de las coordenadas iniciales transformando un cubo en un paralelepípedo. Si e no es un eje ordenado, se sitúa sobre el eje OZ , se hace el cizallamiento y se deshacen las transformaciones iniciales al igual que en un giro (ver sec. 6.2.4).

Un cizallamiento en la dirección de los ejes ordenados OX , OY y OZ queda determinado por las siguientes matrices con a y b no nulos a la vez:

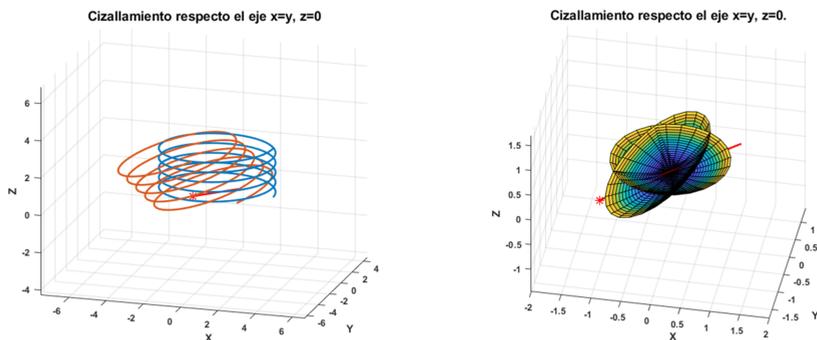
$$\tilde{A}_{C,OX} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & b \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}_{C,OY} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 1 & b \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \tilde{A}_{C,OZ} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & a & b & 1 \end{pmatrix}.$$

Los únicos puntos invariantes son los del eje (puesto que están a distancia nula del mismo). La transformación inversa es otro cizallamiento con los coeficientes no nulos fuera de la diagonal cambiados de signo en la misma posición de la matriz.

Se considera la figura curva de la sección 5.3.2 definida en Pt y se calcula su cizallamiento con constantes de proporcionalidad $a = b = 1$ respecto al eje $e \equiv x = y, z = 0$. Vamos a utilizar dos puntos distintos Q y R para definir la recta, por ejemplo, $Q(-1, -1, 0)$ y $R(1, 1, 0)$ que verifican su ecuación. Al igual que en un giro (ver sec. 6.3.4), el orden en que se definen los puntos indica el sentido positivo del eje y , en consecuencia, el sentido del sesgado.

Con los siguientes comandos se obtiene la figura inferior izquierda en donde se observa que la figura se deforma (no se mantienen ángulos ni proporciones entre los lados) y, en consecuencia, no es una semejanza. En vertical se encuentra el muelle inicial y con inclinación el muelle sesgado. Se observa un cizallamiento positivo en la dirección de Q , y un cizallamiento negativo en sentido contrario. También se representa un trozo del eje de cizallamiento (el segmento \overline{QR}) y la posición de Q con un asterisco que indica el sentido positivo de la recta.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el CIZALLAMIENTO
a=1;b=1;Q=[-1;-1;0];R=[1;1;0]; % a,b,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
ACoz=eye(4);ACoz(4,2)=a;ACoz(4,3)=b; % Matriz ACoz
ACe=Aq1*Aox1*Aoy1*ACoz*Aoy*Aox*Aq % MATRIZ DE CIZALLA.
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACe;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :, 2),Ppt(:, :, 3),Ppt(:, :, 4)), end % Superficie --
title('Cizallamiento respecto el eje x=y, z=0');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
```



Seguidamente se transforma la figura de la antena parabólica de la sección 5.3.4 que se asume definida en Pt . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se observa un cizallamiento positivo en la dirección de Q y uno negativo en sentido contrario. También se representa un segmento del eje de cizallamiento. En ambas figuras anteriores se puede observar una deformación mayor de la imagen según los puntos se alejan del eje.

Para realizar cualquier otro cizallamiento basta ejecutar los comandos anteriores modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

6.3.7. Procedimiento para el producto de semejanzas

Vamos ahora a **componer** varias semejanzas a la figura inicial. Para ello bastará con seguir los siguientes pasos:

1. Tener definida la figura (curva o superficie) en Pt .
2. Copiar y pegar los comandos de cada transformación siguiendo el orden pedido cambiando únicamente las líneas indicadas con `%... (VARIAR)` de modo que se adapte a la transformación requerida.
3. Intercalar entre las líneas de comandos de cada transformación el comando $Pt=P_{Pt}$; para iniciar la siguiente transformación con la imagen transformada por la anterior.
4. Comentar los comandos `figure` que se quiera para representar gráficamente sobre una misma figura o una a cada paso.

6.3.8. Ejemplo de producto de transformaciones afines

Se busca el transformado del paraboloide de la sección 5.3.4 aplicando primero el giro que sitúa el eje OZ (la recta $x = y = 0$) en la bisectriz del

primer octante (la recta $x = y = z$) con apertura hacia valores positivos de los ejes cartesianos y, a continuación, desplazándolo una unidad positiva en la dirección de cada eje coordenado. Como se deduce a continuación, equivale a aplicar un giro de ángulo 54.7356° sobre la recta que pasa por $Q = (0, 0, 0)$ y $R = (1, -1, 0)$ y seguidamente una traslación de vector $\vec{h} = (1, 1, 1)$.

El eje e del giro pedido debe ser perpendicular a las rectas $x = y = z$ (bisectriz del primer octante) y a $x = y = 0$ (eje OZ) de vectores directores $\vec{v}_1 = (1, 1, 1)$ y $\vec{v}_2 = (0, 0, 1)$ respectivamente. El ángulo α de giro debe ser el que hay entre los vectores directores anteriores, es decir, $\alpha = \widehat{\vec{v}_1 \vec{v}_2}$. En consecuencia, $\alpha = \arccos\left(\frac{\vec{v}_1 \cdot \vec{v}_2}{\|\vec{v}_1\| \cdot \|\vec{v}_2\|}\right) = 54.7356^\circ$. Un vector director del eje está determinado por el producto vectorial de los vectores directores de las rectas, $\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2 = (1, -1, 0)$. Obsérvese que el origen $O(0, 0, 0)$ es la intersección de ambas rectas y, por tanto, es un punto invariante que forma parte del eje e . Se toman como puntos de la recta $Q = O$ y $R = Q + \vec{N} = (1, -1, 0)$. El signo del ángulo de giro depende de la orientación del vector director de la recta teniendo en cuenta la regla de la mano derecha (ver sec. 5.1.3) apuntando el pulgar hacia Q desde R (ver sec. 6.3.4). Como se quiere que la antena parabólica tenga como eje la recta $x = y = z$ con la parte cóncava hacia el sentido positivo de los ejes coordenados, se gira un ángulo de $+\alpha$. La segunda transformación consiste en una traslación de vector $\vec{h} = (1, 1, 1)$. Se pueden utilizar los siguientes comandos para los cálculos anteriores: `N=cross([1;1;1],[0;0;1]);Q=[0;0;0];R=Q+N;`
`a=acos(dot([1;1;1],[0;0;1])/(norm([1;1;1])*norm([0;0;1])));`

A continuación, se encuentran los comandos que realizan ambas transformaciones según las indicaciones de la sección 6.3.7. Primero se asumen ejecutados los comandos de la sección 5.3.2 que definen la curva en la variable `Pt`. A continuación se añaden los comandos de la sección 6.3.4 modificando solamente la línea marcada con `%... (VARIAR)` con los datos del giro a realizar. Antes de aplicar la siguiente transformación se redefine la variable `Pt` con la salida de la transformación anterior. Finalmente se aplica la traslación copiando los comandos de la sección 6.3.1 modificando únicamente la línea marcada con `%... (VARIAR)`.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=a; Q=[0,0,0]; R=[1,-1,0]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
```

```

Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aql*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq% MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
%
Pt=Ppt;% Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt la TRASLACIÓN
h=[1,1,1];% Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(4);Ah(2:4,1)=h% MATRIZ DE TRASLACIÓN
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
%figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Traslación')

```

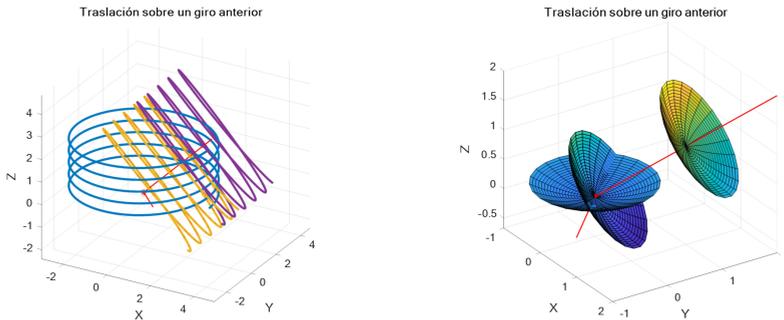
Para poder comprobar visualmente que se ha girado el eje del muelle (eje OZ) a la recta $x + y + z = 1$ se dibuja un trozo de ésta y se cambia el título por uno más adecuado.

```

title('Traslación sobre un giro anterior')
plot3([0;2],[0;2],[0;2],'r'),view(66,13),axis equal
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z')

```

Al ejecutar los comandos anteriores se obtiene la figura inferior izquierda en donde se aprecia el muelle inicial en vertical a la izquierda, el muelle girado al centro junto con un trozo del eje de giro (segmento inferior izquierdo), la figura final arriba a la derecha y el eje sobre el que se traslada la figura que es el eje del muelle final.



Seguidamente se transforma la figura curva de la sección 5.3.4 que se asume definida en \mathbb{P}^3 . Se ejecutan los comandos anteriores obteniendo la imagen superior derecha en donde se puede apreciar la superficie inicial (paraboloide) horizontal abajo a la izquierda, la que está girada abajo a la izquierda inclinada, el eje de giro a la izquierda, la figura final arriba a la derecha y el eje sobre el que se traslada la figura que es el eje del paraboloide final. Al igual que antes, para poder comprobar visualmente que se ha girado el eje del paraboloide (eje OZ) a la recta $x + y + z = 1$ se dibuja un trozo de ésta y se cambia el título por uno más adecuado.

6.3.9. Ejemplo de determinación de una transformación afín a partir de cuatro puntos

Como ya se ha visto en la sección 6.1.5, conociendo la imagen de cuatro puntos distintos (sin que haya tres alineados) por una transformación afín h en R^3 , la transformación queda definida de forma unívoca. Vamos a fijar la imagen de cuatro puntos no alineados tres a tres de la transformación producto h de la sección 6.3.8 para obtener la figura transformada final en un sólo paso.

Se tiene que $P(0, 0, 0)$, $Q(\sqrt{3}, 0, 0)$, $R(0, \sqrt{3}, 0)$, $S(0, 0, \sqrt{3})$ son cuatro puntos no alineados tres a tres, y que $P' = h(P) = (1, 1, 1)$, $Q' = h(Q) = (\frac{1351}{571}, \frac{362}{571}, 0)$, $R' = h(R) = (\frac{362}{571}, \frac{1351}{571}, 0)$, $S' = h(S) = (2, 2, 2)$. Mediante estos valores se construye un sistema lineal con solución única que determina la matriz de la transformación, es decir, se busca

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ h_1 & a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ h_2 & a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ h_3 & a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{tal que} \quad \begin{cases} \tilde{A} \cdot \tilde{P} = \tilde{P}' \\ \tilde{A} \cdot \tilde{Q} = \tilde{Q}' \\ \tilde{A} \cdot \tilde{R} = \tilde{R}' \\ \tilde{A} \cdot \tilde{S} = \tilde{S}' \end{cases}.$$

La matriz \tilde{A} se consigue ejecutando los comandos siguientes. Los cuatro puntos considerados y sus imágenes se entran por filas por comodidad y se-

guidamente se trasponen. Recuérdese que los tres puntos ... permiten partir un comando en diversas líneas.

```
% Determinación directa de la matriz At (A-tilde)
% DEFINICIÓN de los 4 PUNTOS INICIALES en Q:
Q=[0 0 0; sqrt(3) 0 0; 0 sqrt(3) 0; 0 0 sqrt(3)]' % (VARIAR)
% DEFINICIÓN de los 4 PUNTOS FINALES en Qp (Q-prima):
Qp=[1 1 1; 1351/571 362/571 0; 362/571 1351/571 0;...
    2 2 2]' % (VARIAR)
Qt=ones(4,4); Qpt=Qt; Qt(2:4,:)=Q; Qpt(2:4,:)=Qp; % Qt, Qpt.
% CÁLCULO DE LA MATRIZ At (A-tilde):
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 h1 h2 h3;
At=[1 0 0 0; h1 a11 a12 a13; h2 a21 a22 a23; h3 a31 a32 a33];
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,h1,h2,h3]=...
    solve(At*Qt==Qpt,a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,...
    h1,h2,h3);
At=eval(At)
```

obteniendo como resultado

```
At =
    1.0000         0         0         0
    1.0000    0.7887   -0.2113    0.5774
    1.0000   -0.2113    0.7887    0.5774
    1.0000   -0.5774   -0.5774    0.5774
```

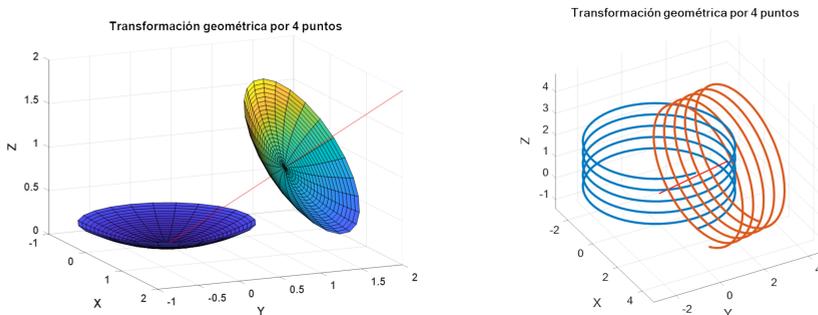
Se asume en P_t primero la figura de la sección 5.3.2 y después la de la sección 5.3.4. A continuación, se les aplica la transformación dada por la matriz A_t calculada y se realiza la representación gráfica con los comandos siguientes indicados al comienzo de la sección 6.3.

```
% SE ASUME  $P_t(4,n_2)=$ CURVA o  $P_t(n_2,n_1,4)=$ SUPERFICIE
% SE COLOCA en  $P_{pt}$  la FIGURA TRANSFORMADA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=At; if ndims(Pt)<3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt; for j=1:n1; for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)<3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Transformación geométrica por 4 puntos');
```

Al igual que antes, para poder comprobar visualmente que se ha girado el eje del paraboloides a la recta $x + y + z = 1$ se dibuja un trozo de ésta con

los comandos siguientes obteniendo los mismos resultados que en la sección 6.3.8 exceptuando que la transformación intermedia no se representa.

```
plot3([0;2],[0;2],[0;2],'r',view(66,13),axis equal
xlabel('X'),ylabel('Y'),zlabel('Z'))
```



Ahora pasamos a comprobar que la matriz del producto de transformaciones es el producto de matrices de cada transformación en el orden adecuado, de izquierda a derecha,

```
Ah*Aea
```

obteniendo como resultado

```
ans =
    1.0000         0         0         0
    1.0000    0.7887   -0.2113    0.5774
    1.0000   -0.2113    0.7887    0.5774
    1.0000   -0.5774   -0.5774    0.5774
```

que, como se observa, coincide con A_t , es decir, $A_t = A_h * A_{ea}$.

También se dispone del comando `fitgeotrans` para ajustar una transformación geométrica a partir de puntos y de `imwarp` para aplicar una transformación geométrica a una imagen digital. Consultar la ayuda para más información. También se tiene el comando `affine3d` para definir una transformación geométrica a partir de la matriz de una transformación afín.

6.4. TRANSFORMACIONES PERSPECTIVAS

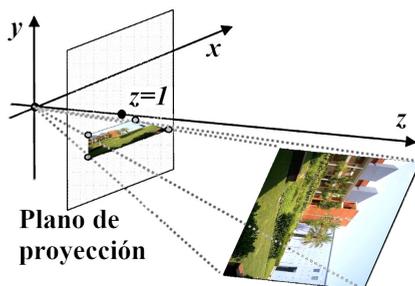
Las transformaciones perspectivas son una generalización de las afines y se incluyen por sus importantes aplicaciones en el mundo actual. Sea B una imagen digital con posiciones (x, y) para cada uno de sus píxeles. En las transformaciones perspectivas se representa en el punto (x, y) el valor $B(x'/z', y'/z')$.

Si x'/z' o y'/z' no son valores enteros se puede considerar el entero más cercano en B (con redondeo) o se puede interpolar su valor. Si no se quiere recortar la imagen se debe considerar un borde blanco alrededor de ésta suficientemente ancho.

La **transformación perspectiva** de un píxel $P(x, y)$ se escribe como sigue

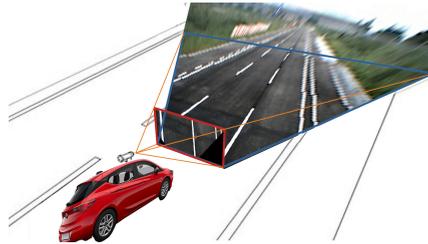
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 & a_{1,1} & a_{1,2} \\ h_2 & a_{2,1} & a_{2,2} \\ \alpha & a_{3,1} & a_{3,2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ x \\ y \end{pmatrix}$$

en donde se utilizan coordenadas homogéneas para el píxel $P(x, y)$ (ver sección 3.1.2) y en donde se asume que $\alpha = 1$ (valor tomado habitualmente). Se interpreta como la proyección sobre el plano $z = 1$ de \mathbb{R}^3 de un plano (la imagen de entrada) colocado en una posición cualquiera del espacio como se muestra en la imagen siguiente.



En una transformación perspectiva cualquier cuadrilátero se convierte en otro cuadrilátero manteniendo la *convexidad*, es decir, la parte interior transformada es la parte interior del cuadrilátero transformado e igual ocurre con la parte exterior. Las transformaciones perspectivas incluyen a las afines puesto que si $a_{31} = a_{32} = 0$ una perspectiva se convierte en una afín. Al igual que en una transformación afín, sólo se consideran matrices regulares y, por tanto, también son transformaciones inversibles. Las transformaciones perspectivas se generalizan a las **transformaciones proyectivas** considerando más opciones para los coeficientes de la matriz de la transformación.

Un ejemplo particular importante en donde se calcula la inversa de una perspectiva (*Inverse Perspective Mapping*) es el caso de la conducción automática de vehículos, puesto que una imagen capturada puede ser puesta en vertical y después se calculan distancias y ángulos entre vehículos como se muestra en la imagen inferior.



6.5. EJERCICIOS

A continuación se proponen ejercicios para verificar la comprensión del capítulo en los que se asume, por defecto, el uso de 4 cifras decimales. Las respuestas de los ejercicios test de autoevaluación se pueden consultar en la sección A.6.

6.5.1. Ejercicios propuestos

P6.1 Realiza las siguientes transformaciones al paraboloides de la sección 5.3.4:

- Un giro de 90° del respecto el eje OX (respetando su sentido positivo).
- Primero una simetría respecto el plano $y + z = 0$ y seguidamente otra simetría respecto el plano XZ .

Observa el comportamiento de las figuras transformadas anteriores e indica si coinciden los resultados finales de los apartados (a) y (b).

P6.2 Considera el **cubo unidad** del espacio real dado por $[0, 1]^3$. Ponlo en vertical sobre un vértice y hazlo rodar sobre el mismo.

Indicaciones: Sigue los siguientes pasos. 1º: Define las aristas del cubo con $P = [0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 0; 1 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 0 \ 0; 1 \ 0 \ 0; 1 \ 1 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 0 \ 0; 0 \ 1 \ 0; 0 \ 1 \ 1; 0 \ 0 \ 1; 0 \ 1 \ 1; 1 \ 1 \ 1; 1 \ 0 \ 1; 1 \ 1 \ 1; 1 \ 1 \ 0]$, $n2 = \text{size}(P, 2)$; $Pt = \text{ones}(4, n2)$; $Pt(2:4, :) = P$; 2º: Realiza primero un giro de 45° sobre el eje OY y luego otro de 45° sobre el eje OX . 3º: Gira el cubo sobre el eje OZ a incrementos de ángulo pequeños sobre una misma ventana gráfica. Además, con el comando `frame2im` se pueden ir guardando en memoria las imágenes que se van obteniendo y luego crear un *GIF animado* con el comando `imwrite`.

P6.3 Calcula la matriz que transforma los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$, $(0, 0, 1)$ en los puntos $(0, -2, -2)$, $(0, 2, 4)$, $(3, 0, 3)$, $(1, 0, -1)$, respectivamente, e indica si es una semejanza.

Indicación: Calcula la transformación de una figura conocida mediante la matriz obtenida como, por ejemplo, la de una esfera unidad o del tetraedro definido por los puntos considerados, y observa si la figura transformada es semejante a la inicial.

P6.4 Gira 90° la “seta” del ejercicio P5.5 alrededor del eje $x = -y = z$ y traslada su base al punto $(-1, 1, -1)$. Considera el sentido positivo como el que tiende hacia la parte positiva del eje OZ . Indica los pasos utilizados y las gráficas intermedias.

P6.5 Realiza una simetría de la “seta” del ejercicio P5.5 respecto el plano $z = 1$ y a continuación una simetría respecto el punto $(a, a, 1)$ donde a es el valor utilizado en el citado ejercicio.

6.5.2. Ejercicios de autoevaluación

T6.1 Sean P y Q dos puntos distintos del espacio y sean P' y Q' sus homólogos por una traslación $T_{\vec{h}}$ no nula, respectivamente. Indica la respuesta correcta.

- (a) La distancia entre los puntos P' y Q' es estrictamente mayor que la distancia entre los puntos P y Q .
- (b) El trasladado por $T_{\vec{h}}$ del punto medio del segmento \overline{PQ} es el punto medio del segmento $\overline{P'Q'}$.
- (c) Ninguna de las otras.
- (d) El punto medio del segmento \overline{PQ} es un punto fijo de $T_{\vec{h}}$.

T6.2 Sea F la superficie lateral de una pirámide circular sin base (o cono truncado) dada por $x^2 + y^2 = (z-1)^2$, $0 \leq z \leq 1$, centrada sobre el eje OZ , con vértice $P(0, 0, 1)$ y base la circunferencia unidad en el plano XY . Indica cuál de las siguientes afirmaciones es **FALSA**:

- (a) F es invariante al realizar un giro de 40° respecto el eje OZ .
- (b) F es invariante al realizar primero una simetría respecto el plano XY y seguidamente una simetría central.
- (c) Al realizar una simetría respecto el plano $z = 0.5$ el vértice P se sitúa en el $(0, 0, 0)$.
- (d) Al realizar una homotecia de razón $1/2$ respecto el punto P se convierte en otra pirámide circular de vértice $(0, 0, 0.5)$ y base el círculo de radio 0.5 sobre el plano XY .

T6.3 Al realizar un giro de 120° en sentido antihorario sobre la recta $x = y = 1 - z$ considerando el sentido positivo del eje en cuando $z > 0$, el punto $(1, -1, -1)$ se transforma en el punto:

- (a) $(-1, -2, 2)$.
- (b) $(-0.3333, 0.6667, -1.3333)$.
- (c) $(-2.3333, -0.3333, 1.6667)$.
- (d) $(-2, 1, 0)$.

T6.4 Al realizar una simetría respecto el plano $x - 2y = z$, el segmento que une los puntos $(0, 1, 0)$ y $(-2, 1, 0)$ se convierte en el segmento que une los puntos:

- (a) $(0.6667, -0.3333, -0.6667)$ y $(-0.6667, -1.6667, -1.3333)$.
- (b) $(0.6667, -0.3333, 0.6667)$ y $(-0.6667, -1.6667, 1.3333)$.
- (c) $(0.6667, -0.3333, -0.6667)$ y $(2, 1, 0)$.
- (d) $(0.6667, -0.3333, 0.6667)$ y $(2, 1, 0)$.

T6.5 Si primero se realiza un zoom al 125% respecto al punto $(2, 5, 2)$ y luego un giro de 90° en sentido horario respecto la recta $x - y = x - z = 2$ (con sentido positivo hacia $y < 0$) sobre el resultado anterior, el segmento que une los puntos $(0, 0, 4)$ y $(-2, 4, 4)$ se convierte en el segmento que une los puntos:

- (a) $(5.5698, -3.7915, 0.9717)$ y $(3.5163, -4.4015, 6.1351)$.
- (b) $(-1.0698, 4.2915, -0.4717)$ y $(2.6503, 6.5682, -3.9685)$.

- (c) (3.1950, 0.1846, 4.3704) y (2.7843, 0.0626, 5.4031).
 (d) (5.0000, 1.7500, -4.0000) y (9.1667, -1.5833, -2.3333).

T6.6 Indica cuál es la matriz \tilde{A} que realiza directamente las siguientes transformaciones. Primero ejecuta una traslación que sitúa el punto (1, 2, 3) en (0, 2, 2), luego un giro de 90° en sentido antihorario respecto al eje $2x + y - 2 = z - 2 = 0$ (con sentido positivo hacia $y > 0$) y, finalmente, una simetría respecto al punto (2, 1, 5).

(a)
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & -0.2 & 0.4 & 0.8944 \\ 0 & 0.4 & -0.8 & 0.4472 \\ 8 & -0.8944 & -0.4472 & 0 \end{pmatrix}$$

(b)
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0.7167 & -0.2 & 0.4 & 0.8944 \\ -0.1416 & 0.4 & -0.8 & 0.4472 \\ 9.7889 & -0.8944 & -0.4472 & 0 \end{pmatrix}$$

(c)
$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 6.0833 & -0.2 & 0.4 & -0.8944 \\ 2.5416 & 0.4 & -0.8 & -0.4472 \\ 6.2111 & 0.8944 & 0.4472 & 0 \end{pmatrix}$$

- (d) Ninguna de las otras.

T6.7 Se considera el paralelogramo plano del que se conocen los tres vértices siguientes: $V_1(1, -1, -2)$, $V_2(3, -1, 1)$ y $V_3(5, 5, 2)$. Si primero se realiza una traslación de modo que el vértice desconocido V_4 se traslada a (2, 3, 4) y luego se realiza una simetría respecto el plano perpendicular a la diagonal del primer octante (recta $x = y = z$) que pasa por el origen, se obtiene otro paralelogramo con tres de los vértices iguales a los siguientes:

- (a) (2, -1, 5), (-3.3333, -4.3333, -0.3333), (-2, -1, 0).
 (b) (0, -3, 3), (-5.3333, -6.3333, -2.3333), (-4, -3, -2).
 (c) (-4, -3, -2), (-9.3333, -6.3333, -7.3333), (-8, -3, -7).
 (d) Ninguna de las otras.

T6.8 La transformación F que verifica que $F(0, 0, 0) = (2, -1, 0)$, $F(1, 0, 0) = (3, -2, 0)$, $F(1, 1, 0) = (3, 2, 1)$ y $F(1, 0, 1) = (3, 1, 2)$ transforma el punto (6, 4, 2) en:

- (a) (8, 15, 8).
 (b) (8, 13, 10).
 (c) Ninguna de las otras.
 (d) (8, 7, 6).

T6.9 La matriz de un giro de 90° en sentido antihorario de eje $x = y - 1 = z - 1$ (asumiendo el sentido positivo en el que crecen las coordenadas x, y, z) es:

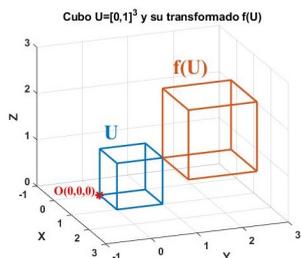
(a)
$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 0.3333 & -0.2440 & 0.9107 \\ 0.9107 & 0.9107 & 0.3333 & -0.2440 \\ -0.2440 & -0.2440 & 0.9107 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

- (b) Ninguna de las otras.

$$(c) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.6667 & 0.3333 & 0.9107 & -0.2440 \\ -0.2440 & -0.2440 & 0.3333 & 0.9107 \\ 0.9107 & 0.9107 & -0.2440 & 0.3333 \end{pmatrix}$$

$$(d) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -0.9654 & 0.0346 & 0.9988 & -0.0335 \\ -0.0335 & -0.0335 & 0.0346 & 0.9988 \\ 0.9988 & 0.9988 & -0.0335 & 0.0346 \end{pmatrix}$$

T6.10 Sea U el cubo unidad dado por $[0, 1]^3$. Se aplica una transformación F de centro C (desconocido) a U obteniendo $F(U)$ según la figura adjunta. Indica cuál de las siguientes afirmaciones es cierta.



- (a) F puede ser una simetría y C un vértice de U .
- (b) F puede ser una homotecia y C tiene coordenadas negativas.
- (c) F puede ser una homotecia y C está dentro de U .
- (d) F puede ser una simetría y C está dentro de U .

Apéndice A

Soluciones de los ejercicios de autoevaluación

A.1. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 1

A.1.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 1.7.2:

1-c, 2-a, 3-d, 4-a, 5-d, 6-b, 7-d, 8-d, 9-c, 10-d.

A.1.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

Respuesta al ejercicio T1.1

Hay que ir con cuidado con la prioridad de operaciones (ver sec. 1.1.2):
 $x=2, (1+2*(x+1)^2)/(exp(2)+3*x^2)$
Obteniendo $ans = 0.9799$. La respuesta correcta es la (c).

Respuesta al ejercicio T1.2

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 1.2.1).

- (i) El comando `linspace` en (a) empieza en 0 y termina en 10π tomando 11 puntos equiespaciados. Por tanto, 10 intervalos iguales entre los 11 puntos equiespaciados. La respuesta (a) es la correcta.
- (ii) El último punto considerado en (b) es 30, no $10\pi = 31.4159\dots$, por lo que es falsa.
- (iii) En la respuesta (c) se toman 10 puntos y, en consecuencia, 9 intervalos equiespaciados, no 10. Es falsa.

También se pueden ejecutar los comandos de las respuestas propuestas

```
Respuesta_a = linspace(0,10*pi,11)
Respuesta_b = 0:3:10*pi
Respuesta_c = linspace(0,10*pi,10)
```

obteniendo que

```
Respuesta_a = Columns 1 through 8
    0    3.1416    6.2832    9.4248   12.5664   15.7080   18.8496   21.9911
    Columns 9 through 11
    25.1327   28.2743   31.4159
Respuesta_b = 0    3    6    9   12   15   18   21   24   27   30
Respuesta_c = Columns 1 through 8
    0    3.4907    6.9813   10.4720   13.9626   17.4533   20.9440   24.4346
    Columns 9 through 10
    27.9253   31.4159
```

Es fácil verificar que se cumplen las afirmaciones (i), (ii) y (iii) anteriores, por lo que la correcta es la (a).

Respuesta al ejercicio T1.3

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 1.2.1 y 1.2.3).

- (i) `rand(20,1)` crea un vector columna (una matriz 20×1) con 20 componentes entre 0 y 1 de forma aleatoria.
- (ii) `9*rand(20,1)+1` hace lo mismo pero con valores entre 1 y 10. Por lo que (b) y (c) son falsos.
- (iii) `(9*rand(20,1)+1)<5` crea un vector de 20 componentes con ceros y unos, un cero cuando no se verifica la ecuación (si el valor de la componente es mayor o igual a 5) y un 1 cuando sí se verifica (cuando la componente es menor estricta que 5).
- (iv) `sum((9*rand(20,1)+1)<5)` suma todos los unos del apartado anterior (iii) obteniendo el número de componentes con valor estrictamente inferior a 5.

Por tanto, la correcta es la (d).

Respuesta al ejercicio T1.4

Se tiene que $A = \begin{pmatrix} N_1(a_1) & N_1(a_2) & \dots & N_1(a_{10}) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ N_4(a_1) & N_4(a_2) & \dots & N_4(a_{10}) \end{pmatrix}$ donde $N_i(a_j)$ es la nota de la prueba i del alumno j , $i=1,\dots,4$, $j=1,\dots,10$. La calificación de la asignatura del alumno j , $N(a_j)$, es el promedio geométrico de las pruebas: $N(a_j) = \sqrt[4]{N_1(a_j) \cdot N_2(a_j) \cdot N_3(a_j) \cdot N_4(a_j)}$.

Se busca el promedio aritmético de las calificaciones de los alumnos, es decir, $(N(a_1) + \dots + N(a_{10}))/10$.

En consecuencia, se busca el promedio aritmético del promedio geométrico de las columnas de A que se obtiene con uno de los siguientes comandos (ver sec. 1.2.3 y 1.2.5), en donde primero se calcula el promedio geométrico por columnas (variando el primer índice) y luego el aritmético sobre el vector de 10 componentes obtenido. Recuerdese siempre de poner paréntesis a los exponentes para evitar problemas.

```
sum((prod(A)).^(1/4))/10 % Opción 1
sum((prod(A)).^0.25)/10 % Opción 2. El 0 en 0.25 es eliminable
```

La correcta es la (a).

Aunque no hace falta se va a realizar una verificación de este ejercicio en un caso particular. Supongamos que el alumno 1 ha sacado todos unos, el alumno 2 todo doses y así sucesivamente hasta el alumno 10. Se aplican los comandos propuestos en las distintas respuestas a dicha matriz:

```
A=[1:10; 1:10; 1:10; 1:10]
Respuesta_a = sum((prod(A)).^0.25)/10
Respuesta_c = (prod(sum(A)/10)).^(1/4)
Respuesta_d = sum((prod(A)).^1/4)./10
```

obteniendo que

```
A = 1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
    1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
    1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
    1  2  3  4  5  6  7  8  9  10
Respuesta_a = 5.5000
Respuesta_c = 4.4166
Respuesta_d = 633.3250
```

Es obvio que la respuesta (d) es falsa porque da un valor superior a 10. La media geométrica por columnas de esta matriz es la nota de cualquier posición de la columna puesto que todas son iguales. La media aritmética de los números enteros de uno a diez es el punto medio del intervalo $[1, 10]$ que es 5.5 como da el apartado (a). En consecuencia se tiene que la respuesta (a) es correcta en este caso. Con este razonamiento no se puede descartar la respuesta (b), pero se podría probar si (a) continua siendo cierta para otras matrices A .

Respuesta al ejercicio T1.5

Los ángulos van variando de 5 en 5 grados. Para calcular sus cosenos se han de pasar a radianes y, finalmente, elevarlos al cuadrado componente a componente y sumar. Ello se consigue con el siguiente comando (ver sec. 1.2.5, 1.2.3 y 1.3.1) obteniendo (d).

```
sum((cos((0:5:120)*pi/180)).^2)
```

Respuesta al ejercicio T1.6

Es una función un poco costosa de derivar, por tanto, mejor hacerlo simbólicamente con los siguientes comandos (ver sec. 1.3.2). Ojo con la prioridad de operaciones (ver sec. 1.1.2). Se obtiene que derivada = -0.0579, por lo que la respuesta correcta con es la (b).

```
syms x, f=(log(x^2+1)+2)/(sqrt(x+1)+3)
fder2=diff(f,x,2)
x=2, derivada=eval(fder2)
```

Respuesta al ejercicio T1.7

Obsérvese que se pide qué respuesta es **FALSA**. Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes.

- (i) $A=[1, -3; 2, 1]$ es la matriz del sistema y $b=[1; 0]$ el vector (columna) término independiente. Como $\det(A) \neq 0$ (calcularlo con `det(A)`), la opción (a) es correcta, no falsa. También se puede ejecutar el comando dado en la respuesta y observar que se obtiene la solución $[0.1429; -0.2857]$ (ver sec. 1.4.1).
- (ii) Con `fsolve` se resuelve el sistema $\vec{f}(x, y) = \begin{pmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{pmatrix} = \vec{0}$. Como f_1 ya incluye la componente no nula del término independiente y las expresiones son iguales, la opción (b) es correcta, no falsa (ver sec. 1.4.3). También se puede ejecutar el comando incluido en la respuesta y observar que se obtiene la solución $[0.1429; -0.2857]$.
- (iii) En (c) se incluyen exactamente las dos ecuaciones del sistema considerado. En vez de poner una ecuación detrás de otra separada por comas, aquí se han puesto las dos ecuaciones a la vez al escribir una igualdad de vectores de dos componentes (ver sec. 1.4.3). Por tanto (c) es verdadero, no falso. También se puede ejecutar el comando dado en la respuesta y observar que se obtiene la solución $x = 1/7, y = -2/7$, es decir, $[0.1429; -0.2857]$.

Por tanto, la respuesta **FALSA** que se pide es la (d).

Respuesta al ejercicio T1.8

Como es un sistema no lineal, no se puede resolver con matrices, sí con el `solve` o el `fsolve` (ver sec. 1.4.3). Se aplica el comando siguiente y se obtiene que la respuesta correcta es la (d).

```
syms x y, [x,y]=solve(2*y-x*y==1,y-y/x==2,x,y)
eval(x),eval(y)
ans =
    -0.2808
     1.7808
ans =
     0.4384
     4.5616
```

En un sistema lineal o bien no hay solución, o es única, o hay infinitas soluciones. En un sistema no lineal, a todas las opciones anteriores hay que añadir otra, que haya un número finito de soluciones. En el caso considerado se han encontrado dos soluciones $x=-0.2808$, $y=0.4384$, y también $x=1.7808$, $y=4.5616$. A priori podrían existir más soluciones que el comando `solve` no ha encontrado. En este caso no es así dado que podemos comprobarlo analíticamente. Obsérvese que las divisiones realizadas no dan problemas puesto que los factores son no nulos y que se ha racionalizado en la última expresión utilizando que $\frac{1}{a+b} \frac{a-b}{a-b} = \frac{a-b}{a^2-b^2}$ y que $\frac{1}{a-b} \frac{a+b}{a+b} = \frac{a+b}{a^2-b^2}$.

$$\begin{cases} 2y - xy = 1 \\ y - y/x = 2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2-x) = 1 & \text{(ec.1)} \\ y(1-1/x) = 2 & \text{(ec.2)} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y(2-x) = 1 \\ \frac{y(2-x)}{y(1-1/x)} = \frac{1}{2} \end{cases} \Leftrightarrow \text{(ec.1)/(ec.2)}$$

$$\begin{cases} y = 1/(2-x) \\ 2(2-x) = \frac{x-1}{x} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y = 1/(2-x) \\ -2x^2 + 3x + 1 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \frac{3-\sqrt{17}}{4}, y = \frac{5-\sqrt{17}}{2} \\ x = \frac{3+\sqrt{17}}{4}, y = \frac{5+\sqrt{17}}{2} \end{cases}$$

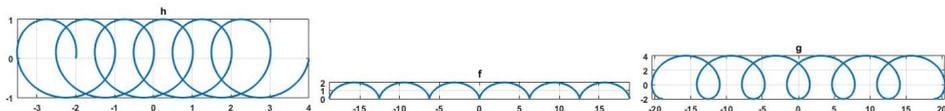
Respuesta al ejercicio T1.9

Empezamos representando \vec{h} dado que como tiene valores distintos en las respuestas (a), (b) y (c) discriminaremos 2 opciones con un único dibujo. Con los comandos siguientes (ver sec. 1.5.2) se obtiene que la parametrización dada por \vec{h} se corresponde con (iii) (ver figura inferior izquierda), por lo que las respuestas (a) y (b) son falsas. Obsérvese que se ha ejecutado el comando `axis equal` para observar correctamente el resultado (trozos de círculos) utilizando la misma escala en ambos ejes.

```
fplot(@ (t) cos (t)+t/(2*pi), @ (t) sin (t), [-6*pi 6*pi])
grid,axis equal,title('h')
```

Debido a que la respuesta (d) dice “Ninguna de las otras”, se deben verificar las gráficas de las parametrizaciones dadas por \vec{f} y \vec{g} del apartado (c). Ello se consigue con los siguientes comandos (ver sec. 1.5.2) obteniendo las figuras inferiores central y derecha, por lo que (c) es la verdadera.

```
figure,fplot(@ (t) t-sin (t), @ (t) 1-cos (t), [-6*pi 6*pi])
grid,axis equal,title('f')
figure,fplot(@ (t) t-3*sin (t), @ (t) 1-3*cos (t), [-6*pi 6*pi])
grid,axis equal,title('g')
```

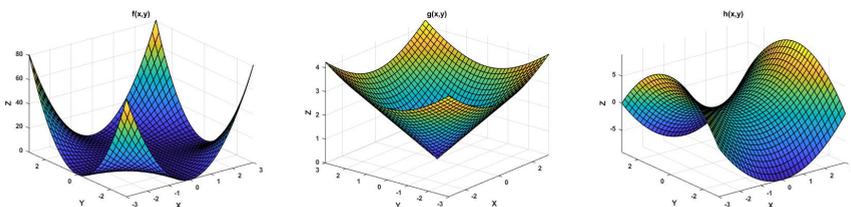


Respuesta al ejercicio T1.10

Podríamos empezar como en el ejercicio anterior, pero como hay un apartado que dice “Ninguna de las otras” se deben verificar todas las gráficas. Como en el ejercicio se dibujan entre -3 y 3 tanto x como y , haremos lo mismo ahora. También se observa que los ejes no están a la misma escala, por lo que no se utilizará el comando `axis equal`. Se dibujan con los siguientes comandos (ver sec. 1.6.2):

```
f=@ (x,y) x.^2.*y.^2, g=@ (x,y) sqrt (x.^2+y.^2), h=@ (x,y) x.^2-y.^2
figure,fsurf(f,[-3 3 -3 3]),title('f(x,y)')
figure,fsurf(g,[-3 3 -3 3]),title('g(x,y)')
figure,fsurf(h,[-3 3 -3 3]),title('h(x,y)')
```

Viendo las gráficas se observa inmediatamente que (d) es la opción correcta.



A.2. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 2

A.2.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 2.4.2:

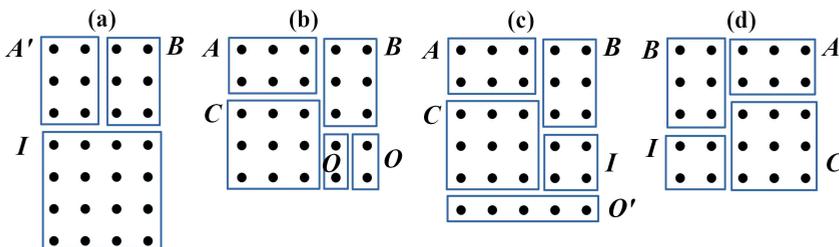
1-c, 2-b, 3-b, 4-a, 5-c, 6-a, 7-d, 8-a, 9-c, 10-a.

A.2.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

Respuesta al ejercicio T2.1

Teniendo en cuenta la imagen inferior (ver sec. 1.2.1 y 2.1.2), se observa que la respuesta correcta es la (c). Recuérdese que con una coma o espacio se separan las componentes dentro de una fila y que con un punto y coma se cambia a la fila siguiente.



Si se tuvieran todos los tamaños de las matrices se podrían definir y ver si dan el tamaño especificado o error en las dimensiones. A modo de ejemplo, vamos a suponer que I y O tienen las dimensiones de la opción (c). Se ejecutan los comandos siguientes y se observa que sí se verifica la respuesta (c).

```
A=ones(2,3),B=ones(3,2),C=ones(3,3),I=eye(2),O=zeros(5,1)
X=[[A;C],[B;I];O'], FilasYColumnas=size(X)
```

Se obtiene que

```
X =   1   1   1   1   1
      1   1   1   1   1
      1   1   1   1   1
      1   1   1   1   0
      1   1   1   0   1
      0   0   0   0   0
FilasYColumnas = 6   5
```

Respuesta al ejercicio T2.2

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 2.1.2).

- (i) A y B tienen tamaños distintos y no se pueden sumar. La respuesta (a) no es posible.
- (ii) Los tamaños en el primer producto de (b) son $(2 \times 3) \cdot (3 \times 3) \cdot (3 \times 2)$ que son factibles obteniendo una matriz 2×2 . Los tamaños en las siguientes operaciones son $(3 \times 2) \cdot (2 \times 3) + (3 \times 3)$ que también se pueden realizar. (b) es correcta.
- (iii) Los tamaños en el primer producto de la opción (c) no coinciden dado que son $(3 \times 2) \cdot (3 \times 2)$, por lo que no se puede realizar. La suma tampoco se puede realizar dado que $2A$ no es cuadrada y la matriz I sí lo es.
- (iv) El primer producto de la respuesta (d) sí es posible dado que las dimensiones son $(2 \times 3) \cdot (3 \times 3)$. La suma en la siguiente operación no es factible porque las dimensiones no coinciden dado que el producto a la izquierda de la suma es $(2 \times 3) \cdot (3 \times 2) = 2 \times 2$ y la matriz de la derecha de la suma es 3×3 .

Respuesta al ejercicio T2.3

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 1.2.3 y 2.1.2).

- (i) La respuesta (a) es cierta si existe la inversa de A . Como no se sabe si ello es cierto (hay veces que no lo es) se tiene que (a) es falsa.
- (ii) $A^2 \cdot (A+C) = A^3 + A^2C = A \cdot A^2 + A^2 \cdot C$ dado que una matriz conmuta con cualquier potencia suya. La opción (b) es cierta.
- (iii) $A \cdot (B+C) = A \cdot B + A \cdot C \neq A \cdot B + C \cdot A$ dado que A y C no tienen porqué conmutar. La respuesta (c) es falsa.
- (iv) La opción (d) es falsa por la misma razón que la (a).

Respuesta al ejercicio T2.4

Se procede a despejar la X y se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que la solución es la (a) (ver sec. 1.2.3 y 2.1.4). A priori se ha asumido la existencia de la matriz inversa y luego se ha verificado que sí existe dado que el determinante es distinto de cero. En caso de serlo se hubiera obtenido el aviso "Warning: Matrix is singular to working precision" dado que, por defecto, están activados (warning('on')).

$$XA - 2X = -B \Rightarrow X(A - 2I) = -B \Rightarrow X = -B(A - 2I)^{-1}$$

```
A=[1 2; -1 3], B=[0 1; -1 -1]
X=-B*(A-2*eye(2))^-1
```

Se obtiene que

$$X = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

Respuesta al ejercicio T2.5

De forma similar a la respuesta al ejercicio T2.4 se procede a despejar la X . Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que la solución es la (c) (ver sec. 1.2.3 y 2.1.4).

$$X - A^{-1}X = -B^2 \Rightarrow (I - A^{-1})X = -B^2 \Rightarrow X = (I - A^{-1})^{-1}(-B^2)$$

```
A=[1 2; -1 3], B=[0 1; -1 -1]
X=(eye(2)-A^(-1))^(-1)*(-B^2)
```

Se obtiene que

```
X = 3.0000 2.0000
     -0.5000 0.5000
```

Respuesta al ejercicio T2.6

De forma similar a la respuesta al ejercicio T2.4 se procede a despejar la X . Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que la solución es la (a) (ver sec. 1.2.3 y 2.1.4).

$$2XA + XB = -AB \Rightarrow X(2A + B) = -AB \Rightarrow X = (-AB)(2A + B)^{-1}$$

```
A=[1 2; -1 3], B=[0 1; -1 -1]
X=(-A*B)*(2*A+B)^(-1)
```

Se obtiene que

```
X = 0.5200 -0.3200
     1.0800 -0.2800
```

Respuesta al ejercicio T2.7

Se define el sistema matricialmente como $A\vec{x} = \vec{b}$ con los comandos siguientes y se calculan los rangos (ver sec. 1.2.1 y 1.2.3),

```
A=[2,2,2; 1,2,3; -1,0,-1], b=[-1; 0; 2]
rank(A), rank([A,b]), size(A,2) % ¿iguales?
```

obteniendo como resultado en los rangos que

```
ans = 3
ans = 3
ans = 3
```

Como $3 = \text{rank}(A) = \text{rank}([A, b]) = \text{size}(A, 2) =$ número de incógnitas, se tiene que es un sistema compatible determinado con solución única (ver sec. 2.2.1). Por tanto, las opciones (a) y (c) son falsas.

La solución se puede conseguir, por ejemplo, con el comando `x=linsolve(A,b)` (ver sec. 2.2.2), por ejemplo, obteniendo `x=[-1.5000; 1.5000; -0.5000]`. Por tanto, la respuesta (b) también es falsa. La correcta es la (d).

Respuesta al ejercicio T2.8

Se define el sistema matricialmente como $A\vec{x} = \vec{b}$ con los comandos siguientes y se calculan los rangos (ver sec. 1.2.1 y 1.2.3),

```
A=[2,-2; -1,2; -1,1], b=[-1; 0; 2]
rank(A), rank([A,b]), size(A,2) % ¿iguales?
```

obteniendo como resultado en los rangos que

```
ans = 2
ans = 3
ans = 2
```

Como $\text{rank}(A)=2 < 3=\text{rank}([A,b])$, se tiene que es un sistema incompatible (ver sec. 2.2.1). No tiene solución. Se puede buscar una *buena* aproximación utilizando mínimos cuadrados puesto que como ambas matrices anteriores tienen rango máximo, el sistema es sobredeterminado (ver sec. 2.2.4). Por tanto, (a) es cierta, y (b) y (c) son falsas. En consecuencia, (d) también es falsa.

Respuesta al ejercicio T2.9

Se define el sistema matricialmente como $A\vec{x} = \vec{b}$ con los comandos siguientes y se calculan los rangos (ver sec. 1.2.1 y 1.2.3),

```
A=[2,2,2; 1,2,3; 1,0,-1], b=[-1; 0; -1]
rank(A), rank([A,b]), size(A,2) % ¿iguales?
```

obteniendo como resultado en los rangos que

```
ans = 2
ans = 2
ans = 3
```

Como $\text{rank}(A)=\text{rank}([A,b])=2 < 3=\text{size}(A,2)=$ número de incógnitas, se tiene que es un sistema compatible indeterminado, tiene infinitas soluciones (ver sec. 2.2.1). Por tanto, las respuestas (a) y (b) son falsas puesto que cuando se dice “La solución es . . .” significa que hay solución y que es única.

Como $\vec{x} = (x, y, z) = (-1, 0.5, 0)$ verifica todas las ecuaciones es una posible solución de las infinitas que hay. Por tanto, (c) es cierta.

También se puede buscar la solución general con los comandos (ver sec. 2.2.3)

```
syms x y z
[x,y]=solve(2*x+2*y+2*z==-1, x+2*y+3*z==0, x-z==-1, x,y)
```

obteniendo que $x = z - 1$, $y = 1/2 - 2z$, $z \in \mathbb{R}$. Se observa que para $z = 0$ se obtiene la solución de la respuesta (c):

```
x = z - 1
y = 1/2 - 2*z
```

Recuérdese que el comando anterior presupone que x e y se pueden poner en función de z que actúa como parámetro, hecho que no siempre ocurre. Si no se obtuviera solución se debe probar a utilizar a x o a y como parámetro (ver sec. 2.2.3). Ello se conseguiría con uno de los comandos siguientes,

```
syms x y z, [y, z]=solve(2*x+2*y+2*z==-1, x+2*y+3*z==0, x-z==-1, y, z)
syms x y z, [x, z]=solve(2*x+2*y+2*z==-1, x+2*y+3*z==0, x-z==-1, x, z)
```

obteniendo las soluciones equivalentes

$$y = -2x - 3/2$$

$$z = x + 1$$

para el primer comando, y el siguiente resultado para el segundo:

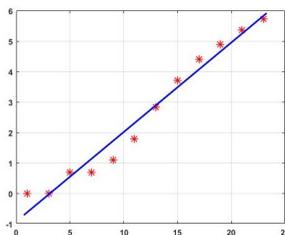
$$x = -y/2 - 3/4$$

$$z = 1/4 - y/2$$

Respuesta al ejercicio T2.10

Se ejecutan los comandos siguientes (ver sec. 2.2.5) y se obtiene $a = 0.2935$ por lo que la opción correcta es la (a). Se añade la representación gráfica para una mejor comprensión del problema (la recta se ajusta a los puntos dados). Se obtiene que $RECM = 0.3542$ lo que significa que los puntos están alejados en vertical de la recta una media aproximada de 0.35 unidades.

```
f=[1,1,2,2,3,6,17,41,81,132,213,304]
X=[1:2:23]', Y=log(f')
A=[X.^1,X.^0]; b=Y; N=length(X);
rank(A), rank([A,b]), n=size(A,2) % ¿sobredeterminado?
sol=A\b % SOLUCIÓN por mínimos cuadrados
p=poly2sym(sol) % p(x) de ajuste
xmin=min(X)-0.3; xmax=max(X)+0.3; % intervalo de dibujo
plot(X,Y,'r*'), hold on, grid on, fplot(p,[xmin,xmax],'b')
x=X; RECM=sqrt(sum((Y-eval(p)).^2)/N)
```



A.3. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 3

A.3.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 3.5.2:

1-d, 2-c, 3-b, 4-d, 5-b, 6-a, 7-a, 8-d, 9-a, 10-b.

A.3.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

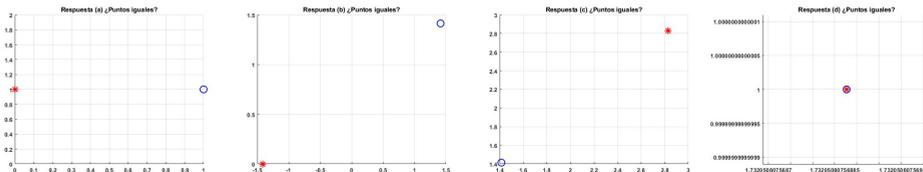
Respuesta al ejercicio T3.1

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.1.2 y 3.1.3).

- (i) Se verifica que $1 + 0 \cdot j \equiv (1, 0) \in \mathbb{R}^2$ distinto de $(0, 1)$ por lo que (a) es falsa.
- (ii) Utilizando la fórmula de Euler, $\sqrt{2} \cdot e^{\pi \cdot j} = \sqrt{2} \cdot (\cos \pi + j \operatorname{sen} \pi) = \sqrt{2} \cdot (-1 + 0 \cdot j) \equiv (-\sqrt{2}, 0) \in \mathbb{R}^2$ que es distinto a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, por lo que (b) es falsa.
- (iii) Utilizando la fórmula de Euler, $4 \cdot e^{\pi/4 \cdot j} = 4 \cdot (\cos \frac{\pi}{4} + j \operatorname{sen} \frac{\pi}{4}) = 4 \cdot (\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{j\sqrt{2}}{2}) \equiv (2\sqrt{2}, 2\sqrt{2}) \in \mathbb{R}^2$ que es distinto a $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$, por lo que (c) es falsa.
- (iv) Por eliminación de las anteriores, la correcta es la respuesta (d).
- (v) El punto $(2, \pi/6)$ en polares se corresponde en cartesianas a $(2 \cos \frac{\pi}{6}, 2 \operatorname{sen} \frac{\pi}{6}) = (2\frac{\sqrt{3}}{2}, 2\frac{1}{2}) = (\sqrt{3}, 1)$, por lo que (d) es cierta.

También se pueden representar gráficamente los dos puntos de cada respuesta y ver cuando coinciden. Se pueden utilizar los comandos siguientes obteniendo que el único caso en que coinciden es el dado por la respuesta (d).

```
figure,grid,hold on,title('Respuesta (a) ¿Puntos iguales?');
plot(1+0*j,'ob'),plot(0,1,'*r')
figure,grid,hold on,title('Respuesta (b) ¿Puntos iguales?');
plot(sqrt(2),sqrt(2),'ob'),plot(sqrt(2)*exp(pi*j),'*r')
figure,grid,hold on,title('Respuesta (c) ¿Puntos iguales?');
plot(sqrt(2),sqrt(2),'ob'),plot(4*exp(pi/4*j),'*r')
figure,grid,hold on,title('Respuesta (d) ¿Puntos iguales?');
plot(sqrt(3),1,'ob'),plot(2*exp(pi/6*j),'*r')%forma exp.
```



Respuesta al ejercicio T3.2

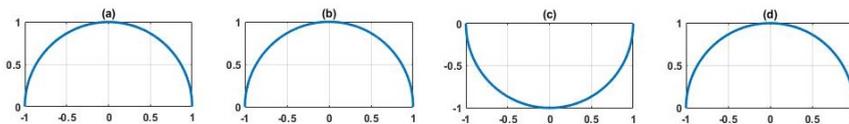
Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.1.3 y 3.2.1).

- (i) La respuesta (a) es la semicircunferencia unidad con ordenada positiva de $x^2 + y^2 = 1$ (parte superior). Como se asumen todos los valores reales que verifican la ecuación, también se incluyen los límites con ordenada nula.

- (ii) La opción (b) coincide con la (a) dado que es la semicircunferencia unidad superior incluyendo ordenadas nulas.
- (iii) La respuesta (d) coincide con la (b) puesto que los puntos $(\cos t, \sin t)$ de (d) verifican la ecuación de (b) $x^2 + y^2 = 1$ y, además, el argumento de $(\cos t, \sin t)$ es $t = \text{atan2}(\sin(t), \cos(t))$ que toma valores en $[0, \pi]$ en este caso, por lo que es la semicircunferencia superior unidad incluyendo los extremos con ordenada nula (para $t = 0$ y $t = \pi$).
- (iv) Por lo tanto, (c) es la curva diferente y es la opción a marcar.
- (v) Los puntos $(\cos t, \sin t)$ de (c) también verifican la ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de (b). Al igual que en (iii), el argumento del punto $(\cos t, \sin t)$ es t que va de $-\pi$ a 0 en sentido antihorario, por lo que es la semicircunferencia inferior unidad, distinta al resto.

También se pueden representar gráficamente las curvas consideradas y ver si coinciden. Se pueden utilizar los comandos siguientes obteniendo que la curva distinta es la de la opción (c) (ver sec. 1.5.5, 3.2.3 y 3.3.6).

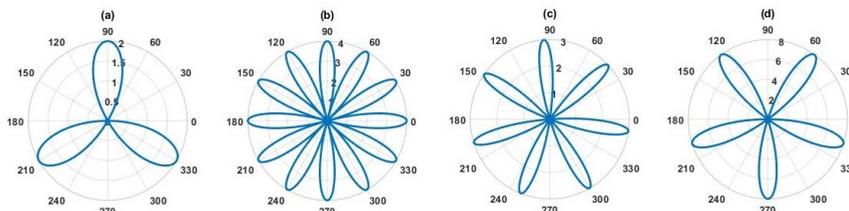
```
figure, syms x y t
subplot(1,4,1), fplot(sqrt(1-x^2), [-1,1])
title(' (a) '), axis equal, grid on
subplot(1,4,2), fimplicit(x^2+y^2==1)
title(' (b) '), axis equal, grid on, axis([-1,1,0,1])
subplot(1,4,3), fplot(cos(t), sin(t), [-pi,0])
title(' (c) '), axis equal, grid on
subplot(1,4,4), fplot(cos(t), sin(t), [0,pi])
title(' (d) '), axis equal, grid on
```



Respuesta al ejercicio T3.3

Lo más rápido para contestar a este ejercicio es representar las curvas gráficamente con los siguientes comandos (ver sec. 3.2.1 y 3.3.8) obteniendo que la única **FALSA** es la respuesta (b).

```
figure, t=linspace(0,2*pi,333);
subplot(1,4,1), polarplot(t,2*cos(3*(t+pi/6))), title(' (a) ')
subplot(1,4,2), polarplot(t,4*cos(6*(t+pi/3))), title(' (b) ')
subplot(1,4,3), polarplot(t,3*cos(7*(t+pi/3))), title(' (c) ')
subplot(1,4,4), polarplot(t,8*cos(5*t+pi/2)), title(' (d) ')
```



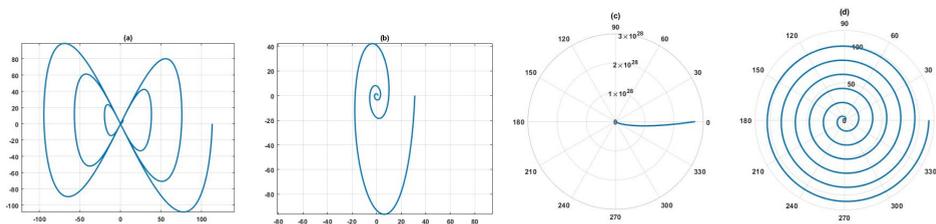
Respuesta al ejercicio T3.4

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.2.4, 3.3.7 y 3.3.8).

- (i) En la respuesta (a) el argumento de $(6t \cos t, 6t \sin(2t))$ no es ni t ni $2t$ y no se puede poner de la forma $(bat \cos(at), bat \sin(at))$, por lo que no es una espiral de Arquímedes y, en consecuencia, (a) es falsa.
- (ii) En la opción (b) la base de la potencia en t es distinta en cada componente, y no se puede poner de la forma $(a \cdot b^t \cos t, a \cdot b^t \sin t)$, por lo que no es una espiral logarítmica y, en consecuencia, (b) es falsa.
- (iii) La ecuación de una espiral logarítmica en coordenadas polares tiene la expresión $\rho = a \cdot b^t$ por lo que en coordenadas polares es $(a \cdot b^t, t)$. El exponente en la b debe ser el argumento. No puede ser el argumento al cuadrado, por lo que no es espiral logarítmica y, en consecuencia, (c) es falsa.
- (iv) La respuesta (d) se puede poner de la forma $(b \cdot a \cdot t \cdot \cos(a \cdot t), b \cdot a \cdot t \cdot \sin(a \cdot t))$ en coordenadas cartesianas con $a = 2$ y $b = 3$ (ver ec. (3.3)), por lo que sí es una espiral de Arquímedes y, en consecuencia, (d) es cierta.

También se pueden representar gráficamente y obtener la respuesta correcta (d) a partir de observar las representaciones gráficas obtenidas con los comandos siguientes.

```
t=linspace(0,6*pi,555);
figure,plot(6*t.*cos(t),6*t.*sin(2*t))
axis equal,title(' (a) '),grid
figure,plot(1.2.^t.*cos(t),1.3.^t.*sin(t))
axis equal,title(' (b) '),grid
figure,polarplot(t,2*1.2^(t.^2)),title(' (c) ')
figure,polarplot(2*t,6*t),title(' (d) ')
```



Respuesta al ejercicio T3.5

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.2.1).

- (i) La respuesta (a) es falsa puesto que no tiene porqué tener vector tangente en los extremos.
- (ii) Un cuadrado es una curva regular a trozos puesto que está formado por 4 rectas y tiene 4 esquinas. No es una curva regular. (c) es falsa.
- (iii) El vector tangente a una curva regular tiene un ángulo nulo con la curva en ese punto, no es perpendicular (que equivale a tener un ángulo de $\pm 90^\circ$ con la curva). (d) es falsa.
- (iv) Por tanto, la correcta es la (b).

Respuesta al ejercicio T3.6

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.2.2, 3.2.3 y 3.3.2).

- (i) (a) es cierta, puesto que aunque sea una curva regular como una elipse, si sólo se representan 5 puntos van a aparecer 4 esquinas (el primer y último coinciden en la parametrización propuesta en este texto).
- (ii) Algunas veces la variable utilizada en la parametrización es el argumento del punto y en otras no lo es, como ocurre en una recta parametrizada. (b) es falsa.
- (iii) Como se dibujan puntos unidos por segmentos para representar curvas *suaves*, se deben utilizar suficientes puntos para que una curva regular se vea suave. Debe ser un número suficientemente grande pero no excesivo para que no ocupe demasiada memoria y se haga más lento el proceso. No hay ningún número *mágico* para ello, por lo que (c) es falsa.
- (iv) (d) es falsa porque (a) es cierta.

En consecuencia, la respuesta correcta es la (a).

Respuesta al ejercicio T3.7

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.2.1).

- (i) (a) es cierta (ver ec. (3.5)). La primera fila son todos unos, la segunda las abscisas de los puntos y la tercera las ordenadas. Se asume que N es el número de puntos a dibujar, por tanto, si es una figura cerrada, el punto número N debe coincidir con el primero, pero no hay $N + 1$ puntos.
- (ii) Como (a) es cierta, (b) es falsa (la implicación contraria no se verifica, es decir, que si (b) es falsa no implica que (a) sea cierta).
- (iii) (c) es falsa porque las coordenadas de una columna de P_t son $(1, x, y)$.
- (iv) (d) es falsa porque la primera fila de P_t son todos unos.

Respuesta al ejercicio T3.8

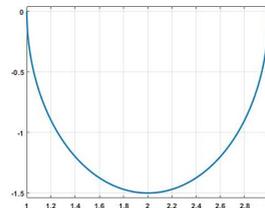
Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 3.3.4).

- (i) (a) es falsa porque para obtener un polígono que es una figura cerrada hay que repetir el primer punto, por lo que P_t tiene 9 columnas.
- (ii) El radio de la circunferencia se obtiene aplicando el teorema del coseno y no coincide con el lado del polígono excepto en un hexágono (verificarlo en la ecuación que relaciona R y L), por lo que (b) es falsa.
- (iii) (c) es falsa porque con un desfase de los vértices respecto su centro se obtiene un giro del polígono regular sobre su centro. No afecta a la longitud de los lados.
- (iv) En un polígono regular de N lados los 2π radianes de la circunferencia se deben subdividir en N partes iguales, $\frac{2\pi}{N}$. Este es el ángulo que hay en el triángulo formado por el centro y dos vértices consecutivos que, en este caso, es $\frac{2\pi}{8} = \frac{\pi}{4}$ por lo que (d) es cierta.

Respuesta al ejercicio T3.9

Se dibujan los puntos Pt con los siguientes comandos y se obtiene la mitad inferior de una elipse, por lo que (a) es la correcta (ver sec. 3.2.3 y 3.3.6). Obsérvese que el semieje horizontal vale 1 (2 es el ancho total) y el semieje vertical vale 1.5 distinto del horizontal.

```
t=linspace(0,pi,222)+pi; X=2+cos(t); Y=1.5*sin(t);
Pt=ones(3,222);Pt(2:3,:)=X;Y;
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),axis equal,grid
```



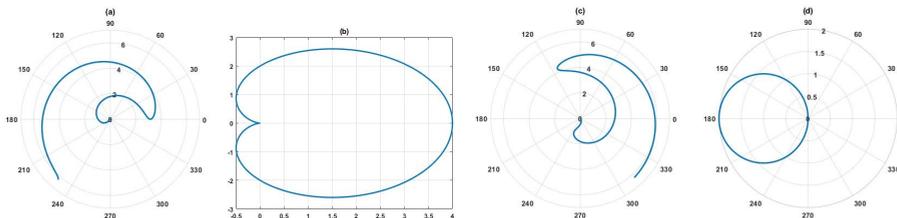
Se responde ahora teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes. Recuérdese que $(x_0 + a \cos t, y_0 + b \sin t)$, con $t \in [0, 2\pi]$ y $a, b > 0$, es la parametrización de una elipse si $a \neq b$ y cuando $a = b$ es la de una circunferencia. Obsérvese que t es el argumento del punto de la elipse respecto al centro cuando es una circunferencia, y se asimila a él en una elipse. Más concretamente, el eje horizontal se intersecta con la circunferencia o elipse con $t = 0$ (o $t = 2\pi$) y con $t = \pi$, mientras que el eje vertical lo hace por los puntos de la elipse con $t = \pi/2$ y con $t = 3\pi/2$. En consecuencia, la mitad superior se recorre cuando $t \in [0, \pi]$, la mitad inferior cuando $t \in [\pi, 2\pi]$, la mitad izquierda cuando $t \in [\pi/2, 3\pi/2]$ y la mitad derecha cuando $t \in ([3\pi/2, 2\pi] \cup [0, \pi/2])$ (o también cuando $t \in [-\pi/2, \pi/2]$).

- (i) En el apartado (a) se tiene que $a = 1$ y $b = 1.5$ por lo que se trata de una elipse (no de una circunferencia) y como t va de $(0 + \pi)$ a $(\pi + \pi)$ se recorre la mitad inferior, por lo que (a) es cierta.
- (ii) Como (a) es cierta, (b) es falsa.
- (ii) (c) es falso puesto que no es una circunferencia (los semiejes son distintos).
- (ii) (d) es falso por el mismo motivo que (c).

Respuesta al ejercicio T3.10

Basta realizar una discretización de t y ejecutar los comandos propuestos obteniendo las figuras inferiores.

```
t=linspace(0,2*pi,333);
figure,polarplot(2 + 2.*cos(t), t),title(' (a) ')
figure,plot((2+2*cos(t)).*cos(t),(2+2*cos(t)).*sin(t))
grid on,title(' (b) ')
figure,polarplot(2*cos(2+ t), t),title(' (c) ')
figure,polarplot(t, 2*cos(t+ pi)),title(' (d) ')
```



Obviamente, la cardioide es la (b) aunque aparece un poco achatada. La respuesta (b) es la correcta.

A.4. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 4

A.4.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 4.4.2:

1-a, 2-c, 3-d, 4-b, 5-b, 6-a, 7-c, 8-d, 9-a, 10-c.

A.4.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

Respuesta al ejercicio T4.1

Ejecutando los comandos siguientes (ver sec. 4.3.2) se obtiene el resultado

```
Ppt = 1.0000
      1.2929
      -5.1213
```

por lo que la correcta es la (a).

```
Pt=[1;1;-1] %Pt=[1;x;y] PUNTO INICIAL
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=+135*pi/180;C=[2;-3]; % Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
ACa=Ah1*AOa*Ah % Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')
%%
Ppt % VISUALIZACIÓN DEL RESULTADO
```

Respuesta al ejercicio T4.2

Se requieren dos puntos distintos del eje de simetría que se pueden obtener dando dos valores distintos a x . Por ejemplo, con $x = 1$ y $x = 3$ se obtienen los puntos $Q(1, 0)$ y $R(3, 1)$. Sean $P_1(0, 0)$ y $P_2(-2, 1)$ y $P'_1 = f(P_1)$ y $P'_2 = f(P_2)$ sus transformados por la simetría indicada. Las semejanzas transforman segmentos en segmentos, por lo que calculando las imágenes de los extremos del segmento inicial se obtienen los extremos del segmento

transformado. En este caso el segmento $\overline{P_1P_2}$ se transforma en el segmento $\overline{P'_1P'_2}$. Se ejecutan los comandos siguientes (ver sec. 4.3.4) y se obtiene que P'_1 y P'_2 son las dos columnas de Ppt dadas por

```
Ppt = 1.0000 1.0000
      0.4000 0
      -0.8000 -3.0000
```

En consecuencia, la correcta es la (c).

```
% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[0 0; -2 1]' % (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y). Pt=P-tilde
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[1;0];R=[3;1]; % Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1)); % Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=Q; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOa1=eye(3); % Matriz de giro inversa
AOa1(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]); % Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ah1*AOa1*AOX*AOa*Ah % Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r') % Eje de simetría
%%
Ppt % VISUALIZACIÓN DEL RESULTADO
```

Respuesta al ejercicio T4.3

Un zoom al 80% es una homotecia de razón 0.80. Sean $P_1(0,0)$ y $P_2(-2,1)$. Se definen $P'_1 = h(P_1)$ y $P'_2 = h(P_2)$ sus transformados por la homotecia indicada, y $P''_1 = g(P'_1)$ y $P''_2 = g(P'_2)$ los transformados por el giro pedido. Primero se escriben los comandos de la homotecia (ver sec. 4.3.5) y luego los del giro (ver sec. 4.3.2) según se indica en la sección 4.3.7. Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que

```
Ppt = 1.0000 1.0000
      -0.8385 -2.5355
      -0.0101 -0.5757
```

por lo que la correcta es la (d).

```
% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[0 0; -2 1]' % (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y). Pt=P-tilde
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los HOMOTÉTICOS
k=0.8;C=[2;5]; % Razón y centro homotecia (VARIAR)
```

```

Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C;% Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C;% Matriz de traslación inversa
AOk=diag([1,k,k]);% Matriz de Homotecia O,k
ACk= Ah1*AOk*Ah% Matriz de Homotecia C,k
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACk; Ppt=At*Pt;% Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:))% --
title('Homotecia (zoom) respecto un punto')
plot(C(1),C(2),'r*')% Centro C
%%
Pt=Ppt;% Redefinición de Pt
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=+45*pi/180;C=[1;-1];% Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C;% Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C;% Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3);% Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
ACa=Ah1*AOa*Ah% Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt;% Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:))% --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')
%%
Ppt % VISUALIZACIÓN DEL RESULTADO

```

Respuesta al ejercicio T4.4

Se insta al lector a definir el triángulo T con los comandos

```

% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[0 0; 5 0; 6 3; 0 0]' % (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y). Pt=P-tilde
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3:,:),'b')

```

y a realizar distintas homotecias de razón inferior a uno y superior a uno de centro un punto dentro de T o un punto exterior a T y a estudiar la posición del triángulo homotético respecto al inicial. Se insta también a hacerlo respecto una simetría puntual cambiando la posición del centro de simetría (dentro de T , a su izquierda, a su derecha,...).

Vamos a hacerlo ahora teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 4.2.2 y 4.2.4).

- (i) Es obvio que los triángulos transformados cambian su tamaño respecto al original. Como simetría puntual es una isometría, no se cambia el tamaño de una figura, por lo que (c) y (d) son falsas.
- (ii) Es obvio que el transformado por G se ha *encogido* y está situado dentro de T , por lo que G es una homotecia de razón inferior a 1 con centro dentro de T . Si el centro estuviera fuera de T el triángulo *encogido* no se hubiera mantenido dentro de T . En consecuencia, la respuesta correcta es la (b).

- (iii) Es obvio que el triángulo transformado por F es más grande que el original y que está desplazado hacia la izquierda en todos sus lados (cuanto más a la izquierda el desplazamiento es más grande), por tanto, el centro tiene que estar a la derecha de T y exterior a éste. En consecuencia, la respuesta correcta es la (b).

Respuesta al ejercicio T4.5

Al igual que en el ejercicio anterior, se insta al lector a definir un posible triángulo T y a realizar distintos giros, simetrías puntuales y axiales y, seguidamente, estudiar la posición del triángulo transformado respecto al inicial.

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 4.2.2 y 4.2.3).

- (i) El triángulo inicial y su homólogo por F y por G tienen los mismos ángulos en los vértices homólogos, por lo que se trata de una semejanza. Más aún, como los lados tienen las mismas longitudes se trata de una isometría.
- (ii) La orientación en los ángulos en F varía (por ejemplo, en P va de \overline{PQ} a \overline{PR} en sentido antihorario, mientras que en P' va de $\overline{P'Q'}$ a $\overline{P'R'}$ en sentido horario), por lo que se trata de una isometría inversa. Como un giro y una simetría puntual (giro de 180°) son isometrías directas, (a) y (d) son falsas.
- (iii) G no puede ser una simetría puntual puesto que el triángulo inicial y el transformado tendrían que ser opuestos respecto a un punto y son iguales un poco más bajo y girado el transformado. Por tanto es (b).
- (iv) Se observa que el transformado por G es el girado respecto el inicial un pequeño ángulo en sentido horario respecto un centro dado por la intersección de las rectas que pasan por los segmentos \overline{PQ} y $\overline{P'Q'}$. Por lo tanto sólo puede ser (b).

Respuesta al ejercicio T4.6

Para la primera transformación se requieren dos puntos distintos del eje de simetría. Tomando $x = 1$ y $x = 2$, por ejemplo, a partir de la ecuación del eje se obtienen los puntos $Q(1, 1)$ y $R(2, 0)$. De forma similar al ejercicio T4.3, primero se escriben los comandos de la simetría axial (ver sec. 4.2.3), luego los del giro (ver sec. 4.3.2) y finalmente los de la simetría puntual (ver sec. 4.3.3) según se indica en la sección 4.3.7. En este caso lo que se busca no es el transformado de algún punto, sino la matriz producto que realiza las tres transformaciones a la vez (ver sec. 4.1.4 y 4.3.8). Recuérdese que es imprescindible utilizar el orden correcto en el producto. Más concretamente, según se van componiendo las transformaciones las matrices se van multiplicando por la izquierda. En este caso, utilizando las notaciones de las secciones referenciadas, la matriz producto es $AC*ACa*Ae$ dado que la primera transformación (la simetría axial) tiene como matriz Ae , la segunda (el giro) ACa y la tercera (la simetría puntual) AC . Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que

```
A_producto =
  1.0000    0    0
 16.0000  1.0000  0.0000
  8.0000  0.0000 -1.0000
```

por lo que que la correcta es la (a).

```
Pt=[1;0;0] % por ejemplo, el punto 0(0,0)
%%
```

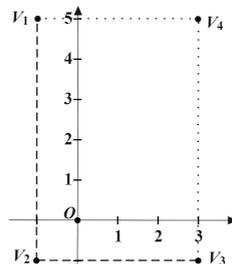
```

% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[1;1];R=[2;0]; % Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1)); % Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=Q; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOa1=eye(3); % Matriz de giro inversa
AOa1(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]); % Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ah1*AOa1*AOX*AOa*Ah % Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3:,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r') % Eje de simetría
%%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=-pi/2;C=[2;2]; % Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
ACa=Ah1*AOa*Ah % Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3:,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')
%%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN PUNTO
C=[9;5]; % Centro de simetría (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AO=diag([1,-1,-1]); % Matriz de simetría central
AC= Ah1*AO*Ah % Matriz de simetría puntual centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AC; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3:,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Simetría respecto un punto')
plot(C(1),C(2),'r*') % Centro C
%%
A_producto=AC*ACa*Ae % ojo con el orden!

```

Respuesta al ejercicio T4.7

A partir de la imagen adjunta se tiene que el vértice desconocido es $V_4(3,5)$. También se puede obtener de otras formas como, por ejemplo, $V_4 = V_1 + \overrightarrow{V_2V_3} = (-1, 5) + ((3, -1) - (-1, -1)) = (3, 5)$. A continuación se debe realizar una traslación de vector $\vec{h} = \overrightarrow{V_4S} = S - V_4 = (2, 3) - (3, 5) = (-1, -2)$ y, seguidamente una simetría respecto la recta $y = -x$ en donde pertenecen los puntos $Q(1, -1)$ y $R(-1, 1)$ puesto que verifican su ecuación.



De forma similar a los ejercicios T4.3 y T4.6, primero se escriben los comandos de la traslación (ver sec. 4.3.1) y seguidamente los de la simetría axial (ver sec. 4.2.3) según se indica en la sección 4.3.7. En este caso se buscan los vértices transformados del rectángulo inicial por el producto de las dos transformaciones indicadas. Se ejecutan los comandos siguientes obteniendo que

```
Ppt = 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000 1.0000
      -3.0000 3.0000 3.0000 -3.0000 -3.0000
      2.0000 2.0000 -2.0000 -2.0000 2.0000
```

por lo que la correcta es la (c).

```
% Definición de P(x,y) por filas y trasponer
P=[-1,5; -1,-1; 3,-1; 3,5; -1,5]' % (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y). Pt=P-tilde
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P;
%%
% SE ASUME la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los TRASLADADOS
h=[-1;-2]; % Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=h % Matriz de traslación
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
title('Traslacion')
%%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[1;-1];R=[-1;1]; % Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1)); % Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=Q; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOa1=eye(3); % Matriz de giro inversa
AOa1(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]); % Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ah1*AOa1*AOX*AOa*Ah % Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt; % Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid; % Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:)) % --
```

```

title('Simetria respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)], [Q(2);R(2)], 'r') % Eje de simetría
%%
Ppt %Visualización del resultado

```

Respuesta al ejercicio T4.8

Siguiendo las indicaciones de la sección 4.3.9 se ejecutan los comandos siguientes y se calcula la matriz de la transformación A_t que se aplica al punto $(1, 6, 4)$ en coordenadas homogéneas (ver ec. (4.2)) obteniendo que

```

At = [ 1, 0, 0]
      [ 2, 1, -5/2]
      [-1, -1, 7/2]
Ppt = 1
      -2
      7

```

por lo que la respuesta correcta es la (d).

```

% TRES puntos (no alineados) en P e imágenes en Pp
P=[0,0;1,0;1,1]' % (VARIAR)
Pp=[2,-1;3,-2;0.5,1.5]' % (VARIAR)
[n1,n2]=size(P);Pt=ones(n1+1,n2);Pt(2:n1+1,:)=P; % Pt
Ppt=Pp;Ppt(2:n1+1,:)=Pp; % Ppt
% CÁLCULO de At (A-tilde):
syms a b c d e f; At=[1 0 0; e a b; f c d];
[a,b,c,d,e,f]=solve(At*Pt==Ppt, a,b,c,d,e,f);
At=eval(At)
%%
Pt=[1;6;4] %Punto (6,4)
Ppt=At*Pt; % P-prima-tilde = A-tilde * P-tilde
%%
Ppt %Visualización del resultado

```

Respuesta al ejercicio T4.9

La inversa de $G_{C,\alpha}$ es $G_{C,-\alpha}$ (ver sec. 4.2.2). Como $\alpha = +90^\circ = +\pi/2$ radianes, se está buscando la matriz $\tilde{A}_{C,-\pi/2}$ con $C(2,0)$ que coincide con $\tilde{A}_{C,\pi/2}^{-1}$. Se ejecutan los comandos siguientes (ver sec. 4.3.2) y se obtiene

```

ACa = 1.0000    0    0
      2.0000  0.0000  1.0000
      2.0000 -1.0000  0.0000

```

por lo que la respuesta correcta es la (a).

```

Pt=[1 1;0 1;0 0] % por ejemplo, el (0,0) y el (1,0)
%%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los puntos GIRADOS
a=-pi/2;C=[2;0]; % Ángulo y centro de giro (VARIAR)
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-C; % Matriz de traslación inicial
Ah1=Ah;Ah1(2:3,1)=C; % Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3); % Matriz de giro a con centro O(0,0)
AOa(2:3,2:3)=[cos(a), -sin(a); sin(a), cos(a)];

```

```

ACa=Ahl*AOa*Ah% Matriz de giro a con centro C
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=ACa; Ppt=At*Pt;% Transformación de la figura
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:))% --
title('Giro respecto un punto'),plot(C(1),C(2),'r*')

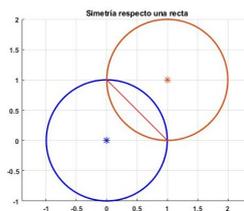
```

Respuesta al ejercicio T4.10

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 4.1.2 y 4.2.3).

- (i) Una simetría es una semejanza y las semejanzas no cambian la forma de las figuras, por lo que una circunferencia se transforma en otra circunferencia, no en una elipse con semiejes distintos. En consecuencia, (a) y (b) son falsas.
- (ii) Una simetría es una isometría por lo que mantiene las distancias. En consecuencia el radio de la circunferencia transformada también tiene que ser 1, por lo que la respuesta correcta es (c).
- (iii) Con un simple dibujo de la recta $y = 1 - x$ se observa que el simétrico del centro de la circunferencia $(0, 0)$ es $(1, 1)$ por lo que la correcta es (c) (obsérvese que la recta es una diagonal del cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$ mientras que el segmento que une el $(0, 0)$ y el $(1, 1)$ es la otra diagonal).

Vamos a hacerlo ahora aplicando la transformación. Para ello se eligen dos puntos distintos de la recta que define el eje de simetría ($y = 1 - x$), por ejemplo, para $x = 1$ y para $x = 0$ se tienen los puntos $Q(1, 0)$ y $R(0, 1)$. Con los comandos inferiores (ver sec. 4.3.4) se obtiene el resultado de la figura adjunta. En consecuencia, la respuesta correcta es la (c).



```

% Definición de X(t) y de Y(t) FIGURA
t=linspace(0,2*pi,333);% Parámetro (VARIAR)
X=1.*cos(t);% X(t) (VARIAR)
Y=1.*sin(t);% Y(t) (VARIAR)
% Definición de Pt(1,x,y) (P-tilde)
n2=length(t);Pt=ones(3,n2);Pt(2:3,:)=X;Y);
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:))
%
% SE ASUME asume la figura en Pt(3,n2)
% SE COLOCA en Ppt(3,n2) los SIMÉTRICOS POR UN EJE
Q=[1;0];R=[0;1];% Puntos del eje (VARIAR)
QR=R-Q;a=-atan2(QR(2),QR(1));% Ángulo de giro inicial
Ah=eye(3);Ah(2:3,1)=-Q;% Matriz de traslación inicial
Ahl=Ah;Ahl(2:3,1)=Q;% Matriz de traslación inversa
AOa=eye(3);% Matriz de giro inicial
AOa(2:3,2:3)=[cos(a),-sin(a);sin(a),cos(a)];
AOal=eye(3);% Matriz de giro inversa
AOal(2:3,2:3)=[cos(a),sin(a);-sin(a),cos(a)];
AOX=diag([1,1,-1]);% Matriz de simetría respecto OX
Ae= Ahl*AOal*AOX*AOa*Ah% Matriz de simetría recta PQ
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ae; Ppt=At*Pt;% Transformación de la figura

```

```
figure,hold on,axis equal;grid;% Quitar si se solapa
plot(Pt(2,:),Pt(3,:)),plot(Ppt(2,:),Ppt(3,:))% --
title('Simetría respecto una recta')
plot([Q(1);R(1)],[Q(2);R(2)],'r')% Eje de simetría
```

A.5. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 5

A.5.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 6.5.2:

1-b, 2-c, 3-a, 4-b, 5-a, 6-b, 7-c, 8-d, 9-d, 10-b.

A.5.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

Respuesta al ejercicio T5.1

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 5.1.3 y 5.1.4).

- (i) Como en esféricas $(\rho, \phi, \theta) = (\sqrt{3}, \pi/4, \pi/4)$ se tiene que

$$\begin{cases} x = \rho \operatorname{sen} \phi \cos \theta = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ y = \rho \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \theta = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ z = \rho \cos \phi = \sqrt{3} \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{2} \end{cases}$$

por lo que (a) es falsa.

- (ii) Como en cilíndricas $(r, \theta, z) = (\sqrt{3}, \pi/4, 1)$ se tiene que

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ y = r \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2} \frac{\sqrt{2}}{2} = 1 \\ z = z = 1 \end{cases}$$

por lo que (b) es cierta (en coordenadas homogéneas que es la única interpretación posible con 4 coordenadas).

- (iii) Ya no hacen falta más cálculos para responder, pero vamos a verificar la siguiente opción. Como en cilíndricas $(r, \theta, z) = (\sqrt{3}, 45, 1)$ se tiene que (obsérvese que 45 se supone que está en grados, no en radianes, por lo que dará valores extraños en el seno y el coseno al no tener las unidades adecuadas):

$$\begin{cases} x = r \cos \theta = \sqrt{2} \cos(45^\circ) = 0.7429 \\ y = r \operatorname{sen} \theta = \sqrt{2} \operatorname{sen}(45^\circ) = 1.2034 \\ z = z = 1 \end{cases}$$

por lo que (c) es falsa.

Respuesta al ejercicio T5.2

Se tiene latitud $-(52 + 14/60 + 2.8/3600) = -52.2341^\circ$ (negativa por estar en el hemisferio sur, ver sec. 5.1.4), por lo que la colatitud es $\phi = 90 - (-52.2341) = 142.2341^\circ$, mientras que la longitud es $\theta = -(69 + 14/60 + 9.9/3600) = -69.2361^\circ$ (negativa por ser longitud oeste, ver sec. 5.1.4). Por otro lado $\rho = R = 6371$ Km. Se pasan los ángulos a radianes y se aplican las ecuaciones (5.3) con los siguientes comandos

```
rho=6371, phi=142.2341*pi/180, theta=-69.2361*pi/180
x=rho*sin(phi)*cos(theta)
y=rho*sin(phi)*sin(theta)
z=rho*cos(phi)
```

obteniendo que las coordenadas cartesianas (x, y, z) de dicho punto (en Km) son

```
x = 1.3833e+03
y = -3.6484e+03
z = -5.0364e+03
```

por lo que (c) es la respuesta correcta.

Respuesta al ejercicio T5.3

Como dice el texto en la sección 5.2.2 se obtiene una matriz de $n_2 \times n_1$ puntos de 4 componentes en coordenadas homogéneas. En total, las dimensiones de Pt son $n_2 \times n_1 \times 4$. En consecuencia, la respuesta correcta es la (a).

Se puede comprobar obteniendo las dimensiones de Pt en cualquier superficie, por ejemplo, la de la sección 5.3.4. Para ello se ejecutan los comandos que definen la superficie en dicha sección y se ejecuta después `size(Pt)`.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas: PARABOLOIDE
radio=1; au=0; bu=radio; av=0; bv=2*pi; % Datos (VARIAR)
n1=23; n2=25; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au, bu, n1); v=linspace(av, bv, n2); % Paso 1: vecs u, v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=U.^2/4; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2, n1, 4); Pt(:, :, 2)=X; Pt(:, :, 3)=Y; Pt(:, :, 4)=Z;
figure, axis equal, hold on, grid % Quitar si se solapa
surf(Pt(:, :, 2), Pt(:, :, 3), Pt(:, :, 4))
%%
dimensionesPt=size(Pt)
```

Cuyo resultado es

```
dimensionesPt = 25 23 4
```

es decir, $n_2 \times n_1 \times 4$ puesto que $n_1 = 23$ el número de puntos utilizado en la discretización del primer parámetro u , y $n_2 = 25$ en el segundo parámetro v .

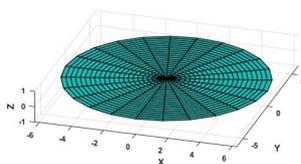
Respuesta al ejercicio T5.4

Primero realizamos dos observaciones. La primera es que hay dos parámetros independientes verificando que $0 \leq u, v \leq 2\pi$. Las coordenadas x e y tienen expresiones distintas (*independientes*) en función de estos parámetros por lo que será una superficie (ver sec. 5.2.2). En consecuencia, la respuesta (d) es falsa. La segunda es que las coordenadas (x, y, z) de la parametrización dada verifican la ecuación $z = 0$, en consecuencia, la figura estará incluida dentro del plano $z = 0$ por lo que la opción (c) es falsa (obsérvese que $z = 0$ es un plano por ser una ecuación del tipo $ax + by + cz = d$ con $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ y a, b, c no todos nulos).

Ahora lo resolvemos estudiando la parametrización. Las expresiones de x, y, z son las que vienen dadas por las coordenadas cilíndricas (ver sec. 5.1.3) fijando $z = 0$ (ver ec. (5.1)). En consecuencia, el parámetro u es el radio o distancia al eje OZ y el parámetro v es el argumento en polares. Como $0 \leq u \leq 2\pi$ los puntos (x, y, z) estarán situados desde el eje OZ (distancia 0) hasta una distancia 2π al eje. Como $0 \leq v \leq 2\pi$ los puntos darán una vuelta completa al eje OZ . En consecuencia, se obtendrá un círculo de radio $2\pi = 6.2832$ alrededor del eje OZ en el plano XY (plano $z = 0$). Por tanto, la correcta es la (b).

Finalmente lo vamos a resolver mediante el entorno de cálculo. Se ejecutan los comandos siguientes y se observa que la figura obtenida es un círculo plano por lo que la respuesta correcta es la (b).

Estos comandos son los mismos que los de la sección 5.3.4 en donde se ha modificado la parametrización y los límites de los parámetros en las líneas marcadas con `% ... (VARIAR)` por los que se dan en el ejercicio. Como dice en la sección citada, aunque se tenga que $z = 0$ en todos los puntos, no se puede poner `Z=0` puesto que da error al no tener las dimensiones adecuadas, se debe poner `Z=0*U`, por ejemplo.

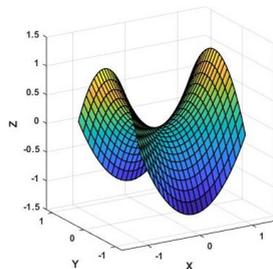


```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z) en cilíndricas
au=0;bu=2*pi;av=0;bv=2*pi;% Datos (VARIAR)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2);% Paso 1: vecs u,v
[U,V]=meshgrid(u,v);% Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V);% Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V);% Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=0*U;% Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))
```

Respuesta al ejercicio T5.5

La superficie está dada de forma explícita $z = f(x, y)$, por lo que se puede escribir como $(u, v, f(u, v))$ y se puede representar por (se toman valores alrededor del origen):

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = 1.2u^2 - 1.2v^2 \end{cases} \quad (u, v) \in [-1, 1] \times [-1, 1].$$



Se ejecutan los comandos siguientes utilizando la nueva parametrización (solo se han modificado las líneas marcadas con `%...` (VARIAR) de la sec. 5.3.4) y se obtiene que la respuesta correcta es la (a).

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
au=-1;bu=1;av=-1;bv=1;% Datos (VARIAR)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2);% Paso 1: vecs u,v
[U,V]=meshgrid(u,v);% Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U;% Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=V;% Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=1.2*U.^2-1.2*V.^2;% Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))
```

Respuesta al ejercicio T5.6

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 5.2.2).

- (i) La respuesta (a) es falsa porque una superficie regular tiene 2 vectores tangentes (linealmente independientes) en cada punto de su interior.
- (ii) Un cubo tiene 6 caras regulares y aristas y vértices entre ellas, por lo que es una superficie regular a trozos. En consecuencia, (c) es falsa. No es regular puesto que, por ejemplo, en las aristas tiene 4 vectores tangentes, 2 tangentes a una cara y 2 tangentes a la otra, pero solo uno tangente a ambas caras que tiene la dirección de la arista.
- (iii) La opción (d) es falsa puesto que una superficie regular tiene dos vectores tangentes a cada punto de su interior marcando direcciones distintas (son linealmente independientes).

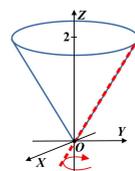
En consecuencia, la correcta es la (b).

Respuesta al ejercicio T5.7

Una pirámide circular es simétrica respecto su eje central por lo que es una superficie de revolución (ver sec. 5.3.4). Como a priori el eje puede ser cualquier recta, se suele asumir que es el eje OZ y se suelen utilizar coordenadas cilíndricas (ver sec. 5.1.3) como ocurre en este ejercicio. Ello se observa en las coordenadas cartesianas (x, y, z) que se dan en las respuestas dado que se tienen expresiones del tipo $x = r \cos \theta$, $y = r \sin \theta$, z en función de r (por ser superficie de revolución). Se consideran las siguientes afirmaciones.

- (i) En (a) u actúa de argumento y v de módulo (en X e Y), por lo que los límites en ambas variables están cambiados (u debería ir hasta 2π y v hasta 2). En consecuencia, es falsa.
- (ii) En (b) u actúa de módulo y v de argumento (en X e Y), por lo que los límites en ambas variables están cambiados (u debería ir hasta 2 y v hasta 2π). Además, en un cono z es función (lineal) de r no del argumento como está en (b). En consecuencia, es falsa.

- (iii) En (c) u actúa de módulo y v de argumento (en X e Y), por lo que los límites en ambas variables están correctos ($0 \leq u \leq 2$, $0 \leq v \leq 2\pi$). Además, en un cono z es función lineal de r , $z = r$. Se observa que el corte en el plano ZY (recta $x = 0$) es la recta bisectriz ($z = r = \sqrt{0^2 + y^2} = y$). En consecuencia, (c) es verdadera. La superficie viene dada por un segmento de la recta bisectriz ($x = 0$, $z = y$) girado alrededor del eje OZ como se observa en la figura adjunta.

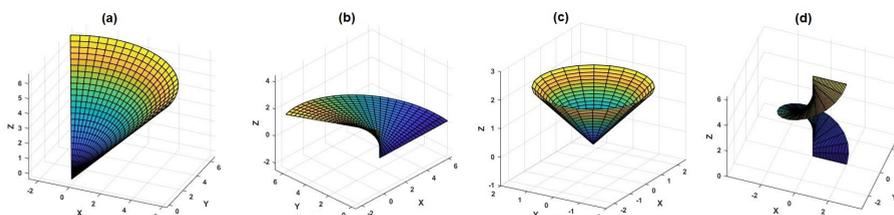


- (iv) En (d) v actúa de módulo y u de argumento (en X e Y), por lo que los límites en ambas variables están correctos ($0 \leq v \leq 2$, $0 \leq u \leq 2\pi$). Ahora bien, en un cono z es función (lineal) de r no del argumento como está en (d). En consecuencia, es falsa.

Vamos a resolver el problema ejecutando los comandos y obteniendo las superficies de cada opción. Para ello se toman los comandos de representación gráfica de una superficie parametrizada (ver sec. 5.3.4) y se cambian las líneas marcadas con `%...` (VARIAR) por las de cada respuesta. Ello se consigue con los comandos siguientes.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (a)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=V.*cos(U); Y=V.*sin(U); Z=V; % (a)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(a)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2,n2); % (b)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*cos(V); Y=U.*sin(V); Z=V; % (b)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(b)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (c)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*cos(V); Y=U.*sin(V); Z=U; % (c)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(c)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2,n2); % (d)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=V.*cos(U); Y=V.*sin(U); Z=U; % (d)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(d)')
```

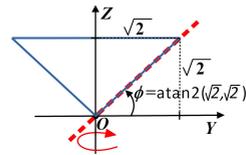
Se obtienen las 4 figuras siguientes en donde se observa que la correcta es la (c).



Respuesta al ejercicio T5.8

Una pirámide circular es simétrica respecto al eje que pasa por el medio (véase la figura del apartado (iii) de la respuesta del ejercicio anterior). Aunque las coordenadas cilíndricas son idóneas para representar superficies de revolución como esta (ver sec. 5.3.4), también se pueden utilizar coordenadas esféricas en este caso dado que se tiene latitud constante sobre todos los puntos del cono. Obsérvese que en las respuestas se tienen expresiones del tipo $x = r \cos \theta \sin \phi$, $y = r \sin \theta \sin \phi$, $z = r \cos \phi$ que se corresponde con las coordenadas esféricas (ver ec. (5.3)). Recuérdese que ϕ es la colatitud, es decir, el ángulo que se tiene desde el eje OZ en su sentido positivo (el *polo norte*) hasta el punto considerado. Se tienen las siguientes afirmaciones.

- (i) En (a) se ha puesto $\pi/4 = \arctan \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}$ a la colatitud en z que está bien como se observa en la figura adjunta sobre el plano YZ . Ahora bien, en las coordenadas x e y se ha puesto este valor a la longitud en vez de a la colatitud. Es incoherente con las coordenadas esféricas. En consecuencia, es falsa.
- (ii) En (b) se ha puesto $\pi/4$ a la colatitud en las coordenadas x e y que es correcto, pero en z se ha utilizado la longitud en vez de la colatitud. Es incoherente con las coordenadas esféricas. En consecuencia, es falsa. Además, el límite en la longitud no es 2π .
- (iii) En (c) ocurre como en (b). Además, los límites en los parámetros no están bien puestos. En consecuencia, es falsa.
- (iv) En (d) se ha puesto $\pi/4$ a la colatitud en las tres coordenadas cartesianas, se ha discretizado en $[0, 2\pi]$ la longitud v y el módulo es u igual en las tres coordenadas. En consecuencia, es cierta.

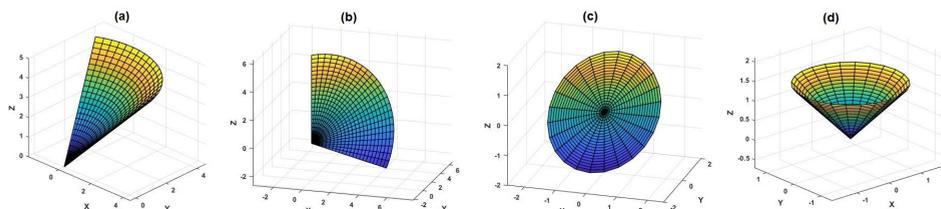


Vamos a resolver el problema ahora ejecutando los comandos siguientes y obteniendo las superficies de cada opción. Para ello se toman los comandos de representación gráfica de una superficie parametrizada (ver sec. 5.3.4) y se cambian las líneas marcadas con `% ... (VARIAR)` por las de cada respuesta.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (a)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=V.*sin(pi/4).*cos(U); % (a)
Y=V.*sin(pi/4).*sin(U); Z=V.*cos(pi/4); % (a)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(a)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (b)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*sin(V).*cos(pi/4); % (b)
Y=U.*sin(V).*sin(pi/4); Z=U.*cos(V); % (b)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(b)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (c)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*sin(V).*cos(pi/4); % (c)
Y=U.*sin(V).*sin(pi/4); Z=U.*cos(V); % (c)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
```

```
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(c)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (d)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=U.*sin(pi/4).*cos(V); % (d)
Y=U.*sin(pi/4).*sin(V); Z=U.*cos(pi/4); % (d)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(d)')
```

Se obtienen las 4 figuras siguientes en donde se observa que la correcta es la (d).



Respuesta al ejercicio T5.9

Obsérvese que como se tiene una superficie de revolución se han utilizado coordenadas cilíndricas que son las que mejor se adaptan (ver sec. 5.3.4 y ec. (5.1)). Es obvio que cuando $u = \pm 1$ se tienen los picos de la *peonza doble* dado que se tienen los valores máximos en z en módulo. Además, en esos puntos la distancia r al eje OZ en los picos vale 0, es decir, están sobre dicho eje.

La superficie no es regular en los picos ni en su *ecuador* (plano $z = 0$ que la divide por la mitad) dado que se tiene una arista (ver figura del enunciado del ejercicio) que es debida a la función valor absoluto utilizada en la expresión de r . En consecuencia, la opción (b) es falsa dado que $|u - 1|^2 = (u - 1)^2$ que es una función regular sin aristas. Se puede verificar representando la superficie como se hace en los comandos posteriores.

La respuesta (c) es falsa dado que como v es el argumento debe dar una vuelta completa de 0 a 2π , y en cambio, en (c) va de -1 a 1.

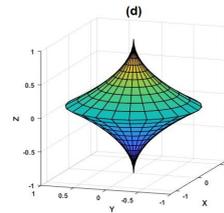
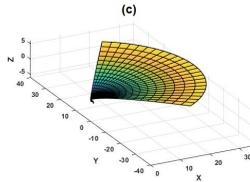
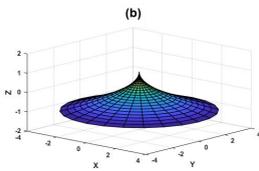
La correcta es la (d) o, en caso contrario, la (a). Se representa la opción (d) y a partir de la gráfica obtenida se observa que es la correcta. Las opciones (b) y (c) también se pueden descartar por representación gráfica, por lo que vamos a dibujar las tres opciones. Para ello se toman los comandos de representación gráfica de una superficie parametrizada (ver sec. 5.3.4) y se cambian las líneas marcadas con `%...` (**VARIAR**) por las de cada respuesta.

```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(-1,1,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (b)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=abs(U-1).^2.*cos(V); % (b)
Y=abs(U-1).^2.*sin(V); Z=U; % (b)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(b)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(-1,1,n2); % (c)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=abs(1-U.^2).*cos(V); % (c)
```

```

Y=abs(1-U.^2).*sin(V); Z=U; % (c)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(c)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(-1,1,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (d)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=(abs(U)-1).^2.*cos(V); % (d)
Y=(abs(U)-1).^2.*sin(V); Z=U; % (d)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(d)')

```



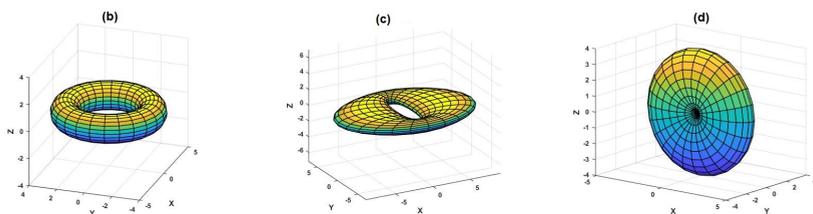
Respuesta al ejercicio T5.10

La mejor opción en este ejercicio es representar las superficies dadas con los siguientes comandos obteniendo que la respuesta correcta es la (b). Para ello se toman los comandos de representación gráfica de una superficie parametrizada (ver sec. 5.3.4) y se cambian las líneas marcadas con `%...` (VARIAR) por las de cada respuesta.

```

% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(-pi,pi,n1); v=linspace(-pi,pi,n2); % (b)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=(3+cos(U)).*cos(V); % (b)
Y=(3+cos(U)).*sin(V); Z=sin(U); % (b)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(b)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (c)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=(5+4*cos(U)).*cos(V); % (c)
Y=(5+cos(U)).*sin(V); Z=0.8*sin(U); % (c)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(c)')
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
n1=23;n2=25;% Número de líneas en la malla
u=linspace(0,2*pi,n1); v=linspace(0,2*pi,n2); % (d)
[U,V]=meshgrid(u,v); X=(2+2*cos(U)).*cos(V); % (d)
Y=sin(U); Z=(2+2*cos(U)).*sin(V); % (d)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid% Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)),title('(d)')

```



A.6. SOLUCIONES AL CAPÍTULO 6

A.6.1. Soluciones

A continuación se indican las soluciones del test de autoevaluación de la sección 6.5.2:

1-b, 2-d, 3-d, 4-a, 5-a, 6-a, 7-b, 8-a, 9-c, 10-b.

A.6.2. Pasos en la resolución y posibles comandos a utilizar

Primero se deben solucionar los ejercicios, luego comprobar vuestras respuestas y, al final, podéis comparar lo que habéis hecho con lo que se propone en esta sección. Obviamente, ni los comandos ni el proceso aquí utilizado tienen porqué coincidir con los que se hayan usado.

Respuesta al ejercicio T6.1

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 6.1.2 y 6.2.1).

- (i) Una traslación es una isometría y mantiene las distancias entre los puntos, por lo que la respuesta (a) es falsa.
- (ii) Si se aplica una traslación a un segmento se le suma un vector a todos sus puntos, por lo que la posición media relativa a los extremos del segmento se mantiene. Veámoslo: $(P' + Q')/2 = (P + \vec{h} + Q + \vec{h})/2 = (P + Q)/2 + \vec{h}$, por lo que el punto medio de $\overline{P'Q'}$ es el trasladado por $T_{\vec{h}}$ del punto medio de \overline{PQ} . En consecuencia, (b) es cierta.
- (iii) Las traslaciones no nulas no tienen ningún punto fijo, por lo que (d) es falsa.

La correcta es la (b).

Respuesta al ejercicio T6.2

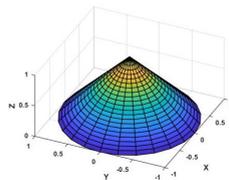
Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes. Se debe tener presente que se está considerando una superficie de revolución alrededor del eje OZ (ver sec. 5.3.4).

- (i) Si una pirámide circular o cono se hace rodar respecto su eje de simetría se mantiene invariante al ser circular, por lo que la respuesta (a) es cierta y no se debe marcar dado que se pide la falsa (ver sec. 6.2.4).
- (ii) Al aplicar una simetría respecto el plano XY que está en la base de la pirámide, ésta se invierte hacia abajo (con vértice en $(0, 0, -1)$) manteniendo la base sobre el mismo plano, puesto que todos los puntos del plano son puntos fijos (ver sec. 6.2.5). Al aplicar una simetría central el círculo unidad ($x^2 + y^2 = 1, z = 0$) se transforma en sí mismo (se mantiene invariante) y el vértice $(0, 0, -1)$ se transforma en $(0, 0, 1)$ que es el vértice inicial (ver sec. 6.2.2). Como ambas transformaciones son semejanzas, la pirámide circular (o cono truncado) se convierte en otra pirámide circular en cada transformación manteniendo su tamaño puesto que son isometrías, por lo que la imagen final transformada es igual a la inicial. En consecuencia, (b) es cierta y no se debe marcar dado que se pide la que es falsa.
- (iii) El plano $z = 0.5$ es horizontal perpendicular al eje de simetría de la pirámide circular y la corta en la mitad de su altura. En consecuencia, al realizar una simetría sobre el plano anterior el vértice $(0, 0, 1)$ se sitúa en el centro de su círculo base, es decir, en $(0, 0, 0)$, por lo que (c) es cierta y no se debe marcar dado que se pide la que es falsa (ver sec. 6.2.5).
- (iv) Como (a), (b) y (c) son ciertas, la falsa es la (d) que es la que se tiene que marcar.
- (v) La respuesta (d) sería cierta si se hiciera una homotecia de razón 0.5 (*zoom* al 50%) sobre el origen, pero como se realiza sobre su vértice $P(0, 0, 1)$ es falsa y es la que se debe marcar (ver sec. 6.2.3). La homotecia de centro P mantiene a P invariante, por lo que el vértice de la pirámide circular P se mantiene invariante en P y no es $(0, 0, 0.5)$.

Vamos a resolverlo ahora visualizando las superficies aunque es un proceso más largo. Dado que la pirámide circular tiene como eje de simetría el eje OZ y se nos da su ecuación $x^2 + y^2 = (z - 1)^2, 0 \leq z \leq 1$, es fácil obtener una parametrización con coordenadas cilíndricas. Obsérvese que como $0 \leq z \leq 1$ se tiene que $z = 1 - \sqrt{x^2 + y^2} = 1 - r$ (se toma la raíz negativa) que es función de r como ocurre con todas las superficies de revolución alrededor del eje OZ (ver sec. 5.3.4). Más concretamente,

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = 1 - r \end{cases}, 0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi.$$

Se utilizan los comandos de representación gráfica de una superficie parametrizada (ver sec. 5.3.4) y se cambian las líneas marcadas con `% ... (VARIAR)` por la parametrización anterior como se indica en los siguientes comandos obteniendo la gráfica adjunta.

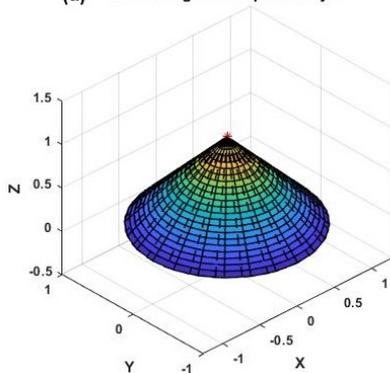


```
% SUPERFICIE Pt(1,X,Y,Z)
au=0;bu=1;av=0;bv=2*pi; % Datos (VARIAR)
n1=23;n2=25; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vecs u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=1-U; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
figure,axis equal,hold on,grid % Quitar si se solapa
surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))
```

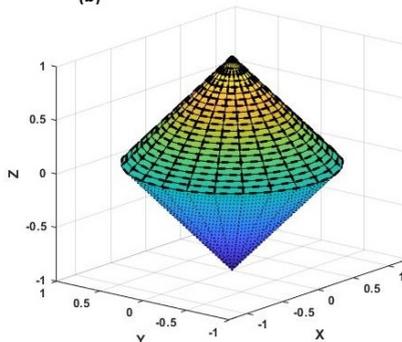
Se aplica el giro de la respuesta (a) (ver sec. 6.3.4) y se ve que tanto la imagen inicial como la transformada se solapan, lo cual indica que es invariante y que el apartado (a) es cierto. En la figura inferior (a) se ha representado la superficie inicial con línea continua en la malla y la final con línea discontinua. Se han tomado $Q(0, 0, 1)$ y $R(0, 0, 0)$ puntos del eje OZ (de ecuaciones $x = y = 0$) de modo que el vector director de la recta $\overrightarrow{RQ} = Q - R = (0, 0, 1)$ apunta hacia el sentido positivo del eje OZ (su tercera componente es positiva). Ello no afecta la opción (a) puesto que, como es invariante para cualquier ángulo de giro, también lo es para -40° .

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=40*pi/180;Q=[0;0;1];R=[0;0;0]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq % MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :, 2),Ppt(:, :, 3),Ppt(:, :, 4)), end % Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
```

(a) Giro de ángulo a respecto el eje r



(b)



Vamos a aplicar ahora las dos transformaciones de la respuesta (b) y veremos que tanto la imagen inicial como la transformada se solapan, lo cual indica que es invariante

y que el apartado (b) es cierto. Se toma el $P(0,0,0)$ y $\vec{N} = (0,0,1)$ como punto y vector normal del plano de simetría y $O(0,0,0)$ como centro de simetría puntual. Se aplican los comandos siguientes (ver sec. 6.3.2, 6.3.5 y 6.3.7) y se obtiene la figura superior (b) donde se ha representado la superficie inicial con línea continua en la malla y la final con línea discontinua más gruesa. Se presenta con línea punteada en la parte inferior la superficie intermedia resultado de la primera transformación.

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PLANO
P=[0;0;0];N=[0;0;1]; % P, N (VARIAR)
N=N/norm(N);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);
Ap=eye(4);Ap(2:4,1)=-P;Ap1=eye(4);Ap1(2:4,1)=P;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);Aoy1=Aoy;
Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);Aoy1(4,2)=Aoy(2,4);
Aoy1(2,4)=Aoy(4,2); Axy=diag([1,1,1,-1]);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aspi=Ap1*Aox1*Aoy1*Axy*Aoy*Aox*Ap % MATRIZ DE SIMETRÍA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aspi;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
%title('Simetría respecto un plano');
%
Pt=Ppt;% Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PUNTO
C=[0;0;0]; % Centro de simetría (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Ac1=eye(4);Ac1(2:4,1)=C;
Ao=diag([1,-1,-1,-1]); % Matriz de simetría central
Asc=Ac1*Ac% MATRIZ DE SIMETRÍA PUNTUAL
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Asc;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
%figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
%title('Simetría respecto un punto');
plot3(C(1),C(2),C(3),'r*') % Se dibuja el centro C
```

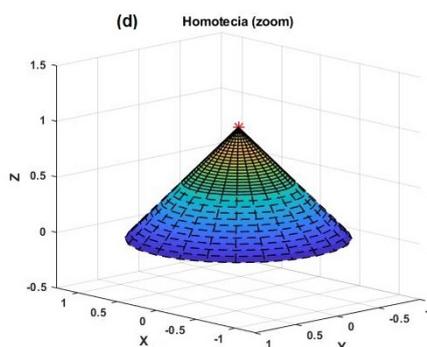
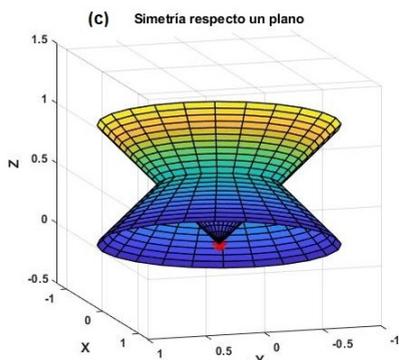
Vamos a aplicar la simetría respecto el plano $z = 0.5$ de la respuesta (c) y veremos que el vértice se sitúa en el origen, lo cual indica que el apartado (c) es cierto. Se dibuja el punto $O(0,0,0)$ con un asterisco para una mejor verificación de la afirmación anterior. Se toma el $P(0,0,0.5)$ y $\vec{N} = (0,0,1)$ como punto y vector normal del plano de simetría (ver sec. 6.3.5). En la figura inferior (c) se ha representado la superficie inicial con línea continua

en la malla y la final con línea discontinua. Se vuelve a definir Pt puesto que se ha cambiado su valor con los comandos de la opción anterior.

```

au=0;bu=1;av=0;bv=2*pi; % Datos (VARIAR)
n1=23;n2=25; % Número de líneas en la malla
u=linspace(au,bu,n1);v=linspace(av,bv,n2); % Paso 1: vecs u,v
[U,V]=meshgrid(u,v); % Paso 2: malla 2D en (u,v)
X=U.*cos(V); % Paso 3: X(U,V) (VARIAR)
Y=U.*sin(V); % Paso 3: Y(U,V) (VARIAR)
Z=1-U; % Paso 3: Z(U,V) (VARIAR)
Pt=ones(n2,n1,4);Pt(:,:,2)=X;Pt(:,:,3)=Y;Pt(:,:,4)=Z;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PLANO
P=[0;0;0.5];N=[0;0;1];% P, N (VARIAR)
N=N/norm(N);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);
Ap=eye(4);Ap(2:4,1)=-P;Ap1=eye(4);Ap1(2:4,1)=P;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);Aoy1=Aoy;
Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);Aoy1(4,2)=Aoy(2,4);
Aoy1(2,4)=Aoy(4,2); Axy=diag([1,1,1,-1]);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aspi=Ap1*Aox1*Aoy1*Axy*Aoy*Aox*Ap% MATRIZ DE SIMETRÍA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aspi;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Simetría respecto un plano');
plot3(0,0,0,'*r')% se dibuja el origen

```



Vamos a aplicar la homotecia de razón 0.5 de centro $P(0,0,1)$ de la respuesta (d) con los comandos inferiores (ver sec. 6.3.3) y se obtiene la figura superior (d) en donde se ha representado la superficie inicial con línea continua en la malla y la final con línea discontinua. Se observa que parece que el cono *se encoge* a la mitad hacia arriba puesto que

el centro de la homotecia es el vértice de la pirámide circular. Ello indica que el apartado (d) es falso y es el que se debe marcar. Además también se observa que la base de la figura transformada no está sobre el plano XY (plano $z = 0$) sino sobre el plano $z = 0.5$ por lo que también es falso el apartado (d).

```
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt los HOMOTÉTICOS
r=0.5;C=[0;0;1]; % Razón y centro (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Acl=eye(4);Acl(2:4,1)=C;
Aor=diag([1,r,r,r]); % Matriz homotetica de razón r
AhCr=Acl*Aor*Ac % MATRIZ DE HOMOTECIA
% A continuación: CÁLCULO REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AhCr;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:, :,2),Pt(:, :,3),Pt(:, :,4)) % Superficie
surf(Ppt(:, :,2),Ppt(:, :,3),Ppt(:, :,4)), end% Superficie --
title('Homotecia (zoom)');
plot3(C(1),C(2),C(3),'*r'); % Se dibuja el centro C
```

Respuesta al ejercicio T6.3

Se aplican los comandos siguientes (ver sec. 6.3.4) y se obtiene

```
Ppt = 1.0000
      -2.0000
      1.0000
      -0.0000
```

es decir, que el punto imagen es $(-2, 1, 0)$ que es la respuesta (d). Se toman, por ejemplo, los puntos $R(0, 0, 1)$ y $Q(1, 1, 2)$ que verifican las ecuaciones de la recta y, además, $\overrightarrow{RQ} = Q - R = (1, 1, 1)$ es un vector director de la recta que apunta hacia el sentido $z > 0$ como se pide, puesto que su tercera componente es positiva. Si el vector \overrightarrow{RQ} apuntara en sentido contrario intercambiaríamos los valores de los puntos P y Q .

```
P=[1;-1;-1],Pt=[1;P] % Punto P (VARIAR)
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=120*pi/180;Q=[1;1;2];R=[0;0;1]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq % MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
```

```

else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R];plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
Ppt% OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS TRANSFORMADOS

```

Respuesta al ejercicio T6.4

Las semejanzas transforman segmentos en segmentos, por lo que calculando las imágenes de los extremos del segmento inicial se obtienen los extremos del segmento transformado. Se aplican los comandos siguientes (ver sec. 6.3.5) y se obtiene

```

Ppt = 1.0000 1.0000
      0.6667 -0.6667
      -0.3333 -1.6667
      -0.6667 -1.3333

```

es decir, los puntos imagen de la respuesta (a). Se toma, por ejemplo, el punto $(0,0,0)$ que verifica la ecuación del plano $x - 2y - z = 0$ y $\vec{N} = (1, -2, -1)$ como vector normal director del plano (de los coeficientes de la ecuación del plano).

```

P=[0 1 0;-2 1 0]%' Punto P (VARIAR)
n2=size(P,2);Pt=ones(4,n2);Pt(2:4,:)=P;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PLANO
P=[0;0;0];N=[1;-2;-1];% P, N (VARIAR)
N=N/norm(N);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);
Ap=eye(4);Ap(2:4,1)=-P;Ap1=eye(4);Ap1(2:4,1)=P;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);Aoy1=Aoy;
Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);Aoy1(4,2)=Aoy(2,4);
Aoy1(2,4)=Aoy(4,2); Axy=diag([1,1,1,-1]);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aspi=Ap1*Aox1*Aoy1*Axy*Aoy*Aox*Ap% MATRIZ DE SIMETRÍA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aspi;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Simetría respecto un plano');
Ppt% OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS TRANSFORMADOS

```

Respuesta al ejercicio T6.5

Se calcula la matriz que realiza la transformación pedida con los comandos siguientes (ver sec. 6.3.9) y se aplica al punto (6,4,2) (ver sec. 6.1.3) obteniendo

```
P_prima = 1
          8
          15
          8
```

por lo que la respuesta correcta es la (a).

```
% Determinación directa de la matriz At (A-tilde)
% DEFINICIÓN de los 4 PUNTOS INICIALES en Q:
Q=[0,0,0;1,0,0;1,1,0;1,0,1]' % (VARIAR)
% DEFINICIÓN de los 4 PUNTOS FINALES en Qp (Q-prima):
Qp=[2,-1,0;3,-2,0;3,2,1;3,1,2]' % (VARIAR)
Qt=ones(4,4); Qpt=Qt; Qt(2:4,:)=Q; Qpt(2:4,:)=Qp; % Qt, Qpt.
% CÁLCULO DE LA MATRIZ At (A-tilde):
syms a11 a12 a13 a21 a22 a23 a31 a32 a33 h1 h2 h3;
At=[1 0 0 0; h1 a11 a12 a13; h2 a21 a22 a23; h3 a31 a32 a33];
[a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,h1,h2,h3]=...
    solve(At*Qt==Qpt,a11,a12,a13,a21,a22,a23,a31,a32,a33,...
    h1,h2,h3);
At=eval(At)
P_prima=At*[1;6;4;2] % Homólogo de (6,4,2)
```

Respuesta al ejercicio T6.6

Se escogen dos puntos distintos de la recta (que verifiquen sus ecuaciones), por ejemplo, (0,1,1) y (1,2,2). Como se asume que el sentido positivo es aquel en el que crecen las coordenadas, se toma $R(0,1,1)$ y $Q(1,2,2)$ (y no al revés) para que el vector director de la recta, $\vec{RQ} = Q - R = (1,1,1)$ apunte en la dirección de crecimiento de todas las coordenadas (como se pide) puesto que todos sus coeficientes son positivos. Se toma como ángulo $\alpha = +90 - \frac{\pi}{180}$ radianes, se ejecutan los comandos siguientes (ver sec. 6.3.4) y se obtiene

```
At =
    1.0000         0         0         0
   -0.6667    0.3333   -0.2440    0.9107
    0.9107    0.9107    0.3333   -0.2440
   -0.2440   -0.2440    0.9107    0.3333
```

que coincide con la respuesta (a).

```
P=[0 0 0;1 0 0;1 0 1;0 0 1;0 0 0]' % Puntos
n2=size(P,2); Pt=ones(4,n2); Pt(2:4,:)=P;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=pi/2; Q=[1;2;2]; R=[0;1;1]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R); n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4); Aq(2:4,1)=-Q; Aq1=eye(4); Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4); Aoy(2,2)=n2n3; Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy; Aoy(2,4)=-N(1); Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if (n2n3<1e-12) n2n3=1; N(3)=1; N(2)=0; end; % Aox=I
Aox=eye(4); Aox(3,3)=N(3)/n2n3; Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox; Aox(3,4)=-N(2)/n2n3; Aox(4,3)=-Aox(3,4);
```

```

Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq % MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:, :,2),Pt(:, :,3),Pt(:, :,4))% Superficie
surf(Ppt(:, :,2),Ppt(:, :,3),Ppt(:, :,4)), end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
At

```

Respuesta al ejercicio T6.7

Vamos a responder teniendo presente los siguientes razonamientos aunque algunos de ellos pueden ser redundantes (ver sec. 6.2.2 y 6.2.3).

- (i) El tamaño de $F(U)$ es mayor que el de U por lo que F no puede ser una simetría dado que esta última mantiene los tamaños al ser una isometría. En consecuencia, la respuesta (a) es falsa.
- (ii) Al aplicar una homotecia de razón mayor que uno las figuras aumentan de tamaño y se alejan del centro de la homotecia si no están sobre él. Eso es lo que le ocurre a $F(U)$ si el centro está a la izquierda del origen y debajo de éste (según la figura del ejercicio). En consecuencia (b) sí es cierta. Veamos las otras opciones.
- (iii) Al aplicar una homotecia de razón mayor que uno las figuras aumentan de tamaño y, si contienen al centro, lo continúan conteniendo puesto que es un punto fijo. En consecuencia, no se desplazan todos los puntos de la figura, por lo que la respuesta (c) no puede ser. El vértice que tienen en común U y $f(U)$ no puede ser el centro de la homotecia porque en ese caso $f(U)$ continuaría estando a la izquierda del centro como U (en la imagen del ejercicio).
- (iv) Por lo mismo que se ha comentado en (i), la respuesta (d) es falsa.

En consecuencia, la correcta es la opción (b).

A continuación se incluyen los comandos que permiten obtener la figura del ejercicio (ver ejercicio P6.2 y sec. 6.3.3).

```

P=[0 0 0;1 0 0;1 0 1;0 0 1;0 0 0;1 0 0;1 1 0;0 1 0;...
0 0 0;0 1 0;0 1 1;0 0 1;0 1 1;1 1 1;1 0 1;1 1 1;1 1 0]
n2=size(P,2);Pt=ones(4,n2);Pt(2:4,:)=P;
r=1.5;C=[-2;-2;-2]; % Razón y centro (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Acl=eye(4);Acl(2:4,1)=C;
Aor=diag([1,r,r,r]);% Matriz homotetica de razón r
AhCr=Acl*Aor*Ac% MATRIZ DE HOMOTECIA
% A continuación: CÁLCULO REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AhCr;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE

```

```
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superf
```

Respuesta al ejercicio T6.8

Las semejanzas transforman segmentos en segmentos, por lo que calculando las imágenes de los extremos del segmento inicial se obtienen los extremos del segmento transformado. Se aplican los comandos siguientes y se obtiene

```
Ppt = 1.0000 1.0000
      5.5698 3.5163
      -3.7915 -4.4015
      0.9717 6.1351
```

es decir, los puntos imagen de la respuesta (a).

Para el giro se toman, por ejemplo, los puntos $(2, 0, 0)$ y $(4, 2, 2)$ de la recta. Se definen $Q(2, 0, 0)$ y $R(4, 2, 2)$ y no al revés, para que el vector $\overrightarrow{RQ} = Q - R = (-2, -2, -2)$ tenga su sentido hacia $y < 0$ (su segunda componente es negativa). Se aplican los comandos siguientes para el producto de la homotecia y del giro obteniendo el resultado anterior indicado (ver sec. 6.3.3, 6.3.4 y 6.3.7).

```
P=[0 0 4;-2 4 4]', % Punto P (VARIAR)
n2=size(P,2);Pt=ones(4,n2);Pt(2:4,:)=P;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt los HOMOTÉTICOS
r=1.25;C=[2;5;2];% Razón y centro (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Acl=eye(4);Acl(2:4,1)=C;
Aor=diag([1,r,r,r]);% Matriz homotetica de razón r
AhCr=Acl*Aor*Ac% MATRIZ DE HOMOTECIA
% A continuación: CÁLCULO REPRESENTACIÓN gráfica --
At=AhCr;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Homotecia (zoom)');
plot3(C(1),C(2),C(3),'*r');% Se dibuja el centro C
%
Pt=Ppt;% Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=-90*pi/180;Q=[2;0;0];R=[4;2;2];% Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);% de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
```

```

if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq% MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:, :, 2),Pt(:, :, 3),Pt(:, :, 4))% Superficie
surf(Ppt(:, :, 2),Ppt(:, :, 3),Ppt(:, :, 4)), end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
Ppt% OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS TRANSFORMADOS

```

Respuesta al ejercicio T6.9

Como se busca la matriz de la transformación, da igual los puntos que se consideren, por ejemplo, los del ejercicio anterior. El vector de la traslación pedida viene dado por $\vec{h} = (0, 2, 2) - (1, 2, 3) = (-1, 0, -1)$. Para el giro se toman, por ejemplo, los puntos $(0, 2, 2)$ y $(1, 0, 2)$ del eje que verifican sus ecuaciones. Se definen $Q(0, 2, 2)$ y $R(1, 0, 2)$ (y no al revés) para que el vector $\vec{RQ} = Q - R = (-1, 2, 0)$ tenga su sentido hacia $y > 0$ (su segunda componente es positiva).

Se aplican los comandos que se listan a continuación y no se obtiene ninguna de las matrices de las respuestas para cada una de las transformaciones. Se consiguen la matriz de la traslación A_h (ver sec. 6.3.1), la matriz del giro A_{ea} (ver sec. 6.3.4) y la matriz de la simetría A_{sc} (ver sec. 6.3.2). En consecuencia, la matriz pedida será el producto de ambas ordenando el producto de derecha a izquierda (ver sec. 6.1.4), es decir, la matriz pedida es $A_{sc} * A_{ea} * A_h$ con valor

```

MATRIZ_PRODUCTO =
    1.0000     0         0         0
    6.0833   -0.2000    0.4000   -0.8944
    2.5416    0.4000   -0.8000   -0.4472
    6.2111    0.8944    0.4472   -0.0000

```

que coincide con la de la respuesta (c) que es la correcta.

```

P=[0 0 4;-2 4 4]', % Punto P (VARIAR)
n2=size(P,2);Pt=ones(4,n2);Pt(2:4,:)=P;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt la TRASLACIÓN
h=[-1;0;-1];% Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(4);Ah(2:4,1)=h% MATRIZ DE TRASLACIÓN
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D

```

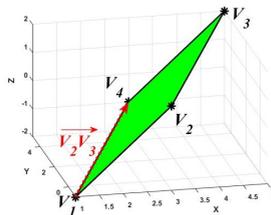
```

plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Traslación')
%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el GIRO
a=90*pi/180;Q=[0;2;2];R=[1;0;2]; % Ángulo,Q,R (VARIAR)
N=(Q-R)/norm(Q-R);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2); % de R a Q
Aq=eye(4);Aq(2:4,1)=-Q;Aq1=eye(4);Aq1(2:4,1)=Q;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);
Aoy1=Aoy;Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);
Aoy1(4,2)=Aoy(2,4); Aoy1(2,4)=Aoy(4,2);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end; % Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aoz=eye(4);Aoz(2,2)=cos(a);Aoz(3,3)=Aoz(2,2);
Aoz(2,3)=-sin(a);Aoz(3,2)=-Aoz(2,3);
Aea=Aq1*Aox1*Aoy1*Aoz*Aoy*Aox*Aq % MATRIZ DE GIRO
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aea;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Giro de ángulo a respecto el eje r');
xy=[Q,R]';plot3(xy(:,1),xy(:,2),xy(:,3),'r');
plot3(Q(1),Q(2),Q(3),'*r');
%
Pt=Ppt; % Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PUNTO
C=[2;1;5]; % Centro de simetría (VARIAR)
Ac=eye(4);Ac(2:4,1)=-C;Ac1=eye(4);Ac1(2:4,1)=C;
Ao=diag([1,-1,-1,-1]); % Matriz de simetría central
Asc=Ac1*Ac % MATRIZ DE SIMETRÍA PUNTUAL
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Asc;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt; % Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2; % Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1); % Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end; % Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid % Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:)) % Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:)) % Curva 3D
else, surf(Pt(:,:,2),Pt(:,:,3),Pt(:,:,4)) % Superficie
surf(Ppt(:,:,2),Ppt(:,:,3),Ppt(:,:,4)), end% Superficie --
title('Simetría respecto un punto');
plot3(C(1),C(2),C(3),'*r') % Se dibuja el centro C
MATRIZ_PRODUCTO=Asc*Aea*Ah % OBTENCIÓN DE LA MATRIZ

```

Respuesta al ejercicio T6.10

Este ejercicio es similar al T4.7 cuya respuesta se encuentra en A.4.2. Como se observa en la imagen adjunta (en donde se ha utilizado los comandos `xyz=[1,-1,-2; 3,-1,1; 5,5,2; 3,5,-1]'`, `fill3(xyz(1,:),xyz(2,:),xyz(3,:), 'g')`, `grid`, el vértice desconocido es $V_4(3,5,-1)$ que se puede obtener, por ejemplo, como $V_4 = V_1 + \overrightarrow{V_2V_3} = (1,-1,-2) + (5,5,2) - (3,-1,1) = (3,5,-1)$.



Sea $S(2,3,4)$ el punto dado en el enunciado. Un vector de la recta diagonal del primer octante, de ecuaciones $x = y = z$, se puede obtener a partir de la diferencia de dos puntos distintos de ella, por ejemplo, si se toman $P_1(1,1,1)$ y $P_2(0,0,0)$ puntos de la recta, se tiene que $\vec{N} = P_1 - P_2 = (1,1,1)$ es un vector director de la recta.

Se pide realizar primero una traslación de vector $\vec{h} = \overrightarrow{V_4S} = S - V_4 = (2,3,4) - (3,5,-1) = (-1,-2,5)$ y, seguidamente, una simetría respecto el plano que pasa por el origen $O(0,0,0)$ y tiene a $\vec{N} = (1,1,1)$ como vector director (recuérdese que el vector director de un plano es perpendicular al mismo). Se ejecutan los comandos siguientes (ver sec. 6.3.1, 6.3.5 y 6.3.7) y se obtiene que

```
Ppt = 1.0000  1.0000  1.0000  1.0000  1.0000
       0 -1.3333 -5.3333 -4.0000  0
      -3.0000 -6.3333 -6.3333 -3.0000 -3.0000
       3.0000  2.6667 -2.3333 -2.0000  3.0000
```

por lo que la opción correcta es la (b).

```
P=[1,-1,-2;3 -1 1;5 5 2;3 5 -1;1,-1,-2]', % Punto P (VARIAR)
n2=size(P,2);Pt=ones(4,n2);Pt(2:4,:)=P;
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt la TRASLACIÓN
h=[-1;-2;5]; % Vector traslación (VARIAR)
Ah=eye(4);Ah(2:4,1)=h % MATRIZ DE TRASLACIÓN
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Ah;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:,1),Pt(:,2),Pt(:,3),Pt(:,4))% Superficie
surf(Ppt(:,1),Ppt(:,2),Ppt(:,3),Ppt(:,4)), end% Superficie --
title('Traslación')
%
Pt=Ppt;% Redefinición de Pt
%
% SE ASUME Pt(4,n2)=CURVA o Pt(n2,n1,4)=SUPERFICIE
% SE COLOCA en Ppt el SIMÉTRICO POR UN PLANO
P=[0;0;0];N=[1;1;1];% P, N (VARIAR)
N=N/norm(N);n2n3=sqrt(N(2)^2+N(3)^2);
Ap=eye(4);Ap(2:4,1)=-P;Apl=eye(4);Apl(2:4,1)=P;
Aoy=eye(4);Aoy(2,2)=n2n3;Aoy(4,4)=Aoy(2,2);Aoy1=Aoy;
Aoy(2,4)=-N(1);Aoy(4,2)=-Aoy(2,4);Aoy1(4,2)=Aoy(2,4);
Aoy1(2,4)=Aoy(4,2); Axy=diag([1,1,1,-1]);
if(n2n3<1e-12)n2n3=1;N(3)=1;N(2)=0;end;% Aox=I
Aox=eye(4);Aox(3,3)=N(3)/n2n3;Aox(4,4)=Aox(3,3);
```

```

Aox1=Aox;Aox(3,4)=-N(2)/n2n3;Aox(4,3)=-Aox(3,4);
Aox1(4,3)=Aox(3,4);Aox1(3,4)=Aox(4,3);
Aspi=Ap1*Aox1*Aoy1*Axy*Aoy*Aox*Ap% MATRIZ DE SIMETRÍA
% A continuación: CÁLCULO y REPRESENTACIÓN gráfica --
At=Aspi;if ndims(Pt)< 3, Ppt=At*Pt;% Ppt=At*Pt en CURVA 3D
else, Ppt=Pt;for j=1:n1;for i=1:n2;% Inicio bucles malla
Ppt(i,j,:)=At*reshape(Pt(i,j,:),4,1);% Ppt=At*Pt SUPERFICIE
end;end; end;% Fin bucles malla
figure,hold on,axis equal,grid% Quitar si se solapa
if ndims(Pt)< 3, plot3(Pt(2,:),Pt(3,:),Pt(4,:))% Curva 3D
plot3(Ppt(2,:),Ppt(3,:),Ppt(4,:))% Curva 3D
else, surf(Pt(:, :,2),Pt(:, :,3),Pt(:, :,4))% Superficie
surf(Ppt(:, :,2),Ppt(:, :,3),Ppt(:, :,4)), end% Superficie --
title('Simetría respecto un plano');
Ppt% OBTENCIÓN DE LOS PUNTOS TRANSFORMADOS

```


Referencias

GEOMETRÍA EUCLÍDEA, Estruch Fuster, V., Gregori Gregori, V., Roig Sala, B., Ed. Universitat Politècnica de València, ISBN 9788490487297, Ref. 793, 2018.

ÁLGEBRA MATRICIAL, Estruch Fuster, V., Gregori Gregori, V., Roig Sala, B., Ed. Universitat Politècnica de València, ISBN 9788490486443, Ref. 634, 2017.

FONAMENTS MATEMÀTICS: PRÀCTIQUES DE LABORATORI, Alamar Penadés, M., Vidal Meló, A., Roig Sala, B., Ed. Universitat Politècnica de València, ISBN 9788483633281, Ref. 3579, 2008.

INTRODUCCIÓN RÁPIDA A MATLAB Y SIMULINK PARA CIENCIA E INGENIERÍA, Gil Rodríguez, M., Ed. Díaz de Santos, ISBN 8479785-969, 2003.

CÁLCULO BÁSICO, Boigues Planes, F.J., Estruch Fuster, V., Gregori Gregori, V., Roig Sala, B., Sapena Piera, A., Vidal Meló, A., Ed. Universitat Politècnica de València, ISBN 9788490482926, Ref. 353, 2014.

Índice

- abscisa, 70
- antena parabólica, 129
- argumento, 71

- bloque matricial, 18

- cambio de escala, 100, 151
- cardioide, 73, 83
- circunferencia
 - en paramétricas, 74
 - en polares, 82
 - unidad, 38
- cizallamiento, 108, 165
- colatitud, 122
- columnas, 47
- complejos, 71
- componente de un vector, 17
- composición de transformaciones, 92, 93,
109, 146, 147, 167
- conjunto transformado, 92, 146
- cono circular, 45
- coordenadas
 - cartesianas, 69, 119
 - cilíndricas, 121
 - esféricas, 122
 - homogéneas, 70, 120
 - polares, 71
- criterios de prioridad, 12
- cubo unidad, 174
- curva
 - cerrada, 34, 70
 - en polares, 73
 - explícita, 38, 72
 - implícita, 38, 72, 123
 - paramétrica, 38, 72, 123
 - regular, 72, 123
 - regular a trozos, 72, 123

- determinante, 51
- diagonal de una matriz, 48

- ECM, 58
- ecuación matricial, 52
- eje
 - de giro, 151
 - de simetría, 151
 - de una elipse, 39
- elipse, 39
 - parametrización de una, 74
- epsilon de la máquina, 14
- error
 - cuadrático medio, 58
 - en un sistema, 57
- espiral
 - de Arquímedes, 81
 - logarítmica, 75, 81
- espiral de Arquímedes, 75
 - en polares, 82
- estrella, 83

- figura, 92, 146
 - cerrada, 34, 70
 - invariante, 92
 - semejante, 92, 146
 - transformada, 92, 146
- fila, 47
- forma
 - exponencial, 71
 - polar, 71
 - trigonométrica, 71
- función
 - definida a trozos, 36
 - escalón unidad, 37

- giro, 96, 103, 151, 162

- homólogo, 91, 93, 145, 147
- homotecia, 99, 107, 150, 161

- imagen, 92, 93, 146, 147
 - digital en color, 61
 - digital en escala de grises, 60

- intensidad de luz, 61
- invariante, 92, 146
- isometría, 92, 146
 - directa, 92, 146
 - inversa, 92, 146
- latitud, 122
- longitud, 122
 - de arco, 84
- módulo, 71
- mínimos cuadrados, 57
- matriz, 47
 - aleatoria, 19
 - ampliada, 31, 54
 - columna, 70
 - de la aplicación lineal, 93, 147
 - de la transformación, 93, 147
 - del sistema, 31, 54
 - diagonal, 49
 - fila, 70
 - identidad, 19, 51
 - inversa, 51
 - no singular, 92, 146
 - nula, 19, 49
 - real, 48
 - traspuesta, 50
 - triangular inferior, 49
 - triangular superior, 49
- movimiento, 92, 146
- número
 - complejo, 70
 - de incógnitas, 54
- nube de puntos, 133
- operaciones
 - elemento a elemento, 23
 - matriciales, 20
 - prioridad en, 12
- ordenada, 70
- origen, 70, 119
- pétalos, 73
- píxel, 60
- parámetro, 38
- paraboloide, 129
- parametrización
 - de una curva, 38, 72, 123
 - de una superficie, 124
- picos, 45
- potencia de una matriz, 50
- precisión
 - cuádruple, 14
 - doble, 14
- producto
 - de transformaciones, 92, 93, 109, 146, 147
 - matricial, 50
 - por un escalar, 49
- prompt, 11
- punto
 - del espacio, 119
 - del plano, 69
 - invariante, 92, 146
- rango, 20
 - máximo, 20, 51
- RECM, 58
- recta, 73, 126
- regla
 - de la mano derecha, 120
 - del sacacorchos, 120
- regresión
 - cuadrática, 58
 - lineal, 58
 - polinómica, 58
- rotación, 96
- semejanza, 92, 146
- sentido antihorario, 71
- sesgado, 108, 165
- silla de montar, 45
- simetría
 - axial, 97, 105, 151, 162
 - central, 96, 149
 - ortogonal, 154
 - plana, 154, 164
 - puntual, 96, 104, 149, 160
- sistema
 - compatible, 54
 - compatible determinado, 54
 - compatible indeterminado, 54
 - incompatible, 54
 - lineal, 31, 54
 - sobredeterminado, 57
- solución de un sistema lineal, 31, 55, 56
- submatriz, 18
- suma de matrices, 49
- superficie
 - de revolución, 129
 - explícita, 41, 124

- implícita, 124
- paramétrica, 42, 124
- regular, 124
- regular a trozos, 124

- término independiente, 31, 54
- teorema de Rouché-Frobenius, 54
- tetrafolio, 83
- toro, 144
- transformación, 91, 145
 - afín, 92, 146
 - identidad, 92, 146
 - perspectiva, 173
 - proyectiva, 173
- transformado, 91, 93, 145, 147
- traslación, 95, 102, 149, 159
- trifolium, 73

- variable, 15
 - simbólica, 27
- vector
 - columna, 17, 48
 - de color, 61
 - de incógnitas, 31, 54
 - de traslación, 93, 147
 - fila, 17, 48
 - perpendicular, 72
 - posición, 69, 119
 - tangente, 72, 85, 123, 125, 139, 140
- volteo
 - central, 62
 - horizontal, 62
 - vertical, 62