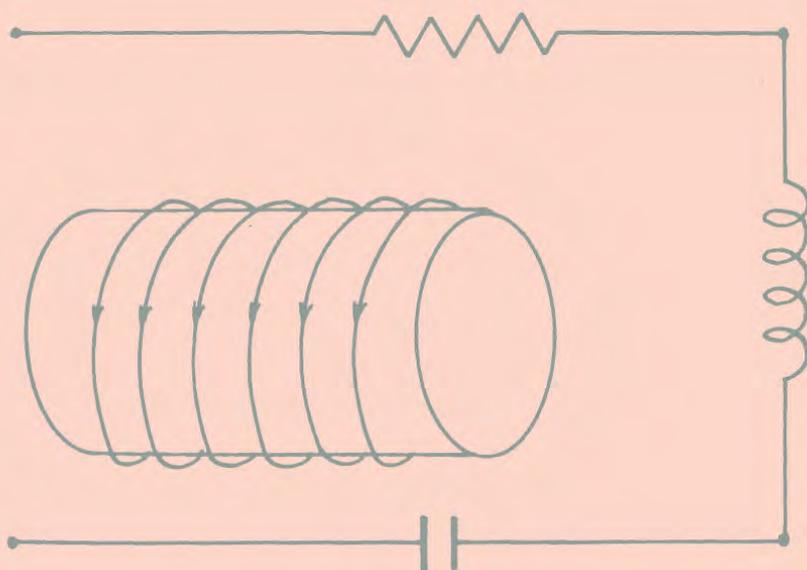


CURSO DE FÍSICA APLICADA

# ELECTROMAGNETISMO Y SEMICONDUCTORES



J. Llinares - A. Page



J. Llinares  
A. Page

*Colaboradores:*

J.M. Cruz  
J. Sancho

**CURSO DE FÍSICA APLICADA**

**ELECTROMAGNETISMO Y SEMICONDUCTORES**



[http://tiny.cc/edUPV\\_rea](http://tiny.cc/edUPV_rea)

**Autores:**

J. Llinares

A. Page

**Colaboradores:**

J.M. Cruz

J. Sancho

Primera edición, 1987

Editado por edUPV [www.lalibreria.upv.es](http://www.lalibreria.upv.es) / Ref.:6744\_01\_01\_01

ISBN: 978-84-7721-521-9 (versión impresa)

DOI: <https://doi.org/10.4995/REA.2022.674401>



Electromagnetismo y semiconductores / edUPV

Se permite la reutilización y redistribución de los contenidos siempre que se reconozca la autoría y se cite con la información bibliográfica completa. No se permite el uso comercial ni la generación de obras derivadas.

**A Mari Carmen y Adela**



## ***RESUMEN***

En cuanto al contenido, los capítulos son: Análisis Vectorial, Mecánica del punto, Electostática, Electrocinética, Magnetostática, Electrodinámica, Introducción a la Teoría de circuitos, Ondas Electromagnéticas, Introducción a la Física de Semiconductores. Contiene ejemplos resueltos y enunciados de problemas con solución.

Además de las partes a las que hace referencia el título del libro se han incluido los capítulos relativos al Análisis Vectorial y Mecánica del punto necesarios para la comprensión del resto de la obra.

En las lecciones de Electromagnetismo se utilizan nociones elementales de la Teoría de Campos y se separan claramente los principios fundamentales de sus aplicaciones, que quedan reflejadas en los ejemplos resueltos y notas complementarias que se incluyen en cada lección.

En la parte de Teoría de circuitos se desarrollan los métodos generales para el análisis de circuitos en régimen permanente senoidal y se tratan algunos aspectos generales sobre máquinas eléctricas.

Finalmente, en las lecciones dedicadas a la Física de Semiconductores se sigue un enfoque cuantitativo de los fenómenos, discutiéndose la validez de los modelos a partir de resultados numéricos.



## ***PROPÓSITOS***

El objetivo fundamental que nos ha guiado a lo largo de la elaboración del presente texto es de que su contenido recogiera los principios, conceptos, teoremas y aplicaciones necesarias para la formación, en las partes de Electromagnetismo e Introducción a la Física de Semiconductores, de alumnos de primer curso de Universidad.

El tratamiento analítico y cuantitativo de casi todos los fenómenos físicos cuya descripción constituye el objeto de este texto, creemos que, aparte de favorecer una profunda comprensión de los mismos, favorece y desarrolla la habilidad de trabajar con los conceptos que en ellos intervienen, lo que lo hace especialmente indicado para los estudiantes de carreras técnicas.

Hemos considerado conveniente incluir, además de las partes a las que hace referencia el título del libro, unos capítulos dedicados al Análisis Vectorial y a la Mecánica del punto material. Las primeras resultan imprescindibles para iniciar al alumno en el manejo de la notación vectorial, necesaria para trabajar, con rigor y comodidad, en cualquier campo de la Física. En las lecciones de Mecánica sólo se han incluido aquellos conceptos y métodos imprescindibles para el desarrollo del resto del texto.

En cuanto a la parte de Electromagnetismo, se ha procurado utilizar una notación moderna, basada en el uso de la Teoría de Campos, y separar claramente los principios fundamentales de sus aplicaciones, que quedan reflejadas en los ejemplos resueltos que se incluyen en cada capítulo. Las últimas lecciones de esta parte se dedican a una introducción a la Teoría de Circuitos, tan importante en la mayoría de las carreras técnicas.

En los capítulos dedicados a la Física de Semiconductores hemos intentado, en la medida de lo posible, utilizar análisis cuantitativos de los fenómenos, de forma que el lector pueda, a partir de resultados numéricos, comprender el significado y alcance de los modelos que se desarrollan.

Todos los capítulos, salvo los correspondientes al Análisis Vectorial y Mecánica, van acompañados de una colección de problemas con solución. Asimismo, se han incluido algunas Notas Complementarias, en las que se desarrollan cuestiones de interés que, por su complejidad conceptual o matemática, han sido separadas de la trama fundamental del texto.

Finalmente, queremos expresar nuestro agradecimiento a los profesores, Dr. J. M. Cruz, por la elaboración inicial de los capítulos de Teoría de Circuitos, y Dr. J. Sancho por la composición del texto así como por la revisión de alguno de sus capítulos.

Los autores.

# ÍNDICE

## Capítulo 1. Introducción

1.1. La Ciencia Física .....	15
1.2. Magnitudes físicas .....	16
1.3. Unidades y medidas .....	18
1.4. Leyes físicas .....	19
1.5. Sistemas de unidades .....	21
1.6. Ecuaciones de dimensiones .....	24

## Capítulo 2. Vectores

2.1. Introducción .....	29
2.2. Espacio vectorial .....	29
2.3. Dependencia e independencia lineal de vectores. Base y dimensión de un espacio vectorial.....	30
2.4. Espacio vectorial euclídeo .....	31
2.5. Espacio afin euclideo .....	31
2.6. Vectores libres, deslizantes y localizados .....	32
2.7. Sistema de referencia .....	34
2.8. Suma de vectores .....	36
2.9. Producto por un escalar .....	37
2.10. Producto escalar de dos vectores .....	37
2.11. Producto vectorial de dos vectores .....	41
2.12. Producto mixto de tres vectores .....	45
2.13. Doble producto vectorial .....	46
2.14. Momento de un vector respecto a un punto .....	47

## Capítulo 3. Función vectorial de variable escalar

3.1. Definición .....	49
3.2. Derivación de una función vectorial de variable escalar .....	50
3.3. Triedro intrínseco .....	52

## Capítulo 4. Nociones de teoría de campos

4.1. Introducción .....	63
4.2. Campos escalares .....	64
4.3. Gradiente de un campo escalar .....	65
4.4. Campos vectoriales .....	68
4.5. Circulación de un campo vectorial. Concepto de potencial .....	71
4.6. Flujo de un campo vectorial .....	75
4.7. Estudio local de campos vectoriales .....	76
4.8. Divergencia de un campo vectorial .....	77
4.9. Rotacional de un campo vectorial .....	79
4.10. Otros operadores. El vector simbólico nabla .....	83

## Capítulo 5. Cinemática

5.1. Introducción a la Mecánica Clásica .....	87
5.2. Cinemática del punto .....	88
5.3. Cinemática de sistemas .....	101

## Capítulo 6. Cinemática del movimiento relativo

6.1. Introducción .....	103
6.2. Composición de velocidades .....	103
6.3. Composición de aceleraciones. Teorema de Coriolis .....	106
6.4. Movimiento relativo en el plano. Aplicación de polares planas .....	111

## Capítulo 7. Movimiento armónico simple

7.1. Introducción .....	117
7.2. Definición y característica .....	117
7.3. Composición de dos m.a.s. de la misma dirección .....	119
7.4. Composición de dos m.a.s. de direcciones perpendiculares .....	124

## Capítulo 8. Dinámica del punto

8.1. Introducción .....	129
8.2. Fuerza. Axiomas de la Mecánica Clásica .....	129
8.3. Cantidad de movimiento. Impulso .....	131
8.4. Momento cinético. Teorema del momento cinético .....	132
8.5. Ecuaciones del movimiento del punto material .....	134
8.6. Ecuaciones del equilibrio de un punto material .....	137

## Capítulo 9. Trabajo y energía

9.1. Trabajo .....	139
9.2. Potencia .....	140
9.3. Energía cinética. Teorema de la energía cinética .....	141
9.4. Energía potencial. Teorema de conservación de la energía mecánica. ....	142

## Capítulo 10. Dinámica del movimiento rectilíneo

10.1. Introducción .....	147
10.2. Fuerza dependiente de la posición .....	149
10.3. Fuerza dependiente de la velocidad .....	156
10.4. Fuerza dependiente del tiempo .....	158

## Capítulo 11. Electroestática

11.1. Naturaleza eléctrica de la materia. Carga eléctrica .....	161
11.2. Ley de Coulomb .....	162
11.3. Campo eléctrico .....	164
11.4. Potencial electrostático .....	168
11.5. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss .....	173
11.6. Teorema de Gauss en forma diferencial. Ecuaciones de Poisson y Laplace. ....	178
<b>Problemas</b> .....	183

## Capítulo 12. Conductores cargados en equilibrio

12.1. Conductores y dieléctricos. Metales .....	189
12.2. Equilibrio de un conductor .....	190
12.3. Fenómenos de influencia electrostática .....	194
12.4. Equilibrio de un sistema de conductores .....	196
12.5. Pantallas eléctricas .....	205
<b>Problemas</b> .....	209

## Capítulo 13. Capacidad. Condensadores

13.1. Capacidad de un conductor aislado .....	213
13.2. Condensador. Capacidad de un condensador .....	214
13.3. Asociación de condensadores .....	218
13.4. Energía electrostática .....	221
13.5. Fuerza entre las armaduras de un condensador. ....	225
<b>Problemas</b> .....	227

## Capítulo 14. Estudio macroscopico de los dieléctricos

14.1. Dieléctricos. Polarización .....	231
14.2. Vector polarización. Cargas de polarización .....	233
14.3. Desplazamiento eléctrico .....	235
14.4. Teorema de Gauss en presencia de dieléctricos .....	238
14.5. Condensador plano con varias capas de dieléctrico .....	243
14.6. Densidad de energía electrostática en un dieléctrico .....	246
<b>Problemas</b> .....	251

## Capítulo 15. Corriente continua

15.1. Corriente eléctrica .....	255
15.2. Densidad e intensidad de corriente .....	257
15.3. Ley de Ohm. Resistencia .....	260
15.4. Ley de Joule .....	267
<b>Problemas</b> .....	271

## Capítulo 16. Circuitos de corriente continua

16.1. Generadores. Fuerza electromotriz .....	275
16.2. Receptores. Fuerza contraelectromotriz .....	278
16.3. Aparatos polarizados y no polarizados .....	280
16.4. Tensión entre dos puntos de un circuito .....	280
16.5. Ecuación del circuito .....	282
16.6. Asociación de generadores .....	282
<b>Problemas</b> .....	287

## Capítulo 17. Acciones magnéticas sobre cargas en movimiento

17.1. Introducción .....	291
17.2. Campo magnético .....	291
17.3. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme .....	293
17.4. Fuerzas magnéticas sobre conductores que transportan corrientes .....	299
17.5. Acción de un campo magnético sobre un circuito plano. Momento magnético .....	301
<b>Problemas</b> .....	305

## Capítulo 18. Campos magnéticos independientes del tiempo

18.1. Introducción .....	309
18.2. Campo magnético producido por una corriente continua .....	310
18.3. Acciones mutuas entre dos corrientes. Definición de amperio .....	316
18.4. Flujo magnético. Divergencia de $\vec{B}$ .....	320
18.5. Rotación de $\vec{B}$ . Teorema de Ampère .....	321
<b>Problemas</b> .....	327

## Capítulo 19. Inducción electromagnética

19.1. Introducción .....	331
19.2. Fenómenos de inducción electromagnética .....	332
19.3. Ley de Faraday .....	333
19.4. Coeficientes de inducción .....	341
19.5. Energía almacenada en un campo magnético .....	346
<b>Problemas</b> .....	351

## Capítulo 20. Propiedades magnéticas de la materia

20.1. Materiales magnéticos .....	357
20.2. Intensidad de imantación .....	359
20.3. Excitación magnética. Susceptibilidad y Permeabilidad magnéticas .....	361
20.4. Ferromagnetismo .....	368
20.5. Circuitos magnéticos .....	373
20.6. Densidad de energía del campo magnético .....	377
<b>Problemas</b> .....	379

## Capítulo 21. Ecuaciones de Maxwell

21.1. Introducción .....	383
21.2. Conservación de la carga. Ecuación de continuidad .....	383
21.3. Ecuación de Ampère-Maxwell. Corriente de desplazamiento .....	385
21.4. Ecuaciones de Maxwell .....	389
21.5. Energía electromagnética. Vector de Poynting .....	391
<b>Problemas</b> .....	395

## Capítulo 22. Regímenes transitorios

22.1. Introducción .....	399
22.2. Ecuación característica de los dipolos lineales básicos .....	400
22.3. Leyes de Kirchhoff .....	402
22.4. Regímenes transitorios .....	404
<b>Problemas</b> .....	409

## Capítulo 23. Corriente alterna

23.1. Corriente alterna senoidal. Características .....	413
23.2. Generación de una corriente alterna senoidal .....	416
23.3. Corrientes alternas no senoidales .....	416
23.4. Respuesta de los dipolos básicos a la corriente alterna senoidal. Impedancia .....	418
23.5. Respuesta de un dipolo a una corriente alterna no senoidal .....	423
23.6. Representación compleja de una corriente alterna senoidal .....	423
23.7. Expresión compleja de las leyes de Kirchhoff .....	426
23.8. Impedancia y admitancia complejas. Expresión simbólica de la ley de Ohm. ....	427
23.9. Potencia en corriente alterna .....	430
<b>Problemas</b> .....	439

## Capítulo 24. Análisis de redes

24.1. Red eléctrica. Definiciones .....	445
24.2. Dipolos lineales: Generadores y receptores .....	446
24.3. Métodos de resolución de redes .....	449
24.4. Teoremas de equivalencia .....	457
<b>Problemas</b> .....	465

## Capítulo 25. Resonancia. Filtros. Cuadripolos

25.1. Resonancia en un circuito RLC serie .....	469
25.2. Tensión en los dipolos R, L y C. Noción de filtro .....	473
25.3. Resonancia en un circuito RLC paralelo. Circuito antirresonante ....	477
25.4. Circuito doblemente sintonizado .....	478
25.5. Cuadripolos .....	480
<b>Problemas</b> .....	485

## Capítulo 26. Máquinas eléctricas

26.1. Máquinas de corriente continua .....	489
26.2. Máquinas síncronas .....	492
26.3. Motor asíncrono .....	496
26.4. Motor paso a paso .....	498
26.5. Transformadores .....	499

## Capítulo 27. Movimiento ondulatorio

27.1. Movimiento ondulatorio .....	505
27.2. Ondas longitudinales y transversales .....	506
27.3. Descripción matemática de un movimiento ondulatorio unidimensional .....	506
27.4. Reflexión y refracción de ondas .....	516
27.5. Interferencias .....	523
<b>Problemas</b> .....	531

## Capítulo 28. Ondas electromagnéticas

28.1. Introducción .....	535
28.2. Ondas electromagnéticas planas en el vacío .....	536
28.3. Energía de las ondas electromagnéticas .....	540
28.4. Propagación en un dieléctrico lineal, homogéneo e isótropo .....	541
28.5. Ondas electromagnéticas en un medio conductor. Efecto pelicular .....	543
<b>Problemas</b> .....	549

## Capítulo 29. Naturaleza corpuscular de la radiación

29.1. Introducción .....	553
29.2. La radiación térmica .....	554
29.3. Teoría de Planck de la cavidad radiante .....	557
29.4. Propiedades corpusculares de la radiación. Efecto fotoeléctrico .....	560
29.5. Teoría de los fotones de Einstein .....	563
<b>Problemas</b> .....	567

## Capítulo 30. Estructura del átomo

30.1. El átomo de Bohr .....	569
30.2. Nociones de mecánica ondulatoria .....	575
30.3. El átomo de hidrógeno en la mecánica cuántica .....	587
30.4. Configuraciones electrónicas .....	589
<b>Problemas</b> .....	593

## Capítulo 31. Estructura del estado sólido

31.1. Estructura del estado sólido. Cristales .....	597
31.2. Tipos de cristales .....	597
31.3. Bandas de energía en sólidos .....	600
31.4. Aislantes, semiconductores y metales .....	602

## Capítulo 32. Metales

32.1. Introducción .....	607
32.2. Distribución de la energía de los electrones en un metal .....	607
32.3. Emisión termoiónica .....	613
32.4. Emisión fotoeléctrica .....	615
32.5. Emisión de campo .....	616
32.6. Potencial de contacto .....	617
<b>Problemas</b> .....	619

## Capítulo 33. Semiconductores

33.1. Semiconductores intrínsecos .....	621
33.2. Semiconductores extrínsecos .....	625
33.3. Masa efectiva .....	628
33.4. Distribución de portadores en las bandas de energía .....	630
33.5. Ley de acción de masas. Concentración de portadores en un semiconductor .....	637
<b>Problemas</b> .....	641

## Capítulo 34. Electrónica de semiconductores

34.1. Introducción .....	645
34.2. Corrientes de desplazamiento. Conductividad .....	645
34.3. Efecto Hall .....	652
34.4. Generación y recombinación de cargas .....	655
34.5. Difusión .....	658
34.6. Densidad de corriente total .....	660
34.7. Ecuación de continuidad .....	660
34.8. Inyección de carga de portadores minoritarios .....	665
34.9. Variación del potencial en un semiconductor con dopado no uniforme .....	668
<b>Problemas</b> .....	671

## Capítulo 35. El diodo de unión

35.1. Introducción .....	675
35.2. La unión p-n en circuito abierto .....	675
35.3. La unión p-n como rectificador .....	682
35.4. Corrientes de electrones y huecos en un diodo de unión .....	685
35.5. Característica tensión corriente del diodo de unión .....	691
35.6. Resistencia del diodo .....	693
35.7. Capacidades de transición y de difusión .....	694
35.8. Diodos Zener .....	696
35.9. Diodo túnel .....	697
<b>Problemas</b> .....	699

## Capítulo 36. Transistores de unión

36.1. Generalidades .....	703
36.2. Distribución de portadores en un transistor .....	704
36.3. Balance de corrientes en un transistor en el modo activo .....	707
36.4. El transistor como amplificador .....	714
<b>Problemas</b> .....	719

# CAPÍTULO 1

## INTRODUCCION

### *1.1. La Ciencia Física*

La Mecánica, Termodinámica, Acústica, Óptica, Electromagnetismo, Física Atómica, etc., son partes que tradicionalmente constituyen el cuerpo de la Física.

Sin embargo, es un hecho que a medida que se avanza en los conceptos y teorías de estas partes, menos claras están los límites de separación entre ellas.

La confección de **modelos teóricos** que se utilizan para la explicación de distintos fenómenos es una de las causas que se oponen a esa separación. Es sabido, por ejemplo, que con el modelo de onda se explican fenómenos tan distintos, en apariencia, como los acústicos, térmicos u ópticos.

Por otra parte la existencia de principios de validez general también refuerza este hecho. Así, por ejemplo, el principio de conservación de la energía es aplicado a distintas partes de la Física.

Todo ello, hace que el científico persista en la búsqueda de teorías que unifiquen la descripción de estas partes de modo que con el menor número posible de principios y reglas, se expliquen el mayor número de fenómenos.

La primera cuestión que se plantea al iniciar el estudio de una ciencia es su **objeto**, que en el caso de la Física (dejando aparte la Biofísica o Física de los procesos animados), lo constituye el conjunto de los fenómenos que pertenecen a la naturaleza inanimada.

La descripción de estos fenómenos requiere una serie de **conceptos** convenientemente elegidos que constituyen el sistema conceptual de la Física. Longitud, masa, tiempo, velocidad, carga eléctrica, etc., son conceptos que deben definirse unívocamente y que constituyen el sistema antes mencionado.

El paso siguiente es el establecimiento de unas **reglas o leyes** que permitan cuantificar estos fenómenos, para lo cual es necesario que algunos de los conceptos sean cuantificables mediante números y unidades. A estos conceptos se les denomina **magnitudes** y a la expresión de una regla mediante magnitudes se le denomina **ley física** o formulación matemática del fenómeno físico.

La formulación de esta ley se puede hacer mediante la observación (leyes de Kepler) o mediante la reproducción del fenómeno en condiciones provocadas y controladas (experimento físico).

En definitiva, la Física utiliza unos modelos matemáticos teóricos sobre los que, a partir de unas hipótesis, postula unos principios y desarrolla unos teoremas. La validez de aplicación de este modelo viene dada precisamente por el menor o mayor grado de cumplimiento de estas hipótesis.

Por ello, en la descripción de cualquier fenómeno físico es tan importante el establecimiento del modelo que se estudia como de las hipótesis de que se parte.

Se puede, por tanto, concluir en que el objetivo de la Física es descubrir y dar forma matemática a las leyes que relacionan entre sí a las magnitudes que intervienen en los fenómenos físicos.

### ***1.2. Magnitudes físicas***

Mediante la observación de cosas o de fenómenos físicos, la mente humana llega a formar conceptos sobre determinados atributos de los mismos, a los que se denominan observables. La longitud, el color, el volumen, el peso, la belleza, etc., son ejemplos de estas propiedades.

Ahora bien, la física utiliza observables que se puedan cuantificar, es decir, que sean susceptibles de ser medidos, y que constituyen las magnitudes físicas.

En consecuencia, una magnitud física es un observable que se puede medir. De esta definición se puede inducir que el campo de la física, es decir, su objeto, es cambiante, en función de que los fenómenos físicos observados sean medibles o no; de manera que el avance en las tecnologías de instrumentación de medida, no cabe duda que aumentan el campo de la física incluyendo conceptos y leyes, deducidas de estas nuevas medidas.

Así, por ejemplo, a medida que la tecnología ha permitido medir los fenómenos ligados al átomo, su estructura, su núcleo y sus electrones la física se ha ido ampliando hasta contener en ella una rama nueva conocida como la física atómica y nuclear que trata precisamente de estos temas.

La longitud, velocidad, fuerza, masa, peso, color, etc., son ejemplos de magnitudes físicas.

La belleza, el sabor, el olor, etc., son observables que no constituyen magnitudes físicas ya que no se pueden medir.

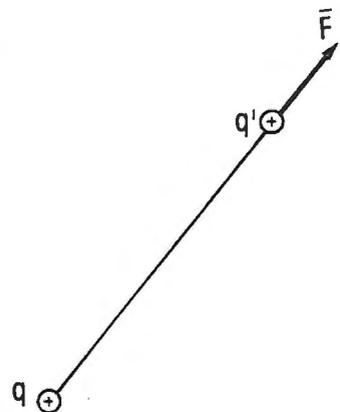
Por otra parte, algunas magnitudes físicas quedan perfectamente determinadas por un número real, acompañado de la unidad elegida para medirla.

Así, la masa, energía, tiempo, etc., son ejemplos de este tipo de magnitudes a las que se las denomina, **magnitudes escalares**. Otras magnitudes físicas como la velocidad, fuerza, campo eléctrico, etc., no quedan definidas únicamente por un número real sino que requieren el conocimiento de una dirección y un sentido. Este tipo de **magnitudes** se denominan **vectoriales** y al elemento matemático que las representa, vector.

Así, por ejemplo para determinar la magnitud física que representa la acción que sobre una carga eléctrica  $q'$  puntual y positiva, ejerce el campo electrostático, creado por una carga  $+q$ , no basta con indicar el escalar

$$\frac{kqq'}{r^2} = F$$

sino que además se necesita conocer la dirección y sentido de la interacción entre cargas; es decir se tendría que añadir, en la dirección y sentido de A hacia B.



*Fig. 1.1*

### 1.3. Unidades y medidas

**Cantidad de una magnitud física** es el estado de la misma en un determinado fenómeno físico. Así, la aceleración es una magnitud física y el valor de la aceleración de la gravedad en Valencia es una cantidad de esta magnitud

La comparación de cantidades de la misma magnitud se denomina **medida** y se efectúa tomando como referencia o patrón una determinada cantidad que recibe el nombre de unidad,  $u$ . Así, para medir la cantidad ( $C$ ) de una cierta magnitud física, se compara con su unidad,  $u$ , mediante la relación

$$(C) = C \cdot u \quad (1.1)$$

es decir:

$$\text{Cantidad} = \text{medida} \cdot \text{unidad}$$

De manera que, a cada cantidad ( $C$ ), se asocia un número,  $C$ , que representa el número de veces que ( $C$ ) es mayor que él. Dicho número recibe el nombre de **medida** de la cantidad ( $C$ ) referida a la unidad  $u$ .

Un ejemplo que aclara la relación (1.1) podría ser el siguiente. Supongamos que se pretende medir la cantidad de volumen de un aula determinada, para lo cual se toma como unidad el  $m^3$ , es decir, un cubo de arista un metro. A continuación se compara el volumen del aula con el volumen de la unidad y se observa que éste está contenido 965 veces en aquél. Esta observación permite escribir la (1.1) de la forma

$$(V_{\text{aula}}) = 965 \text{ m}^3 \quad (1.2)$$

en donde 965 es la medida y el primer miembro la cantidad.

Conviene destacar la diferencia conceptual entre cantidad y medida. En efecto, la cantidad de una magnitud física no depende de la unidad utilizada para medirla (el volumen del aula no depende de que éste se mida en  $m^3$  o en  $dm^3$ ). La medida, en cambio, sí depende de la unidad. Al utilizar en (1.2) el  $dm^3$  como unidad, la medida hubiera resultado  $965 \cdot 10^3$ ; de modo que para una misma cantidad, cuanto mayor es la unidad que se utiliza para medirla, menor será el valor de la medida obtenida.

### 1.4. Leyes físicas

En general, en todo fenómeno físico intervienen magnitudes físicas que son las que permiten cuantificarlo.

Veamos a continuación, a modo de ejemplo, dos fenómenos físicos distintos, las magnitudes físicas que intervienen en ellas y las relaciones que entre ellas se obtienen para cada caso:

#### Ejemplo 1

Si a los bornes AB, de una pila de voltaje  $V$ , se conectan los extremos de un hilo fino de cobre de longitud  $L$  y sección  $S$ , que lleva intercalados un amperímetro sensible  $G$ , y un interruptor  $C$  se construye el circuito que se esquematiza en la figura (1.2)

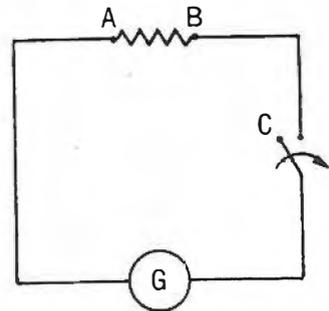


Fig. 1.2

Al cerrar el circuito mediante el interruptor, el amperímetro indicará un cierto valor de la intensidad de corriente  $I$ .

Repitiendo esta experiencia para distintos valores de voltaje, entre bornes, y longitudes y secciones del hilo, se obtienen las siguientes conclusiones:

- El valor de la intensidad es directamente proporcional al voltaje  $V$  entre bornes y a la sección,  $S$ , del hilo.
- El valor de la intensidad es inversamente proporcional a la longitud del hilo  $L$ .

Estas conclusiones se pueden expresar en la relación

$$I = K \frac{V \cdot S}{L} \quad (1.3)$$

donde  $K$  es la constante de proporcionalidad.

Las magnitudes físicas que intervienen en el fenómeno descrito son: Diferencia de potencial ( $V$ ), Superficie ( $S$ ), Longitud ( $L$ ), e intensidad de corriente ( $I$ ).

La (1.3) es la expresión matemática de la ley física que rige el fenómeno.

Ahora bien, si para valores constantes de  $V$ ,  $S$  y  $L$ , se cambia el material del circuito (se sustituye cobre por plata, por ejemplo), el valor de  $K$  es distinto. En consecuencia la constante  $K$  depende del material y por ello se denomina **característica**.

### Ejemplo 2

Si dos masas esféricas  $m$  y  $m'$  se sitúan a una distancia  $r$  y se dispone de un sistema que permite medir la fuerza con que ambas masas se atraen, al repetir el experimento para distintas distancias y masas, se comprueba que:

- La fuerza con que se atraen ambas masas es proporcional al producto de las masas ( $m \cdot m'$ ) e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre sus centros.

Es decir, que se puede escribir

$$F = G \frac{m \cdot m'}{r^2} \quad (1.4)$$

en donde las magnitudes que intervienen son: las masas ( $m$  y  $m'$ ), la longitud  $L$  (distancia entre centros,  $r$ ) y la fuerza,  $F$ .

La (1.4) representa la ley física que cuantifica el fenómeno expuesto.

Ahora bien, en este caso, la constante de proporcionalidad  $G$  es independiente de la naturaleza de las masas y de las distancias. A este tipo de constantes que no dependen de la naturaleza del material que interviene en el fenómeno se las denomina **constantes universales**.

En base a estos dos ejemplos propuestos resulta sencillo inferir que:

Las leyes físicas son expresiones matemáticas que relacionan entre sí cantidades de distintas magnitudes que intervienen en un fenómeno. En general, una ley física se expresa de la forma

$$(Y)\alpha(A)^a(B)^b \dots(N)^n \quad (1.5)$$

donde  $\alpha$  quiere decir “proporcional a”.

Si en vez de cantidades, se toman medidas, entonces la proporcionalidad se puede expresar mediante una igualdad de la forma

$$Y = KA^aB^b \dots N^n \quad (1.6)$$

donde, en general, interviene una constante cuyo valor dependerá de las unidades elegidas para medir las distintas cantidades; pudiendo ocurrir, además, que sea esta constante característica o universal, de acuerdo a como se han definido en los dos ejemplos propuestos.

Finalmente, cuando el valor de la constante  $k$  en una ley física es la unidad, se dice que las magnitudes físicas que intervienen son coherentes.

### ***1.5. Sistemas de unidades***

Se ha visto anteriormente que las leyes físicas relacionan entre sí cantidades de distintas magnitudes físicas. No obstante, siempre será posible elegir un conjunto de magnitudes que no estén relacionadas entre sí por ninguna ley física, es decir que sean independientes. Así por ejemplo, la masa, el espacio y el tiempo no están relacionadas entre sí por ninguna ley física. A estas magnitudes independientes se las denomina **magnitudes fundamentales** y a las unidades que se utilizan para medirlas, **unidades fundamentales**.

A partir de las fundamentales, se pueden definir las demás magnitudes mediante leyes físicas expresadas por relaciones matemáticas.

Pues bien, a las magnitudes así definidas se las denomina **derivadas** y a las leyes que permiten su obtención a partir de las magnitudes fundamentales, **ecuaciones de definición**. Así, por ejemplo, al adoptar como fundamentales, la masa, la longitud y el tiempo, que respectivamente se expresan por  $M$ ,  $L$  y  $T$ , la velocidad es una magnitud derivada, cuya ecuación de definición es

$$\bar{v} = \frac{d\bar{r}}{dt} \quad (1.7)$$

La aceleración también es una magnitud derivada por la ecuación de definición

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} \quad (1.8)$$

y a partir de ellas, la fuerza que también es magnitud derivada, viene dada por la ecuación de definición

$$\bar{F} = m \cdot \bar{a} \quad (1.9)$$

Las unidades empleadas para medir las magnitudes derivadas se denominan **unidades derivadas**

En ocasiones, para medir ciertas cantidades resulta más cómodo utilizar múltiplos o submúltiplos de la unidad, cuya denominación se consigue colocando un prefijo al nombre de la misma. Estos prefijos, sus símbolos y el factor por el que hay que multiplicar la unidad para su obtención, se recogen en la tabla (1.1).

Es importante señalar que no existe una única combinación de magnitudes fundamentales, sino que se pueden tomar varios conjuntos de ellas que sean independientes. Así, en Mecánica, si se toman como independientes la masa, la longitud y el tiempo, todas las demás se pueden expresar en función de ellas. Pero también se pueden elegir como fundamentales, la longitud, el tiempo y la fuerza ya que también son independientes entre sí.

TABLA DE MULTIPLOS Y SUBMULTIPLOS DE LA UNIDAD		
Prefijo	Símbolo	Factor
Tera	T	$10^{12}$
Giga	G	$10^9$
Mega	M	$10^6$
Kilo	K	$10^3$
Hecto	h	$10^2$
Deca	da	10
Deci	d	$10^{-1}$
Centi	c	$10^{-2}$
Mili	m	$10^{-3}$
Micro	$\mu$	$10^{-6}$
Nano	n	$10^{-9}$
Pico	p	$10^{-12}$
Femto	f	$10^{-15}$
Atto	a	$10^{-18}$

TABLA 1.1

Pues bien, elegido el conjunto de magnitudes fundamentales con sus respectivas unidades, y el conjunto de ecuaciones de definición que permita deducir las magnitudes derivadas y sus unidades, se dice que se ha definido un **sistema de unidades**.

El sistema de unidades adoptado oficialmente en España mediante disposición aparecida en el B.O.E. del 10 de Noviembre de 1967, es el Sistema Internacional (S.I.), que toma como magnitudes y unidades fundamentales las recogidas en la tabla 1.2.

SISTEMA INTERNACIONAL			
Magnitud Fundamental		Unidad Fundamental	
Nombre	Símbolo	Nombre	Símbolo
Masa	M	kilogramo	kg
Longitud	L	metro	m
Tiempo	T	segundo	s
Inten. de corriente	I	amperio	A

TABLA 1.2

Las ecuaciones de definición de las magnitudes derivadas se irán introduciendo a medida que se vayan necesitando a lo largo del texto.

Aunque el S.I. es el sistema de obligado cumplimiento, en la actualidad todavía se siguen utilizando algunos de los siguientes:

El **Cegesimal** o C.G.S. que es una variante del S.I., utilizando el centímetro en lugar del metro y el gramo en lugar del kilogramo, obedeciendo su nombre a las iniciales de estas unidades.

El **sistema técnico** que tiene como magnitudes fundamentales la longitud, la fuerza y el tiempo, siendo la masa una magnitud derivada. Las unidades de longitud y tiempo son las mismas que en el S.I. y la unidad de fuerza es el kilopondio o kp.

A continuación se dan las definiciones de las unidades fundamentales del S.I. y que son:

El metro (m) es la longitud del trayecto recorrido por la luz en el vacío durante el tiempo de  $1/299\,792\,458$  de segundo.

El kilogramo (kg) es la masa del prototipo de platino iridiado, definido por la III Conferencia General de Pesas y Medidas en 1901 y depositado en el Pabellón de Breteuil de Sevres.

El segundo (s) como la duración de  $9\,192\,631\,770$  períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de Cesio 133.

### 1.6. Ecuaciones de dimensiones

Si en la ecuación de definición de una magnitud derivada se sustituye cada magnitud fundamental por su símbolo, se obtiene una relación simbólica llamada **ecuación de dimensiones** de dicha magnitud derivada. Así, por ejemplo, obtengamos las ecuaciones de dimensiones de las magnitudes derivadas definidas por (1.7), (1.8) y (1.9). Serán respectivamente.

$$\text{de } \boxed{\bar{v} = \frac{d\vec{r}}{dt}} \rightarrow [V] = \frac{L}{T} = LT^{-1} \quad (1.10)$$

$$\text{de } \boxed{\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt}} \rightarrow [a] = \frac{[V]}{T} = \frac{LT^{-1}}{T} = LT^{-2} \quad (1.11)$$

$$\text{de } \boxed{\bar{f} = m\bar{a}} \rightarrow [f] = M[a] = MLT^{-2} \quad (1.12)$$

Lo que pone de manifiesto que la ecuación de dimensiones expresa la dependencia de una magnitud derivada respecto de las fundamentales.

Por otra parte estas ecuaciones permiten establecer o comprobar la **homogeneidad** de las leyes físicas ya que una expresión o ley física es homogénea cuando ambos miembros tienen la misma ecuación de dimensiones y ésta es una condición que debe cumplir toda ley física. Así, por ejemplo, tratemos de determinar la homogeneidad de la fórmula

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \quad (1.13)$$

que da el período de un péndulo simple.

El primer miembro representa un tiempo, lo que permite, por tanto, escribir su ecuación de dimensiones

$$[P] = T \quad (1.14)$$

En el segundo miembro se sabe que:

$2\pi$  es adimensional

$$[l] = L$$

$$[g] = [a] = LT^{-2}$$

por lo tanto

$$\left[ 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \right] = \left( \frac{L}{LT^{-2}} \right)^{1/2} = (T^2)^{1/2} = T \quad (1.15)$$

lo que comprueba la homogeneidad de la fórmula de partida.

Ahora bien, esta propiedad se puede utilizar a la inversa, es decir, puesto que las expresiones que dan las leyes físicas deben ser homogéneas, tratemos de descubrir, en base a esto, la relación que liga a estas magnitudes. Así por ejemplo vamos a tratar de obtener de la fórmula (1.13) aplicando la homogeneidad y partiendo de que la ley física debe ser de la forma

$$P = P(1, m, g)$$

que se puede escribir como

$$P = k1^x m^y g^z \quad (1.16)$$

donde k es una constante adimensional.

La homogeneidad de (1.16) permite escribir que

$$[P] = [1]^x [m]^y [g]^z \quad (1.17)$$

siendo

$$[P] = T$$

$$[1]^x = L^x$$

$$[m]^y = M^y$$

$$[g]^z = (LT^{-2})^z = L^z T^{-2z}$$

valores que sustituidos en (1.17) dan

$$T = L^x M^y L^z T^{-2z} = L^{(x+z)} M^y T^{-2z} \quad (1.18)$$

de donde se puede obtener las tres ecuaciones siguientes:

$$\text{- Para } L \rightarrow 0 = x + z$$

- Para M  $\rightarrow 0 = y$

- Para T  $\rightarrow 1 = - 2z$

que dan para las incógnitas los valores

$$x = + \frac{1}{2} \quad z = - \frac{1}{2} \quad y = 0$$

luego la ley física que se buscaba es

$$P = k \sqrt{\frac{1}{g}} \tag{1.19}$$

donde falta por determinar el valor de k.

Finalmente, hay que señalar que las constantes universales o características que intervienen en determinadas leyes físicas **pueden tener dimensiones**. Así, por ejemplo, en la expresión (1.4), la ecuación de dimensiones G es

$$[G] = \frac{[F]L^2}{M^2} = \frac{MLT^{-2}L^2}{M^2} = M^{-1}L^3 T^{-2} \tag{1.20}$$

lo que pone de manifiesto sus dimensiones.



# CAPÍTULO 2

## VECTORES

### 2.1. Introducción

Como ya se indica en el Capítulo anterior el objetivo fundamental de la Física es la descripción y cuantificación de los fenómenos físicos y para ello es imprescindible medir lo observado. De ahí que también a la Física se le denomina la ciencia de las medidas. Ahora bien, estas medidas realizadas en el desarrollo de un fenómeno necesitan un marco o modelo matemático para poderse representar y operar con ellas. Dicho marco lo constituye el espacio afín euclideo de dimensión 3 sobre el cuerpo de los números reales, del que a continuación se pasan a estudiar su naturaleza y propiedades más importantes

### 2.2. Espacio vectorial

El conjunto de elementos  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\} \in V$ , constituye un espacio vectorial sobre el cuerpo de los números reales cuando en dicho conjunto se ha definido una ley de composición interna (+) tal que  $\forall \bar{a}_i \in V$  verifique:

- a)  $\bar{a}_1 + \bar{a}_2 = \bar{a}_2 + \bar{a}_1$
- b)  $(\bar{a}_1 + \bar{a}_2) + \bar{a}_3 = \bar{a}_1 + (\bar{a}_2 + \bar{a}_3)$
- c)  $\exists \bar{0} / \bar{a} + \bar{0} = \bar{a}$
- d)  $\forall \bar{a} \in V, \exists \bar{a}' \in V / \bar{a} + \bar{a}' = \bar{0}$

y una ley de composición externa ( $\cdot$ ) tal que  $\forall \bar{a}_i \in V$  y  $\forall c_i \in \mathbb{R}$  verifique:

$$e) \quad (c_1 + c_2) \cdot \bar{a} = c_1 \cdot \bar{a} + c_2 \cdot \bar{a}$$

$$f) \quad c \cdot (\bar{a}_1 + \bar{a}_2) = c \cdot \bar{a}_1 + c \cdot \bar{a}_2$$

$$g) \quad c_1 \cdot (c_2 \cdot \bar{a}) = (c_1 \cdot c_2) \cdot \bar{a}$$

$$h) \quad 1 \cdot \bar{a} = \bar{a}$$

A los elementos,  $\bar{a}_i$ , que constituyen el espacio vectorial se les denomina vectores.

### ***2.3. Dependencia e independencia lineal de vectores. Base y dimensión de un espacio vectorial***

Se dice que el conjunto de vectores  $\{\bar{a}_1, \bar{a}_2, \dots, \bar{a}_n\}$ , de un espacio vectorial es linealmente independiente si

$$\sum_i^n \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0} \rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_n = 0 \quad (2.1)$$

En cualquier otro caso, el conjunto de vectores dado es **linealmente dependiente**, y siempre se podrá expresar uno de los vectores del conjunto en función de alguno o todos los demás. Si llamamos  $\bar{a}_1$  a este vector, como

$$\sum \lambda_i \bar{a}_i = \bar{0}$$

el valor de  $\bar{a}_1$ , en el supuesto de que todas las  $\lambda_i$  fueran distintas de cero, sería

$$\bar{a}_1 = \frac{\sum_i^n \lambda_i \bar{a}_i}{\lambda_1} \quad (2.2)$$

En este caso, el vector  $\bar{a}_1$  se dice que es combinación lineal de todos los demás.

Dado un espacio vectorial,  $V$ , cualquier conjunto de vectores pertenecientes a él y linealmente independientes tal que todo vector del espacio pueda expresarse como una combinación lineal de ellos, constituye una **base** de este espacio vectorial.

Al número de vectores de una base de un espacio vectorial  $V$ , se le denomina **dimensión** de ese espacio vectorial. En consecuencia, si la dimensión de un espacio vectorial es  $n$ , cualquier conjunto de  $n$  vectores linealmente independientes es una base de él.

Componentes de un vector en una base son los coeficientes reales que se obtienen al expresar este vector como combinación lineal de los de la base.

Las componentes de un vector en una base determinada son únicas.

## 2.4. Espacio vectorial euclídeo

Un espacio vectorial es euclídeo  $E^n(\mathbb{R})$ , si en él se define un producto escalar  $(\cdot)$

$$E^n(\mathbb{R}) \cdot E^n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

tal que

$$\forall \bar{a}_i \in E^n(\mathbb{R}) \quad y \quad \forall c_i \in \mathbb{R}$$

se verifique

a)  $\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_2 = \bar{a}_2 \cdot \bar{a}_1$

b)  $\bar{a}_3 \cdot (c_1 \bar{a}_1 + c_2 \bar{a}_2) = c_1 (\bar{a}_1 \cdot \bar{a}_3) + c_2 (\bar{a}_2 \cdot \bar{a}_3)$

c)  $\bar{a}_1 = \bar{0} \rightarrow \bar{a}_1 \cdot \bar{a}_1 > 0$

## 2.5. Espacio afín euclídeo

Se dice que un conjunto,  $A$ , de elementos, denominados puntos, es un espacio afín asociado al espacio vectorial  $V$  sobre  $\mathbb{R}$  si en dicho conjunto se ha definido una aplicación

$$f: A \times A \rightarrow V$$

tal que  $\forall A, B, C \in A$  y  $\forall \vec{a}_i \in V$  cumple

a)  $f(A, B) + f(B, A) = \vec{0}$

b)  $f(A, B) + f(B, C) = f(A, C)$

c) Fijados  $0 \in A$  y  $\vec{a}_i \in V$ ,  $\exists$  un único  $M \in A$  tal que  $f(0, M) = \vec{a}$

A los puntos se les designa por letras mayúsculas y a  $f(AB)$  por  $\overrightarrow{AB}$

Un espacio afín es euclídeo si lo es su espacio vectorial asociado  $V^n(\mathbb{R})$ . Así,  $\mathbb{R}^3$  es un espacio afín euclídeo asociado al espacio vectorial euclídeo  $\mathbb{R}^3(\mathbb{R})$  con la aplicación

$$f[(a_1 a_2 a_3), (b_1 b_2 b_3)] = (b_1 - a_1, b_2 - a_2, b_3 - a_3)$$

Sistema de referencia en un espacio afín  $A$  asociado al espacio vectorial  $V$  es el conjunto formado por un punto  $0$  de  $A$  y una base  $(\vec{e}_i)$  de  $V$ .

En el espacio afín euclídeo, el sistema de referencia es ortonormal si lo es la base  $(\vec{e}_i)$ .

Coordenadas de un punto  $P$  de  $A$  en el sistema de referencia  $0(\vec{e}_i)$  son las componentes del vector  $\overrightarrow{OP}$  en la base  $\vec{e}_i$ . En consecuencia, las coordenadas de un vector dado en un sistema de referencia son únicas.

### 2.6. Vectores libres, deslizantes y localizados

El conjunto de parejas ordenadas de puntos  $(AB)$  del espacio afín euclídeo de dimensión 3, define segmentos orientados dados por

$$\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A, y_B - y_A, z_B - z_A) \quad (2.3)$$

y que se caracterizan por sus atributos siguientes

- Módulo

$$|\overline{AB}| = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2 + (z_B - z_A)^2}$$

- Dirección, la de la recta que une los puntos A y B.

- Sentido el de A hacia B.

- Recta de acción, la que une los puntos A y B.

- Origen, el punto A.

- Extremo, el punto B.

Sobre estos segmentos orientados, denominados vectores se establecen las siguientes relaciones de equivalencia:

- a) La de tener iguales sus módulos, direcciones y sentidos. Las clases de equivalencia así definidas se denominan **VECTORES LIBRES** y poseen estructura de espacio vectorial euclídeo.
- b) La de tener iguales sus módulos, direcciones, sentidos y rectas de acción. Mediante estas relaciones se constituyen las clases de equivalencia denominadas **VECTORES DESLIZANTES**.
- c) La de tener iguales sus módulos, direcciones, sentidos, rectas de acción y primer punto de la pareja ordenada de puntos que definen el segmento. Así se constituyen las clases denominadas **VECTORES FIJOS**.

Como consecuencia de estas definiciones una clase de vectores fijos denominada vector fijo únicamente se podrá representar geoméricamente por un segmento orientado de origen en A y extremo en B.

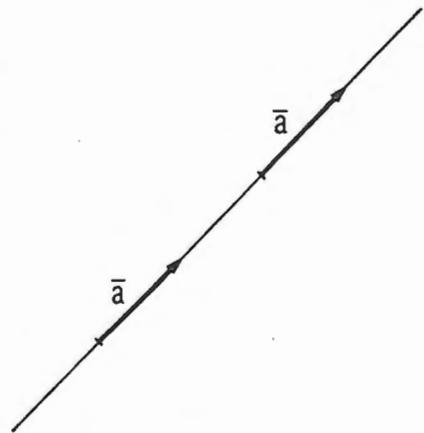


Fig. 2.1

Mientras que en el caso de una clase de vectores deslizantes, denominada vector deslizante, se podrá representar por cualquier segmento orientado que teniendo el módulo, dirección y sentido de la clase tenga su origen en un punto cualquiera de la recta de acción, tal y como se representa en la figura (2.1).

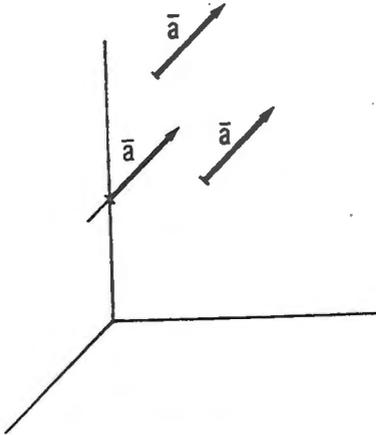


Fig. 2.2

En el caso de querer representar una clase de vectores libres o un vector libre, se puede hacer por cualquiera de los segmentos mientras que tengan los mismos módulos, dirección, sentido de la clase. Así, en la figura (2.2) el vector libre  $\bar{a}$  se puede representar por cualquiera de los segmentos orientados dibujados.

Se denomina vector unitario ( $\bar{u}$ ) al que tiene de módulo la unidad.

### 2.7. Sistema de referencia

El modelo utilizado por la Física o que representa al espacio físico ordinario es el espacio afín euclídeo de dimension 3 y el sistema de referencia es el ortonormal dextrógiro.

Se representa mediante tres semirrectas cuyo punto común, 0, es el origen del sistema. Su base ortogonal está constituida por tres vectores unitarios que designaremos por  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$  y que indican los sentidos positivos de las semirrectas OX OY y OZ respectivamente.

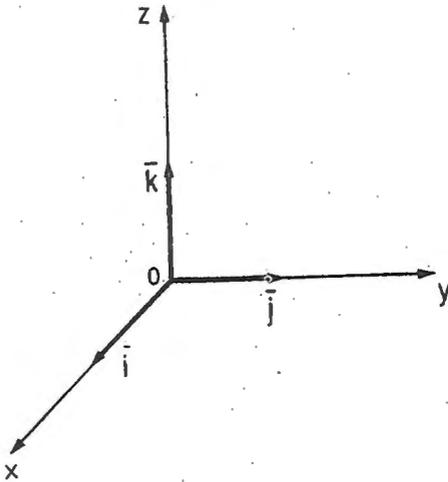


Fig.2.3

Todo vector de tres dimensiones, en este sistema, se podrá expresar, por tanto, como una combinación lineal de  $\bar{i}$ ,  $\bar{j}$ ,  $\bar{k}$ . A los coeficientes de estos vectores base se les denomina componentes del vector.

Así, el vector  $\bar{a}$ , se expresará como

$$\bar{a} = a_x \bar{i} + a_y \bar{j} + a_z \bar{k}$$

donde  $a_x, a_y, a_z$  son las proyecciones ortogonales de  $\bar{a}$  sobre cada uno de los ejes coordenadas.

El módulo de  $\bar{a}$

$$|\bar{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} \quad (2.4)$$

coincide con la longitud de la diagonal del paralelepípedo de la figura (2.4).

Los **cosenos directores** de la dirección asociada al vector  $\bar{a}$  son los cosenos de los ángulos que dicho vector forma con cada uno de los ejes coordenados. Sus valores son:

$$\cos \alpha = \alpha_x = \frac{a_x}{a}$$

$$\cos \beta = \alpha_y = \frac{a_y}{a}$$

$$\cos \gamma = \alpha_z = \frac{a_z}{a}$$

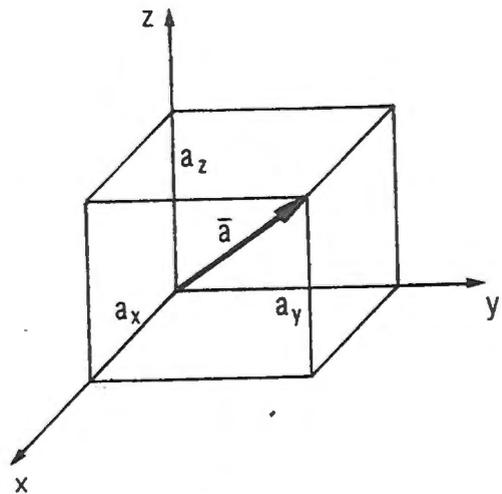


Fig. 2.4

Si  $\bar{a}$  es unitario, los cosenos directores son sus componentes como fácilmente se comprueba al sustituir en las (2.5) los respectivos denominadores por la unidad.

### 2.8. Suma de vectores

Dados dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , para hallar el resultado de su suma, se sitúa  $\vec{b}$  de forma que su origen coincida con el extremo de  $\vec{a}$ . Su suma se define como

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$$

vector cuyo origen es el de  $\vec{a}$  y cuyo extremo es el de  $\vec{b}$ .

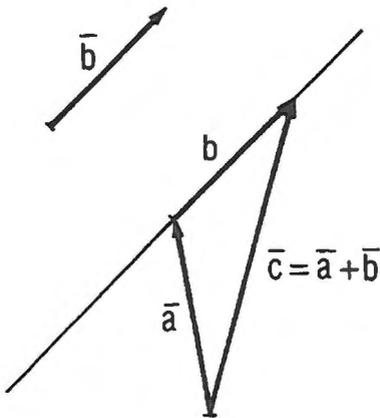


Fig. 2.5

Las propiedades de la suma como ley de composición interna definida en el conjunto de vectores y por poseer ésta estructura de espacio vectorial son las especificadas en el apartado 2.2 para la primera ley.

Teniendo en cuenta las expresiones analíticas de los vectores en el sistema de referencia trirrectangular antes descrito, y que viene dadas por

$$\begin{aligned} \vec{a}_1 &= a_{1x} \vec{i} + a_{1y} \vec{j} + a_{1z} \vec{k} \\ \vec{a}_2 &= a_{2x} \vec{i} + a_{2y} \vec{j} + a_{2z} \vec{k} \\ &\dots\dots\dots \\ &\dots\dots\dots \\ \vec{a}_n &= a_{nx} \vec{i} + a_{ny} \vec{j} + a_{nz} \vec{k} \end{aligned}$$

en donde se ha supuesto un conjunto de  $n$  vectores; el vector suma del conjunto se obtiene sumando miembro a miembro estas igualdades y aplicando las propiedades antes vistas, con lo que resulta

$$\vec{a}_1 + \vec{a}_2 + \dots + \vec{a}_n = (a_{1x} + \dots + a_{nx}) \vec{i} + (a_{1y} + \dots + a_{ny}) \vec{j} + (a_{1z} + \dots + a_{nz}) \vec{k}$$

lo que pone de manifiesto que el vector suma tiene como componentes a las sumas de las respectivas componentes de los vectores sumandos.

### 2.9. Producto por un escalar

El producto de un escalar,  $\alpha$ , por un vector  $\vec{a}$ , es un nuevo vector cuyo módulo es el módulo de  $\vec{a}$  por el valor absoluto de  $\alpha$ ,  $|\alpha\vec{a}| = \|\alpha\| \cdot |\vec{a}|$ , su dirección es la de  $\vec{a}$  y su sentido, coincide con el de  $\vec{a}$  si  $\alpha > 0$  o es contrario al de  $\vec{a}$  si  $\alpha < 0$ .

En cuanto a las propiedades de esta operación son las explicadas en el apartado 2.2, correspondientes a la segunda ley del espacio vectorial.

La expresión analítica de esta operación, si el vector es  $\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$  y el escalar es  $\alpha$ , viene dada por

$$\alpha \vec{a} = (\alpha a_x) \vec{i} + (\alpha a_y) \vec{j} + (\alpha a_z) \vec{k}$$

lo que indica que el producto de un vector por un escalar es otro vector cuyas componentes son los productos del escalar por las componentes del vector.

### 2.10. Producto Escalar de dos vectores

El producto escalar de dos vectores  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$  es un escalar  $(\vec{a} \cdot \vec{b})$ , dado por

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi \tag{2.5}$$

donde  $\varphi$  es el ángulo formado por los dos vectores.

Ahora bien, teniendo en cuenta que la proyección de  $\vec{a}$  sobre  $\vec{b}$  es

$$OA = |\vec{a}| \cos \varphi$$

y que la proyección de  $\vec{b}$  sobre  $\vec{a}$  es

$$OB = |\vec{b}| \cos \varphi$$

la expresión (2.5) se puede dar de alguna de las siguientes formas

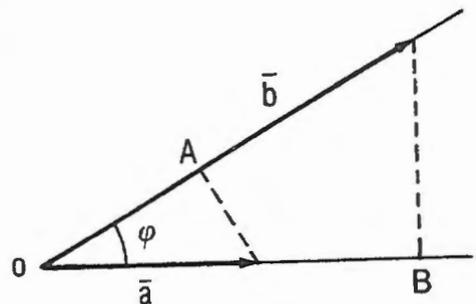


Fig. 2.6

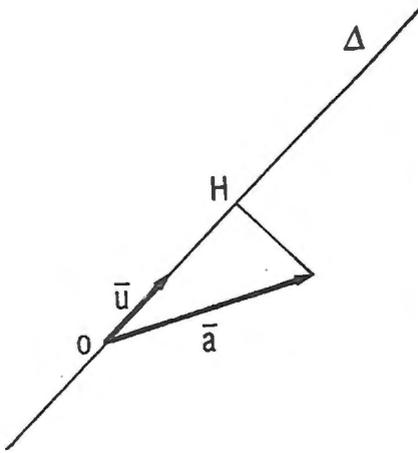


Fig. 2.7

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = OA \cdot |\vec{b}| = OB \cdot |\vec{a}|$$

es decir, el producto escalar de dos vectores es igual al módulo de uno de ellos por la proyección del otro sobre él.

Consecuencia inmediata de ello es que para hallar la proyección de un vector sobre una dirección dada por la recta  $\Delta$ , basta con multiplicar escalarmente el vector por el unitario en dicha dirección.

$$\text{proy}_{\Delta} \vec{a} = OH = \vec{a} \cdot \vec{u} \quad (2.6)$$

El producto escalar goza de las siguientes propiedades, que simplemente se enunciarán sin demostración:

a) Conmutativa

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

b) Asociativa respecto al producto por un escalar

$$(\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (\lambda \vec{b})$$

c) Distributiva respecto a la suma de vectores

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

Hay que señalar que el producto escalar no cumple la propiedad asociativa, es decir:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \cdot \vec{c}) \neq (\vec{a} \cdot \vec{b}) \cdot \vec{c}$$

En cuanto a la expresión analítica del producto escalar, teniendo en cuenta la definición y propiedades enunciadas y suponiendo que los vectores son:

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$

el producto escalar resulta

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z \quad (2.7)$$

ya que

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = \vec{j} \cdot \vec{j} = \vec{k} \cdot \vec{k} = 1$$

y

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{i} \cdot \vec{k} = \vec{j} \cdot \vec{k} = 0$$

La expresión analítica del producto escalar (2.7) permite, mediante la aplicación de la (2.5) la obtención del ángulo que forman dos vectores. Así, para los dos casos  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , el ángulo es

$$\cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{ab} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{ab} \quad (2.8)$$

expresión que sirve para buscar o imponer la condición de ortogonalidad de dos vectores, ya que si  $\varphi = \pi / 2 \rightarrow \cos \varphi = 0 \rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$

### Aplicación 1

Obtener mediante la aplicación del producto escalar la ecuación del plano que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es perpendicular a la dirección dada por el vector  $\vec{a} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$ .

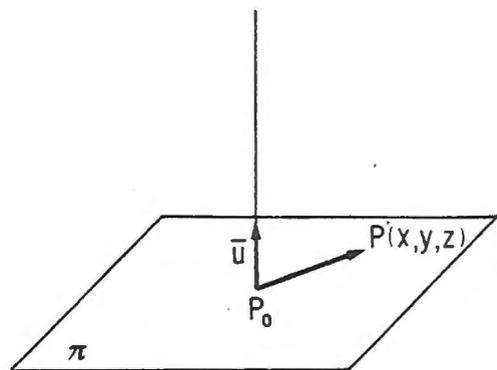


Fig. 2.8

Sea  $\pi$  el plano cuya ecuación se busca, y  $\overrightarrow{P_0P}$  el vector genérico de origen  $P_0$  y cuyo extremo es el punto  $P(x, y, z)$  (fig. 2.8).

La condición para que el extremo del vector  $\overrightarrow{P_0P}$  esté sobre el plano que se busca, es que los vectores  $\vec{u}$  y  $\overrightarrow{P_0P}$  sean perpendiculares, es decir que

$$\overrightarrow{P_0P} \cdot \vec{u} = 0$$

Teniendo en cuenta que el vector  $\overrightarrow{P_0P}$  es

$$\overrightarrow{P_0P} = (x - x_0)\vec{i} + (y - y_0)\vec{j} + (z - z_0)\vec{k}$$

resulta

$$(x - x_0)\alpha_x + (y - y_0)\alpha_y + (z - z_0)\alpha_z = 0$$

o bien finalmente

$$\alpha_x x + \alpha_y y + \alpha_z z - (\alpha_x x_0 + \alpha_y y_0 + \alpha_z z_0) = 0$$

que corresponde a la ecuación del plano buscado.

### Aplicación 2

Hallar la distancia entre los planos

$$x + y + z = 5 \quad \text{y} \quad x + y + z = 16$$

mediante la aplicación del producto escalar.

Sean  $\pi_1$  y  $\pi_2$  los planos dados y  $P_1$  y  $P_2$  dos puntos cualesquiera que se buscan sobre ellos, respectivamente. Sea, asimismo,  $\vec{u}$  el vector unitario normal a ambos planos y que en este caso particular es

$$\vec{u} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\vec{i} + \vec{j} + \vec{k})$$

La distancia entre planos buscada será la proyección del vector  $\overrightarrow{P_1P_2}$  sobre la normal a ambos planos, es decir, llamando  $d$  a la distancia, resulta

$$d = \overrightarrow{P_1P_2} \cdot \vec{u}$$

Si  $P_1$  y  $P_2$  son, por ejemplo, los puntos  $(0, 0, 5)$  y  $(0, 0, 16)$  respectivamente, es

$$d = (0 \cdot \vec{i} + 0 \cdot \vec{j} + 11\vec{k}) \cdot (\vec{i} + \vec{j} + \vec{k}) \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{11}{\sqrt{3}}$$

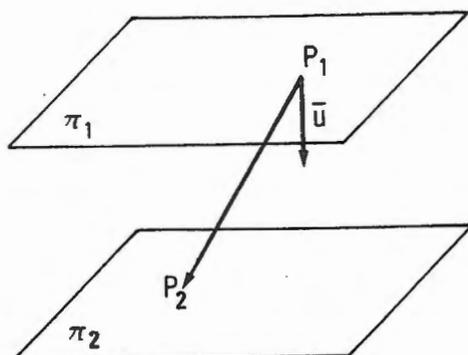


Fig. 2.9

### 2.11. Producto vectorial de dos vectores

Dados dos vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$ , el producto vectorial,  $\vec{a} \times \vec{b}$  ( $0 \vec{a} \wedge \vec{b}$ ), se define como un nuevo vector  $\vec{c}$  cuyo módulo es

$$|\vec{c}| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi$$

Su dirección es perpendicular al plano formado por  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  y su sentido es tal que el triedro  $\vec{a}$ ,  $\vec{b}$ ,  $\vec{c}$  sea dextrógiro.

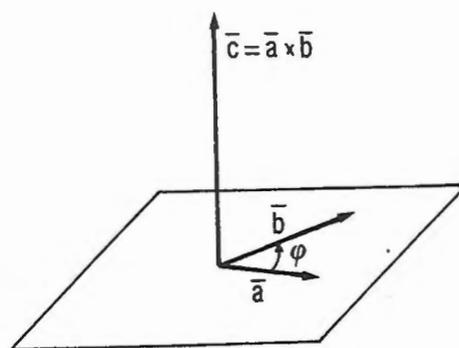


Fig.2.10

Por su definición, el módulo de  $\vec{a} \times \vec{b}$  es igual al área del paralelogramo determinado por dichos vectores.

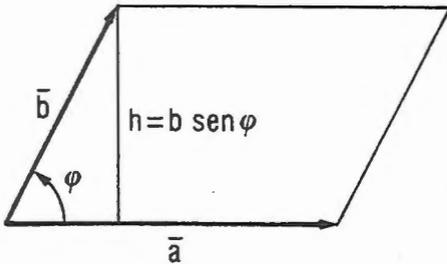
En efecto, la citada superficie viene dada por

$$S = a h = ab \sin \varphi = |\vec{a} \times \vec{b}|$$

Las propiedades de que goza el producto vectorial son:

a) Asociativa para el producto por un escalar

$$\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b} = \vec{a} \times (\lambda \vec{b})$$



**Fig. 2.11**

b) Distributiva respecto a la suma

$$\vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}$$

Hay que señalar, en este apartado de propiedades que el producto vectorial no tiene la propiedad conmutativa ya que

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$$

lo que también se conoce como propiedad anticonmutativa y tampoco tiene

la propiedad asociativa, es decir

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) \neq (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{c}$$

como se verá posteriormente al estudiar el doble producto vectorial.

La expresión analítica del producto vectorial, teniendo en cuenta que

$$\vec{i} \times \vec{i} = \vec{j} \times \vec{j} = \vec{k} \times \vec{k} = \vec{0}$$

y

$$\vec{i} \times \vec{j} = \vec{k}; \quad \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i}; \quad \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j}$$

así como las propiedades que se han enunciado, se obtienen del siguiente modo

$$\vec{a} = a_x \vec{i} + a_y \vec{j} + a_z \vec{k}$$

$$\vec{b} = b_x \vec{i} + b_y \vec{j} + b_z \vec{k}$$


---

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= a_x b_y (\vec{i} \times \vec{j}) + a_x b_z (\vec{i} \times \vec{k}) + a_y b_x (\vec{j} \times \vec{i}) + a_y b_z (\vec{j} \times \vec{k}) + a_z b_x (\vec{k} \times \vec{i}) + \\ & a_z b_y (\vec{k} \times \vec{j}) = (a_y b_z - a_z b_y) \vec{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \vec{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \vec{k} \end{aligned}$$

que se puede expresar mediante el determinante simbólico

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix} \quad (2.9)$$

en el que con los vectores  $\vec{i}$ ,  $\vec{j}$ ,  $\vec{k}$  se opera como si fueran números.

Evidentemente, si los vectores  $\vec{a}$  y  $\vec{b}$  son paralelos resulta que

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \quad (2.10)$$

lo que da una condición de paralelismo entre vectores, que también se puede expresar como

$$\frac{a_x}{b_x} = \frac{a_y}{b_y} = \frac{a_z}{b_z} = m \quad (2.11)$$

que pone de manifiesto la proporcionalidad entre sus componentes.

### Aplicación 1

Obtener la ecuación de la recta que pasa por el punto  $P_0(x_0, y_0, z_0)$  y es paralela a la dirección dada por el vector  $\vec{u} = \alpha_x \vec{i} + \alpha_y \vec{j} + \alpha_z \vec{k}$

Construyendo el vector genérico  $\vec{P_0P}$  de extremo  $P(x, y, z)$ , para que este punto describa o esté sobre el l. g. que se busca (sobre la recta), necesaria-

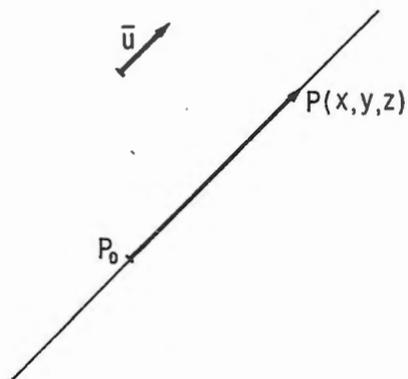


Fig. 2.12

mente el vector  $\overrightarrow{P_0P}$  deberá ser paralelo al vector unitario  $\vec{u}$ , condición que, de acuerdo como (2.11) es

$$\frac{(\overrightarrow{P_0P})_x}{\alpha_x} = \frac{(\overrightarrow{P_0P})_y}{\alpha_y} = \frac{(\overrightarrow{P_0P})_z}{\alpha_z}$$

o lo que es igual

$$\frac{x - x_0}{\alpha_x} = \frac{y - y_0}{\alpha_y} = \frac{z - z_0}{\alpha_z}$$

que es la forma continua de expresar la ecuación de una recta.

**Aplicación 2.**

Obtener la altura de una pirámide cuadrangular oblicua por aplicación del productor vectorial.

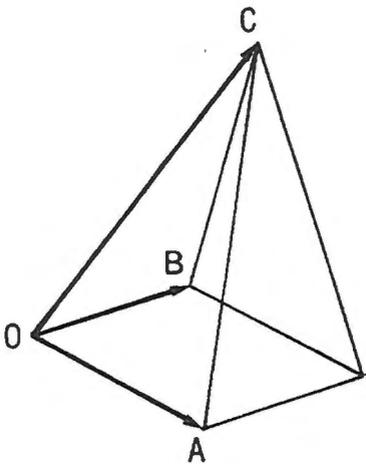


Fig. 2.13

Sea O uno de los vértices del polígono base. Llamando  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  a los vectores asociados a las aristas consecutivas que pasan por O, y  $\overrightarrow{OC}$  al de la arista cuyo extremo es el vértice de la pirámide, un vector normal al plano que delimitado por  $\overrightarrow{OA}$  y  $\overrightarrow{OB}$  es  $\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}$ , y el unitario en esta dirección es

$$\vec{u}_h = \frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right|}$$

que además lleva la dirección de la altura de la pirámide.

La altura correspondiente al vértice C se obtendrá proyectando una de las aristas concurrentes en C sobre la dirección de  $\bar{u}_h$ , es decir

$$h = \overrightarrow{OC} \cdot \bar{u}_h = \overrightarrow{OC} \cdot \frac{\overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB}}{\left| \overrightarrow{OA} \times \overrightarrow{OB} \right|}$$

### 2.12. Producto mixto de tres vectores

Se denomina producto mixto de tres vectores  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$  y  $\bar{c}$  al escalar dado por la expresión

$$\bar{a} \cdot (\bar{b} \times \bar{c}) \tag{2.12}$$

Si se consideran a los vectores  $\bar{a}$ ,  $\bar{b}$ ,  $\bar{c}$  como aristas concurrentes en un punto común, el producto mixto de ellos representa el volumen del paralelepípedo determinado por los mismos.

En efecto, el volumen del paralelepípedo, es, de acuerdo con la figura

$$V = S \cdot h = S \cdot a \cos \sigma$$

en donde S por lo visto en el apartado anterior es

$$S = \left| \bar{b} \times \bar{c} \right| = b c \sin \varphi$$

y

$$h = a \cos \sigma = \bar{a} \cdot \bar{u}_h$$

Luego

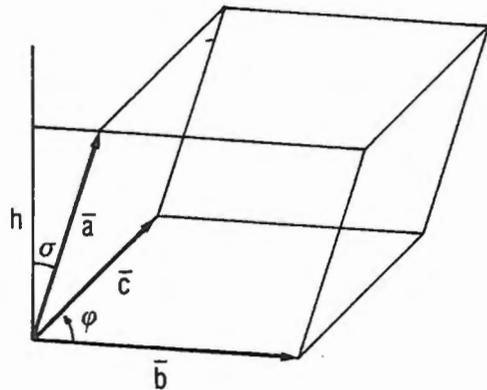


Fig. 2.14

Luego

$$V = S \cdot (\vec{a} \cdot \vec{u}_n) = \vec{a} \cdot \vec{S} = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})$$

Esta propiedad del producto mixto con volumen del paralelepípedo constituido por los vectores como aristas permite escribir que

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a}) \tag{2.13}$$

ya que el volumen es invariante, sea cual sea la base y respectiva altura que se tome.

Además, también esta misma propiedad permite asegurar que si tres vectores son coplanarios (o linealmente dependientes) su producto mixto es nulo por serlo el volumen del paralelepípedo que determinan.

La expresión analítica del producto mixto, de acuerdo con las dadas para el producto escalar y vectorial, es

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix} \tag{2.14}$$

### 2.13. Doble producto vectorial

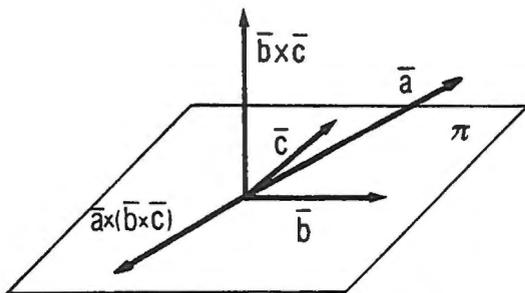


Fig.2.15

Se denomina así a la operación dada por

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{P}$$

que da como resultado un vector contenido en el plano definido por  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$ , es decir,  $\vec{P}$  es una combinación lineal de  $\vec{b}$  y  $\vec{c}$  ya que debe ser normal a  $(\vec{b} \times \vec{c})$  y por tanto coplanario a  $\pi$ .

$$\vec{P} = \lambda \vec{b} + \mu \vec{c}$$

Se puede demostrar que

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c} \tag{2.15}$$

expresión que para efectos nemotécnicos se puede representar por la simbólica

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{b} & \vec{c} \\ (\vec{a} \cdot \vec{b}) & (\vec{a} \cdot \vec{c}) \end{vmatrix} \tag{2.16}$$

### 2.14. Momento de un vector respecto a un punto

El momento de un vector,  $\vec{a}$ , respecto a un punto  $O$ , es un vector localizado en  $O$ ,  $\vec{M}_O$ , cuyos módulos, dirección y sentido vienen dados por la expresión

$$\vec{M}_O = \vec{OA} \times \vec{a} \tag{2.17}$$

donde  $A$  es el punto de origen del vector  $\vec{a}$ .

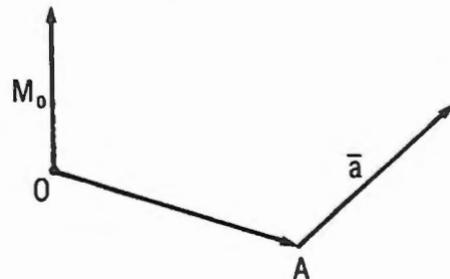


Fig.2.16

De acuerdo con las propiedades del producto vectorial, el vector  $\vec{M}_O$  es normal al plano determinado por  $\vec{a}$  y  $\vec{OA}$ .

Si el vector  $\vec{a}$  es localizado o fijo,  $A$  está determinado unívocamente y por tanto la expresión (2.17) también lo está.

Si el vector  $\vec{a}$  es deslizante, al aplicar la (2.17) se tomará como  $A$ , cualquier punto de la recta de acción del vector ya que su momento es independiente del punto que se toma.

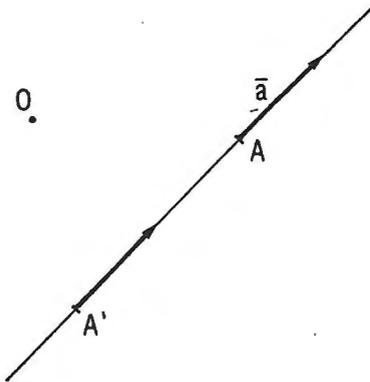


Fig. 2.17

En efecto, si se toma uno tal como el A es

$$\vec{M}'_O = \vec{OA} \times \vec{a}$$

y si se toma otro punto tal como el A' será

$$\vec{M}'_O = \vec{OA'} \times \vec{a}$$

pero como

$$\vec{OA'} = \vec{OA} + \vec{AA'}$$

es

$$\vec{M}'_O = \vec{OA} \times \vec{a} + \vec{AA'} \times \vec{a}$$

donde  $\vec{AA'} \times \vec{a} = \vec{0}$  por ser vectores paralelos, quedando por tanto

$$\vec{M}'_O = \vec{OA} \times \vec{a} = \vec{M}_O$$

luego el momento es el mismo sea cual sea el punto de la recta de acción que se tome, por tanto, también en este caso el momento del vector está determinado.

Finalmente, el concepto de momento de vector libre no tiene sentido ya que el punto origen del segmento orientado que representa su clase podría estar en cualquier punto del espacio.

# CAPITULO 3

## FUNCION VECTORIAL DE VARIABLE ESCALAR

### 3.1. Definición

Un vector es función de una variable escalar si sus componentes son funciones de dicha variable.

Llamando  $\vec{r} = \vec{r}(t)$  a la función vectorial y  $t$  a la variable escalar, es

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (3.1)$$

Si el origen del vector  $\vec{r}(t)$  se hace coincidir invariablemente con origen del sistema de referencia, su extremo (para todo el conjunto de valores que tome la variable escalar) describirá una curva que se denomina curva indicatriz de la función vectorial.

Así, por ejemplo, si la posición de un punto que se mueve con el tiempo respecto a un sistema  $O(x, y, z)$  se da por un vector cuyo extremo coincide con el punto y su origen con el de coordenadas (vector de posición), a lo largo del tiempo dicho punto describe una curva  $C$  que es la trayectoria del punto móvil y corresponde a la curva indicatriz de la función vectorial  $\vec{r}(t)$  cuya variable escalar es el tiempo.

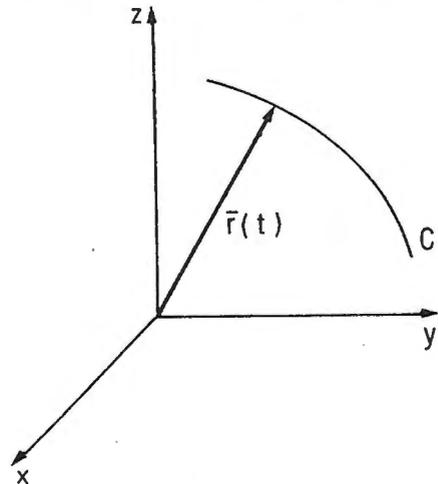


Fig.3.1

Las ecuaciones paramétricas de la curva indicatriz son

$$\begin{aligned}x &= x(t) \\y &= y(t) \\z &= z(t)\end{aligned}\tag{3.2}$$

funciones continuas y de derivadas continuas.

### 3.2. Derivación de una función vectorial de variable escalar

Si  $\vec{r}(t)$  es una función vectorial de variable escalar y sus componentes son funciones continuas y derivables de esa variable, se define la derivada de la función  $\vec{r}(t)$  respecto de la variable,  $t$ , como

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\vec{r}(t + \Delta t) - \vec{r}(t)}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}\tag{3.3}$$

y como  $\Delta \vec{r} = \Delta x \vec{i} + \Delta y \vec{j} + \Delta z \vec{k}$ , resulta

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \left( \frac{\Delta x}{\Delta t} \vec{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t} \vec{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t} \vec{k} \right)$$

o bien,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \vec{i} + \frac{dy}{dt} \vec{j} + \frac{dz}{dt} \vec{k}\tag{3.4}$$

Expresión que pone de manifiesto que la derivada de una función vectorial de variable escalar es otra función vectorial cuyas componentes son las derivadas de las componentes de la función vectorial primitiva.

Evidentemente, el vector  $d\vec{r}/dt$  es tangente a la curva indicatriz ya que cuando  $\Delta t \rightarrow 0$ ,  $\Delta \vec{r}$  tiende a la tangente a la curva en el punto considerado. Por tanto, llamando  $\vec{T}$  al vector unitario en la dirección de la tangente, se puede escribir

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \left| \frac{d\vec{r}}{dt} \right| \vec{T} \quad (3.4 \text{ bis})$$

A continuación se enuncian las reglas de derivación de funciones vectoriales de una variable escalar, prescindiendo de las correspondientes demostraciones y denominando  $\vec{r}_1(t)$ ,  $\vec{r}_2(t)$ ,  $\vec{r}_3(t)$ , a las funciones vectoriales que intervienen y  $\varphi(t)$  a la función real de la misma variable.

- Derivada de una suma de funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 + \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} + \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (3.5)$$

- Derivada del producto de una función real  $\varphi(t)$  por un vector  $\vec{r}_1(t)$

$$\frac{d}{dt} [\varphi(t) \vec{r}_1(t)] = \frac{d\varphi}{dt} \cdot \vec{r}_1 + \varphi \frac{d\vec{r}_1}{dt} \quad (3.6)$$

- Derivada de un producto escalar de dos funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \cdot \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \cdot \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (3.7)$$

- Derivada de un producto vectorial de dos funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} (\vec{r}_1 \times \vec{r}_2) = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \times \vec{r}_2 + \vec{r}_1 \times \frac{d\vec{r}_2}{dt} \quad (3.8)$$

Evidentemente esta derivación no es conmutativa por no serlo el producto vectorial.

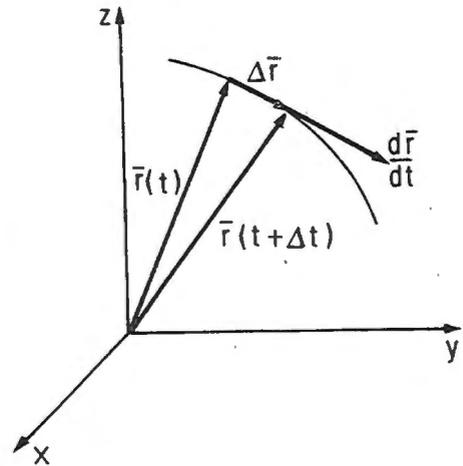


Fig. 3.2

- Derivada de un producto mixto de tres funciones vectoriales

$$\frac{d}{dt} [\vec{r}_1 \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3)] = \frac{d\vec{r}_1}{dt} \cdot (\vec{r}_2 \times \vec{r}_3) + \vec{r}_1 \cdot \left( \frac{d\vec{r}_2}{dt} \times \vec{r}_3 \right) + \vec{r}_1 \cdot \left( \vec{r}_2 \times \frac{d\vec{r}_3}{dt} \right) \quad (3.9)$$

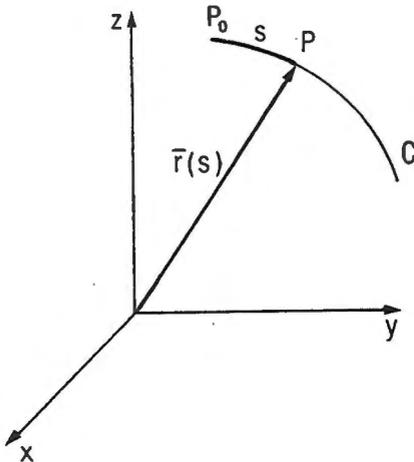
Consecuencia interesante de la (3.7) es la aplicación de esta regla al caso de un vector de módulo constante multiplicado escalarmente por si mismo, es decir, que si  $|\vec{r}|^2 = \text{cte}$ , es

$$\frac{d}{dt} (\vec{r} \cdot \vec{r}) = 2\vec{r} \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = 0$$

lo que pone de manifiesto que en este caso el vector  $d\vec{r}/dt$  es perpendicular al  $\vec{r}$ .

### 3.3. Triedro intrínseco

Sea una curva,  $C$ , definida por el extremo del vector de posición  $\vec{r}$ , de modo que a cada punto  $P$  de la curva le corresponde un vector de posición  $\vec{r}$ .



**Fig. 3.3**

En estas condiciones, según lo expuesto anteriormente,  $C$  es la curva indicatriz de una función vectorial de variable escalar dada por

$$\vec{r} = \vec{r}(t)$$

donde  $t$  es la variable.

Si sobre la curva  $C$  se define un origen de arcos  $P_0$  y se toma como variable escalar de la función vectorial el valor del arco,  $s$ , desde el origen hasta el punto considerado, la función vectorial se escribiría como

$$\vec{r} = \vec{r}(s) = x(s)\vec{i} + y(s)\vec{j} + z(s)\vec{k} \quad (3.10)$$

La derivada de esta función, de acuerdo con la (3.4) es

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \left[ \frac{d\vec{r}}{ds} \right] \vec{T} \quad (3.11)$$

donde  $\vec{T}$  es el vector unitario en la dirección de la tangente a la curva en el punto y cuyo sentido es el dado por el correspondiente sentido creciente de arcos, y

$$\left[ \frac{d\vec{r}}{ds} \right] = \left| \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta s} \right| = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{|\Delta \vec{r}|}{\Delta s} = 1$$

ya que

$$\lim_{\Delta s \rightarrow 0} |\Delta \vec{r}| = \Delta s$$

La (3.11) queda, por tanto, como

$$\frac{d\vec{r}}{ds} = \vec{T} \quad (3.12)$$

luego la derivada de la función respecto del arco es igual al **vector unitario tangente** a la curva en el punto.

Esta definición de  $\vec{T}$  permite su cálculo directo aunque la función vectorial  $\vec{r}$  lo fuera de una variable escalar distinta a  $s$ . Así, si la función es  $\vec{r} = \vec{r}(t)$ , el vector tangente vendría dado por

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\vec{r}/dt}{|d\vec{r}/dt|} \quad (3.13)$$

Para calcular la  $d\vec{T}/ds$ , se tomarán dos posiciones infinitamente próximas de  $\vec{T}$  en una curva con un sentido creciente de arcos indicado por la flecha bajo  $\Delta s$ .

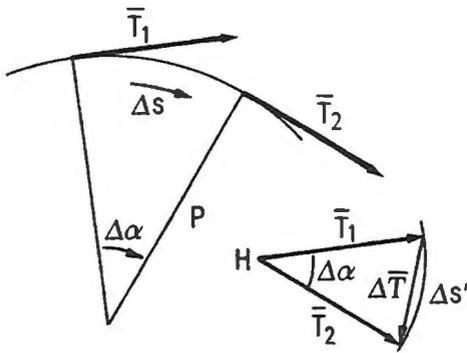


Fig. 3.4

Tomando un punto cualquiera H como origen o polo se llevarán sobre él vectores equipotentes a las tangentes en las posiciones (1) y (2), que estarán sobre un arco de circunferencia de radio la unidad y arco  $\Delta s'$ .

En estas condiciones el vector  $d\vec{T}/ds$  se puede expresar como

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s} =$$

$$= \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s'} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta \alpha} \cdot \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} \quad (3.14)$$

en donde

$$a) \quad \lim_{\Delta \alpha \rightarrow 0} \frac{\Delta s'}{\Delta \alpha} = 1 \quad (3.15)$$

por ser la unidad el radio con el que se describe el arco  $\Delta s'$ ,

$$b) \quad \lim_{\Delta s \rightarrow 0} \frac{\Delta \alpha}{\Delta s} = \frac{1}{\rho} \quad (3.16)$$

ya que el cociente entre arco y ángulo elementales es el radio de curvatura  $\rho$ , del elemento de arco considerado.

$$c) \quad \lim_{\Delta s' \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{T}}{\Delta s'} = \vec{N} \quad (3.17)$$

donde  $\vec{N}$  es el vector unitario normal a  $\vec{T}$  y en el sentido creciente de arcos descrito por  $\vec{T}$  en su variación.

Al sustituir en (3.14) los valores de las (3.15), (3.16) y (3.17) resulta que

$$\frac{d\bar{T}}{ds} = \frac{1}{\rho} \bar{N} \quad (3.18)$$

expresión que sirve para calcular, por un lado, el vector normal a la curva que es

$$\bar{N} = \frac{d\bar{T}/ds}{\left|d\bar{T}/ds\right|} \quad (3.19)$$

y por otro el valor de  $1/\rho$ , al que se denomina curvatura de flexión o primera curvatura y que viene dada por

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| \quad (3.20)$$

Definidos los vectores  $\bar{T}$  y  $\bar{N}$  en el punto P de la curva como unitarios tangente y normal a la misma, se define ahora un nuevo vector unitario  $\bar{B}$ , denominado binormal, dado por

$$\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} \quad (3.21)$$

y que completa un triedro dextrógiro sobre la curva P ( $\bar{T}$ ,  $\bar{N}$ ,  $\bar{B}$ ) al que se denomina triedro intrínseco o de Frenet y que, como sistema de referencia, tiene una gran utilidad en el estudio cinemático y dinámico de sistemas.

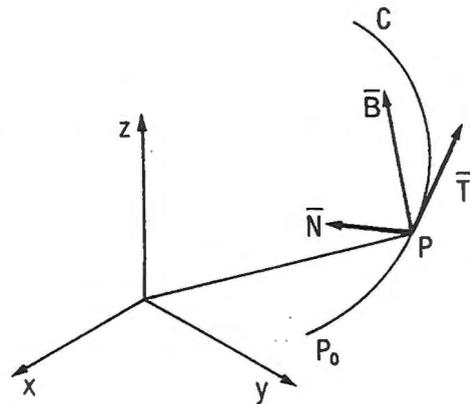


Fig. 3.5

Evidentemente, si la curva es plana, tanto el vector tangente,  $\bar{T}$ , como el normal,  $\bar{N}$ , estarán siempre contenidos en el plano de la curva. Así, si se considera a éste el del papel, resulta que para cualquier punto de la curva los vectores  $\bar{T}$  y  $\bar{N}$  estarán contenidos en el plano de la figura y el  $\bar{B}$  siempre será normal al mismo y dirigido hacia dentro, lo que pone de manifiesto que el vector  $\bar{B}$  será constante.

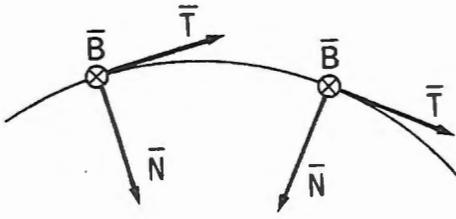


Fig. 3.6

Si la curva no fuera plana, al avanzar el punto P sobre la misma en el sentido del vector tangente, el triedro giraría alrededor de aquél provocando, por tanto, una variación del vector  $\vec{B}$  cuyo sentido se indica en la figura 3.7 donde se han dibujado dos posiciones infinitamente próximas indicadas con (1) y (2), superpuestas y de modo que el vector tangente sea normal al plano de la figura y emergente. Se observa en ella que un giro dextrógiro alrededor de  $\vec{T}$  (en el sentido de avance del mismo sobre la curva) produce una variación en el vector

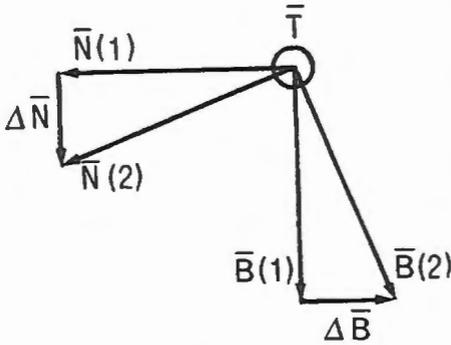


Fig. 3.7

$\vec{B}$  dado por el  $\vec{\Delta B}$  de la figura, que es un vector cuyo sentido es contrario al  $\vec{N}$ . Ello permite escribir

$$\frac{d\vec{B}}{ds} = - \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right| \vec{N} \quad (3.22)$$

en donde a

$$\left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right| = \frac{1}{\tau} \quad (3.23)$$

Se le denomina curvatura de torsión o segunda curvatura de la curva en el punto P.

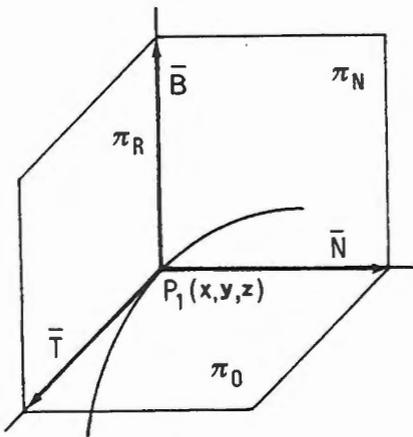


Fig. 3.8

En cuanto a los planos que cierran el triedro intrínseco, al determinado por los vectores  $\vec{T}$  y  $\vec{N}$  se le denomina plano osculador y su ecuación es

$$\vec{P_1 P} \cdot \vec{B} = 0$$

es decir

$$(x - x_1)B_x + (y - y_1)B_y + (z - z_1)B_z = 0 \quad (3.24)$$

Análogamente al plano que determinan los vectores  $\vec{N}$  y  $\vec{B}$  se le denomina plano normal y su ecuación es

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{T} = 0$$

es decir

$$(x - x_1)T_x + (y - y_1)T_y + (z - z_1)T_z = 0 \quad (3.25)$$

Y finalmente, el plano rectificante es el definido por los vectores  $\vec{B}$  y  $\vec{T}$  y por tanto es perpendicular a  $\vec{N}$  por lo que su ecuación es

$$\overrightarrow{P_1P} \cdot \vec{N} = 0$$

o sea

$$(x - x_1)N_x + (y - y_1)N_y + (z - z_1)N_z = 0 \quad (3.26)$$

Con la obtención de las ecuaciones de los planos rectificante, normal y osculador que se acaban de describir, los elementos del triedro intrínseco quedan determinados así como las curvaturas de la curva indicatriz en el punto considerado.

### Ejemplo 3.1

Dada la función vectorial  $\vec{r}(s) = \text{sen } s/\sqrt{5} \vec{i} + \text{cos } s/\sqrt{5} \vec{j} + 2s/\sqrt{5} \vec{k}$ , donde  $s$  representa el arco recorrido sobre la curva, determinese los elementos del triedro intrínseco en el punto en que  $s = \sqrt{5} \pi/6$ .

En primer lugar se calculan los vectores unitarios  $\vec{T}$ ,  $\vec{N}$  y  $\vec{B}$  que constituyen el triedro. Así, el vector tangente  $\vec{T}$ , viene dado por

$$\begin{aligned}\bar{T} &= \frac{d\bar{r}}{ds} = \frac{1}{\sqrt{5}} \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{i} - \frac{1}{\sqrt{5}} \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{j} + \frac{2}{\sqrt{5}} \bar{k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{i} - \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{j} + 2\bar{k} \right)\end{aligned}\quad (3.27)$$

el normal  $\bar{N}$ ,

$$\bar{N} = \frac{d\bar{T}/ds}{|d\bar{T}/ds|} = \frac{1}{5} \left( \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{i} - \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{j} \right) / \frac{1}{5} = -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{i} - \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{j} \quad (3.28)$$

de donde se puede obtener directamente la curvatura de flexión

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\bar{T}}{ds} \right| = \frac{1}{5} \quad (3.29)$$

Teniendo en cuenta las expresiones (3.27) y (3.28), el vector binormal es

$$\begin{aligned}\bar{B} = \bar{T} \times \bar{N} &= \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \cos \frac{s}{\sqrt{5}} & \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} & 2 \\ -\operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} & -\cos \frac{s}{\sqrt{5}} & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{5}} \left( 2 \cos \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{i} - 2 \operatorname{sen} \frac{s}{\sqrt{5}} \bar{j} - \bar{k} \right)\end{aligned}\quad (3.30)$$

Particularizando las (3.27), (3.28) y (3.29) obtenidas para  $s = \sqrt{5} \pi/6$  se llega a

$$\bar{T} = \frac{1}{\sqrt{5}} \left( \frac{\sqrt{3}}{2} \bar{i} - \frac{1}{2} \bar{j} + 2\bar{k} \right)$$

$$\vec{N} = -\frac{1}{2} (\vec{i} + \sqrt{3} \vec{j})$$

$$\vec{B} = \frac{1}{\sqrt{5}} (\sqrt{3} \vec{i} - \vec{j} - \vec{k})$$

que son los valores de los vectores del triedro en el punto particular que se pide.

La curvatura de torsión viene dada por

$$\frac{1}{\tau} = \frac{|d\vec{B}|}{ds} = \frac{2}{5} \tag{3.31}$$

Y, finalmente las ecuaciones de los planos son:

- Osculador

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow \sqrt{3} x - y - z + \frac{\pi}{3} = 0$$

- Normal

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{T} = 0 \rightarrow \sqrt{3} x - y + 4z - \frac{4\pi}{3} = 0$$

- Rectificante

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow x + \sqrt{3} y - 2 = 0$$

### Ejemplo 3.2

Dada la función vectorial  $x = 4 \text{sent}$ ;  $y = 4 \text{cost}$ ;  $z = 3 t$ , cuya variable escalar  $t$  es el tiempo, determinese los elementos del triedro intrínseco en el instante  $t = \pi/2$ .

En forma vectorial, la función es

$$\vec{r} = 4\text{sent} \vec{i} + 4\text{cost} \vec{j} + 3t \vec{k}$$

El vector unitario tangente es

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/dt}{ds/dt} = \frac{4\cos t \vec{i} - 4\sin t \vec{j} + 3\vec{k}}{5} \quad (3.32)$$

que para  $t = \pi/2$ , se particulariza en

$$\vec{T} = \frac{1}{5} (-4\vec{j} + 3\vec{k})$$

El vector normal viene dado por

$$\begin{aligned} \vec{N} &= \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} = \frac{d\vec{T}/ds}{ds/dt|d\vec{T}/ds|} = \frac{1/5(-4\sin t \vec{i} - 4\cos t \vec{j})}{5 \cdot 4/25} = \\ &= -\sin t \vec{i} - \cos t \vec{j} \end{aligned} \quad (3.33)$$

que para  $t = \pi/2$ , da

$$\vec{N} = -\vec{i}$$

Del mismo modo, el vector binormal es

$$\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N} = \frac{1}{5} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 4\cos t & -4\sin t & 3 \\ -\sin t & -\cos t & 0 \end{vmatrix} = \frac{1}{5} (3\cos t \vec{i} - 3\sin t \vec{j} - 4\vec{k}) \quad (3.34)$$

que para  $t = \pi/2$ , da

$$\vec{B} = \frac{1}{5} (-3\vec{j} - 4\vec{k})$$

La curvatura de flexión, se obtiene de (3.33)

$$\frac{1}{\rho} = \left| \frac{d\vec{T}}{ds} \right| = \frac{4}{25}$$

y la de torsión se obtiene derivando respecto de  $s$  la (3.34)

$$\frac{1}{\tau} = \left| \frac{d\vec{B}}{ds} \right| = \left| -\frac{3}{5}(\text{sen } t \vec{i} + \text{cost } \vec{j}) \right| \cdot \frac{1}{5}$$

que para  $t = \pi/2$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{3}{25}$$

El punto  $P_0$  en el que se piden los planos es  $P_0(4, 0, 3\pi/2)$  y, por tanto la expresión del vector genérico  $\vec{P_0P}$  es

$$\vec{P_0P} = (x - 4) \vec{i} + y \vec{j} + \left(z - \frac{3\pi}{2}\right) \vec{k}$$

y las de los planos, teniendo en cuenta este vector, son:

- Osculador

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{B} = 0 \rightarrow 3y + 4z - 6\pi = 0$$

- Normal

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{T} = 0 \rightarrow 4y - 3z + \frac{9\pi}{2} = 0$$

- Rectificante

$$\vec{P_0P} \cdot \vec{N} = 0 \rightarrow x = 4$$



# CAPÍTULO 4

## NOCIONES DE TEORIA DE CAMPOS

### *4.1. Introducción*

Algunas de las magnitudes físicas que se definen en posteriores capítulos de este texto, manifiestan sus propiedades en una región del espacio, de manera que a cada punto del mismo le corresponde un valor de la magnitud que a su vez puede variar con el tiempo.

Si la magnitud física en cuestión es escalar, matemáticamente se representa por una función escalar de punto de manera que a cada punto del espacio le corresponde un valor de la función, diciéndose entonces que en esa región del espacio se ha definido un campo escalar. El campo de conductividades en un medio isótropo es un ejemplo de este tipo de campos.

Si la magnitud física es vectorial, se representará por una función vectorial de manera que a cada punto del espacio le corresponde un vector, en cuyo caso se dice que en esa región del espacio se ha definido un **campo vectorial**. El campo eléctrico creado por una carga puntual es un ejemplo de campo vectorial.

Finalmente, y aunque cae fuera de los propósitos del presente texto, existen magnitudes físicas que se representan por entes matemáticos de orden superior, denominados tensores, en cuyo caso en la región del espacio donde se define se dice que existen un **campo tensorial**. Así, por ejemplo, para expresar las conductividades en un medio anisótropo es necesario que en cada punto del mismo se conozcan los valores de la conductividad al menos en tres direcciones independientes. Pues bien, al conjunto de estos tres valores de la conductividad y de sus correspondientes direcciones o vectores en ese punto se le denomina tensor; y a la correspondencia de ese conjunto de funciones en cada punto de la región del espacio en el que se definen se le denomina campo tensorial.

Aunque el estudio de la teoría de estos campos escalares, vectoriales y tensoriales en toda su extensión requiere, por parte del lector, conocimientos matemáticos más avanzados, el objetivo del presente capítulo es el de describir e intentar cuantificar, en la medida de lo posible, los aspectos fundamentales de esta teoría que tiene aplicación en capítulos posteriores.

### 4.2. Campos escalares

Si una magnitud física escalar es tal que su valor depende de las coordenadas  $(x, y, z)$  del punto en que se mida, se dice que es una función escalar de punto, representándose por

$$V = V(x, y, z) \quad (4.1)$$

y que se supondrá continua y uniforme.

Así, por ejemplo, la temperatura,  $T$ , en un cierto recinto, en general, dependerá del punto en que se mida e incluso del instante en que se realice la medida, por lo que dicha función será

$$T = T(x, y, z, t) \quad (4.2)$$

Se dice que en una región del espacio existe un campo escalar cuando en la misma se ha definido una función escalar de punto, por lo que a cada punto  $(x, y, z)$  y en cada instante se le asocia un valor único de la magnitud escalar correspondiente.

Es importante señalar el carácter intrínseco del campo por el que el valor de la magnitud física en cada punto e instante es independientes del sistema de referencia que se utilice para definir la función, aunque, evidentemente ésta cambie al hacerlo el sistema de referencia. Así, siguiendo con el ejemplo del campo de temperaturas en un recinto definido por la (4.2), es evidente que en un cambio de sistema de referencia por el que las coordenadas  $(x, y, z)$  pasan a valer  $(x', y', z')$  la nueva función vendría dada por

$$T' = T'(x', y', z', t') \quad (4.3)$$

y será, en general, distinta de la anterior, sin embargo los valores de las temperaturas en cada punto serán las mismas ya que éstas no dependen del sistema

de referencia elegido. En consecuencia, el campo es un ente intrínseco que no debe identificarse con la función que lo representa, siendo ésta una descripción de aquél en un sistema de referencia dado.

En lo que sigue, las funciones de punto se consideran independientes del tiempo ya que, en general, los campos escalares a estudiar o no dependerán del tiempo o sí lo hacen, el estudio se limitará a una distribución espacial de la magnitud en un instante determinado. En cualquier caso, la función escalar de punto se considerará de la forma (4.1), es decir, independiente del tiempo.

Se llama superficie isoescalar, equiescalar o de nivel al lugar geométrico de los puntos del espacio en los que la función escalar de punto toma el mismo valor.

En consecuencia, la ecuación de una superficie de nivel es

$$V(x, y, z) = \text{cte} \quad (4.4)$$

que, evidentemente, corresponde a una superficie.

En base a la propiedad uniforme de la función escalar de punto se puede asegurar que por cada punto del campo pasa solamente una superficie de nivel y, por tanto, éstas no se cortan.

### 4.3. Gradiente de un campo escalar

Sea un campo escalar dado por la función  $V = V(x, y, z)$  y considérese un punto  $P(x, y, z)$  y la superficie de nivel  $V = V_0$  que pasa por dicho punto.

La variación elemental de la función  $V$  en el punto  $P$  viene dada por su diferencial

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx + \frac{\partial V}{\partial y} dy + \frac{\partial V}{\partial z} dz$$

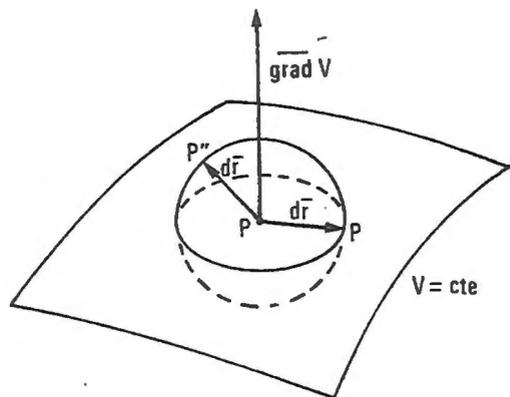


Fig. 4.1

que se puede escribir como

$$dV = \left( \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k} \right) \cdot d\bar{r} \quad (4.5)$$

donde  $d\bar{r}$  es el vector desplazamiento elemental a partir del punto P, y el vector

$$\frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k}$$

se denomina gradiente de la función V en el punto P, se representa por  $\text{grad } V$  y su valor en un punto P se calcula sustituyendo x y z por sus correspondientes valores particulares en P. De manera que el vector gradiente viene dado por

$$\text{grad } V = \frac{\partial V}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial V}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial V}{\partial z} \bar{k} \quad (4.6)$$

y el diferencial de la función se transforma en

$$dV = \text{grad } V \cdot d\bar{r} \quad (4.7)$$

expresión que pasamos a analizar, considerando los siguientes casos:

Si  $d\bar{r}$  está sobre la superficie de nivel (realmente estaría sobre el plano tangente a la misma en P), la variación de la función es nula ya que el extremo P' de  $d\bar{r}$  está sobre la misma superficie, siendo

$$dV = \text{grad } V \cdot d\bar{r} = 0 \quad (4.8)$$

para cualquier  $d\bar{r}$  que cumpla la citada condición y por tanto de esta expresión se deduce que el vector  $\text{grad } V$  es normal a la superficie de nivel en P.

Si se elige  $d\bar{r}$  en la dirección normal a la superficie de nivel y en el sentido creciente de la función, resulta que la variación de la función es máxima ya que en este caso

$$dV = |\text{grad } V| \cdot |d\bar{r}| \cos \varphi = |\text{grad } V| \cdot |d\bar{r}| \quad (4.9)$$

lo que pone de manifiesto que el vector grad V lleva la dirección de la máxima variación de la función y en sentido creciente de la misma.

Finalmente, para cualquier otra dirección del  $d\vec{r}$ , la (4.8) indica la variación de la función en esa dirección, que si se representa por su vector unitario  $\vec{u}_r$ , es

$$dV = \text{grad } V \cdot d\vec{r} = \text{grad } V \cdot (dr \vec{u}_r) = (\text{grad } V \cdot \vec{u}_r) dr \quad (4.10)$$

que expresada como variación unitaria en esa dirección es

$$\frac{dV}{dr} = \text{grad } V \cdot \vec{u}_r \quad (4.11)$$

y se denomina derivada direccional de la función V en la dirección dada por  $\vec{u}_r$ .

De la (4.11) resulta sencillo retomar los dos casos antes citados como límites o extremos de éste ya que el máximo valor de la derivada direccional será en la del gradiente y el mínimo (nulo) en cualquier dirección sobre el plano tangente.

Para cualquier dirección  $\vec{u}_r$ , a partir de P, la derivada direccional sería

$$\left[ \frac{dV}{dr} \right]_{\vec{u}_r} = |\text{grad } V| \cos \varphi \quad (4.12)$$

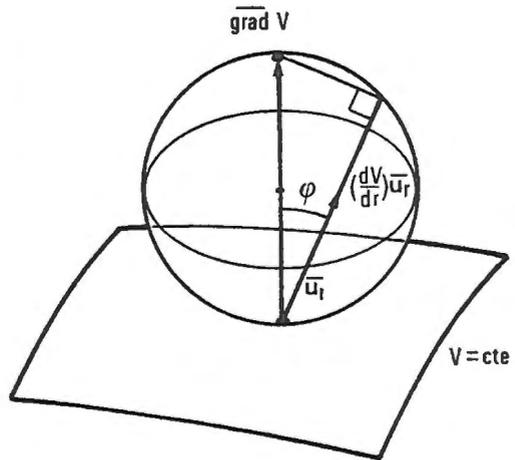


Fig. 4.2

es decir la longitud del segmento proyección del grad V en P. Esta construcción permite obtener gráficamente la distribución de las derivadas direccionales de la función sobre cualquier dirección a partir de P, como longitudes de segmentos de origen común en P y extremos sobre una superficie esférica tangente a superficie de nivel en P y de diámetro el módulo del gradiente en dicho punto.

### Ejemplo 4.1

Dado el campo escalar  $x^2 + y^2 + z^2 = a$ , se pide:

a) Gradiente en el punto (1,1,1). b) Direcciones para las cuales las derivadas de la función tienen de módulo la mitad del gradiente en un punto.

a) El gradiente de la función  $a$  es

$$\text{grad } a = \frac{\partial a}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial a}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial a}{\partial z} \bar{k} = 2x \bar{i} + 2y \bar{j} + 2z \bar{k}$$

que particularizado por el punto (1,1,1) resulta ser

$$\text{grad } a_{(1,1,1)} = \bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$$

b) Llamando  $\bar{u}_r$  al vector unitario en la dirección de  $\bar{r}$ , la derivada direccional respecto a  $\bar{r}$  es

$$\frac{\partial a}{\partial \bar{r}} = \text{grad } a \cdot \bar{u}_r = |\text{grad } a| |\bar{u}_r| \cos \varphi$$

donde  $\varphi$  es el ángulo formado por los vectores  $\overline{\text{grad } a}$  y  $\bar{r}$ .

Para que el módulo sea la mitad del gradiente deberá ser  $\cos \varphi = 1/2$  y, por tanto  $\varphi = 60$  grados.

En consecuencia, cumplen esta condición todas las direcciones sobre la generatriz del cono de vértice el punto (1,1,1), de eje la dirección  $\bar{i} + \bar{j} + \bar{k}$  y de semiángulo cónico  $\varphi = 60$  grados.

### 4.4. Campos vectoriales

Si una magnitud física vectorial es tal que su valor depende de las coordenadas  $(x, y, z)$  del punto en que se mide, se dice que es una función vectorial de punto, representándose por

$$\vec{F} = \vec{F}(x, y, z) = F_x(x, y, z) \vec{i} + F_y(x, y, z) \vec{j} + F_z(x, y, z) \vec{k} \quad (4.13)$$

cuyas componentes son funciones escalares de punto que se supondrán continuas y uniformes.

Así, por ejemplo, el campo eléctrico,  $\vec{E}$ , creado por una carga puntual depende del punto en que se mida y, por tanto, su valor será

$$\vec{E} = \vec{E}(x, y, z) \quad (4.14)$$

Se dice que en una región del espacio existe un campo vectorial cuando en la misma se ha definido una función vectorial de punto, por la que a cada terna de valores  $(x, y, z)$  correspondientes a un punto se le asocia un valor único de la magnitud vectorial que representa.

De manera análoga a lo señalado en los campos escalares sobre su naturaleza intrínseca, también en los campos vectoriales el valor de la magnitud física en cada punto es independiente del sistema de referencia utilizado, aunque, como es sabido, varían las expresiones e incluso los valores de las correspondientes componentes del vector o función vectorial que la represente.

El campo de gradientes de un campo escalar  $V$  es un ejemplo de campo vectorial, dado por

$$\vec{F} = \text{grad } V = \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial V(x, y, z)}{\partial z} \vec{k} \quad (4.15)$$

y que ha sido estudiado anteriormente.

Dado un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  se denominan líneas de campo del mismo aquéllas a las cuales el vector campo es tangente en todos sus puntos. Las ecuaciones diferenciales de dichas líneas se obtendrán precisamente aplicando la citada condición de tangencia que se traduce en la de paralelismo entre el vector elemental  $d\vec{r}$  y el vector campo  $\vec{F}$  en cada punto, es decir

$$\frac{dx}{F_x} = \frac{dy}{F_y} = \frac{dz}{F_z} \quad (4.16)$$

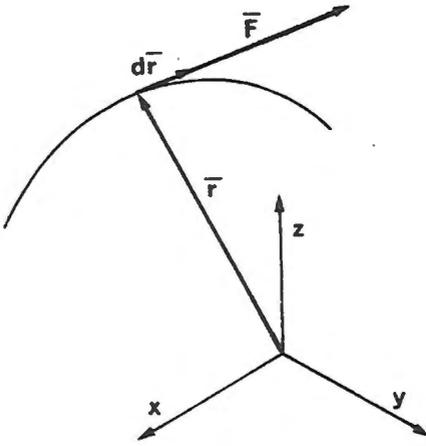


Fig. 4.3

La integración de las dos ecuaciones (4.16) daría dos superficies cuya intersección sería la línea de campo correspondiente.

Así, por ejemplo, las líneas del campo eléctrico creado por una carga puntual positiva son semirrectas radiales de origen el punto geométrico ocupado por dicha carga. El campo eléctrico  $\vec{E}$  en cada punto tiene dirección radial y como se verá posteriormente su módulo depende únicamente de la distancia a la carga que lo crea.

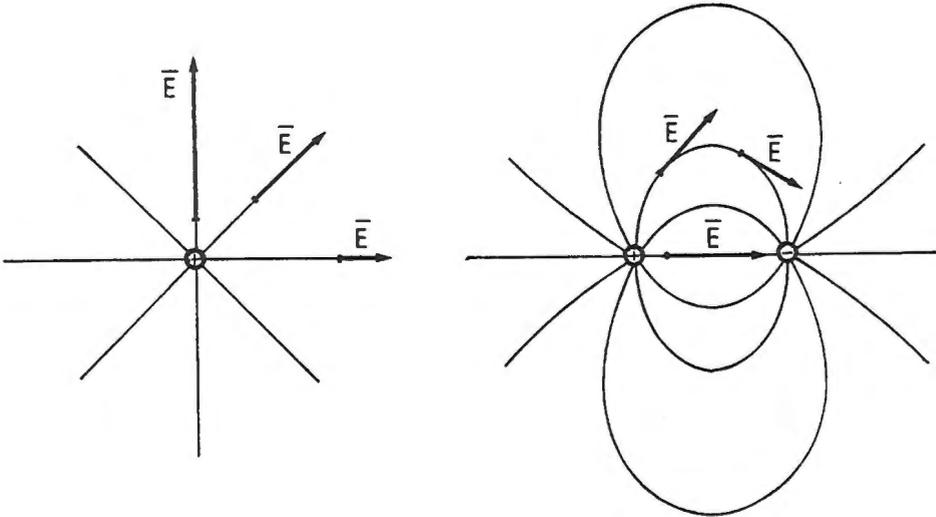


Fig. 4.4

En el caso de un dipolo eléctrico las líneas de campo son curvas que unen los puntos que ocupan las cargas, siendo el campo en cada punto tangente a ellas.

### 4.5. Circulación de un campo vectorial. Concepto de potencial

Dado un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ , se define como circulación elemental de este campo a lo largo de una curva  $C$ , en un punto a la expresión

$$\vec{F} \cdot d\vec{r} = dC \quad (4.17)$$

que extendida a un tramo finito de la curva  $AB$ , es

$$\int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{r} = C_A^B \quad (4.18)$$

integral curvilínea que desarrollada es

$$\int_A^B (F_x dx + F_y dy + F_z dz) = C_A^B \quad (4.19)$$

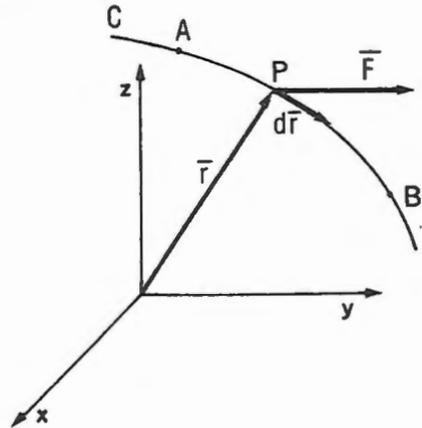


Fig. 4.5

donde  $F_x, F_y, F_z$  son las componentes del campo vectorial y  $dx, dy, dz$  las correspondientes componentes del vector  $d\vec{r}$ .

Teniendo en cuenta que, por un lado, la ecuación de la curva en paramétricas es

$$x = x(q), \quad y = y(q), \quad z = z(q) \quad (4.20)$$

y que sus diferenciales se pueden expresar como

$$dx = \dot{x}(q) dq, \quad dy = \dot{y}(q) dq, \quad dz = \dot{z}(q) dq \quad (4.21)$$

y por otro, las correspondientes componentes del campo vectorial también se expresan en función del parámetro  $q$ , al sustituir sus  $x, y, z$  por sus valores (4.20), resulta

$$C_A^B = \int_A^B F_x(q) \cdot \dot{x}(q) dq + F_y(q) \dot{y}(q) dq + F_z(q) \dot{z}(q) dq = \int_{q(A)}^{q(B)} f(q) dq \quad (4.22)$$

que es una integral inmediata que depende exclusivamente del parámetro  $q$ .

La ecuación (4.18) puede servir para introducir el concepto de potencial, de gran aplicación posterior tanto en Mecánica como en Electromagnetismo. En efecto, si en la citada ecuación, el campo vectorial es un campo de gradientes de una cierta función escalar de punto  $V(x, y, z)$ , se cumple que

$$\vec{F} = \text{grad } V \quad (4.23)$$

que al sustituirla en la (4.18), ésta se transforma en

$$C_A^B = \int_A^B \text{grad } V \cdot d\vec{r} \quad (4.24)$$

que, de acuerdo con la (4.7), la cantidad subintegral coincide con la variación de la función  $V$  (diferencial de  $V$ ), lo que permite escribir

$$C_A^B = \int_A^B dV = V_B - V_A \quad (4.25)$$

o sea que la circulación del campo  $\vec{F}$  entre los puntos  $A$  y  $B$  sobre la curva es igual al valor de la función  $V$  en  $B$ , menos el valor de la función  $V_A$ , y por tanto dicha circulación no depende del camino o curva que una ambos puntos sino únicamente de los valores de la función  $V$  en ambos puntos.

En este caso se dice que la función vectorial  $\vec{F}$  deriva de la función escalar de punto  $V$ .

Si en vez de trabajar con la función  $V$  se utiliza la función  $U = -V$ , entonces la (4.25) se transforma en

$$C_A^B = \int_A^B -dU = U_A - U_B \quad (4.26)$$

denominándose a  $U$  función potencial o simplemente potencial del que deriva el campo vectorial  $\vec{F}$ .

Este concepto de potencial es el que posteriormente se aplicará en Mecánica, Electromagnetismo etc., teniendo, en todo caso, como significado físico el de una energía potencial o capacidad de desarrollar un trabajo sea mecánico, eléctrico etc.

Finalmente cabe plantearse las cuestiones de qué condiciones debe cumplir el campo vectorial  $\vec{F}$  para que derive de un potencial  $U$  y, en caso afirmativo, cómo se calcula dicha función o potencial.

La respuesta a la primera de las cuestiones planteadas se tiene en la misma definición de potencial ya que si

$$\vec{F} = - \text{grad } U = - \left( \frac{\partial U}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \vec{k} \right)$$

resulta que las componentes del campo serán

$$F_x = - \frac{\partial U}{\partial x} \tag{4.27.a}$$

$$F_y = - \frac{\partial U}{\partial y} \tag{4.27.b}$$

$$F_z = - \frac{\partial U}{\partial z} \tag{4.27.c}$$

que al derivar la primera de ellas respecto de  $y$ , y la segunda respecto de  $x$ , se obtiene:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial x} = - \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \tag{4.28}$$

cuyos segundos miembros son iguales y por tanto

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \tag{4.29}$$

Procediendo de modo análogo sobre las expresiones (4.27), se obtiene que

$$\frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \quad (4.30)$$

que junto con la (4.29) constituyen las condiciones de existencia de la función U.

En cuanto al procedimiento de obtención de la función U a partir del campo vectorial  $\vec{F}$ , se explica en el ejemplo tipo que a continuación se resuelve.

### Ejemplo 4.2

Comprobar que el campo  $\vec{F} = (y^2 - 2xyz^3)\vec{i} + (3 + 2xy - x^2z^3)\vec{j} + (6z^3 - 3x^2yz^2)\vec{k}$  deriva de un potencial y hallar la función U que lo representa.

Las condiciones para que el campo  $\vec{F}$  derive de un potencial son:

$$a) \frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \rightarrow 2y - 2xz^3 = 2y - 2xz^3$$

$$b) \frac{\partial F_x}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial x} \rightarrow -6xyz^2 = -6xyz^2$$

$$c) \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y} \rightarrow -3x^2z^2 = -3x^2z^2$$

que el campo  $\vec{F}$  si las cumple.

Llamando  $V=V(x, y, z)$  a la función potencial de la que deriva el campo, es

$$F_x = \frac{\partial V}{\partial x} \rightarrow V = \int F_x dx = y^2x - x^2yz^3 + \phi_1(y, z)$$

además

$$F_y = \frac{\partial V}{\partial y} \rightarrow \frac{\partial V}{\partial y} = 2yx - x^2z^3 + \frac{\partial \phi_1}{\partial y} = 3 + 2xy - x^2z^3$$

con lo cual

$$\varphi_1(yz) = \int 3dy = 3y + \varphi_2(z)$$

quedando la función V como

$$V = y^2x - x^2yz^3 + 3y + \varphi_2(z)$$

Finalmente, aplicando la tercera condición resulta

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -3x^2yz^2 + \frac{\partial \varphi_2}{\partial z} = 6z^3 - 3x^2yz^2$$

de donde

$$\varphi_2(z) = \int 6z^3 dz = 6 \cdot \frac{z^4}{4} + C$$

con lo que, en definitiva, queda

$$V = y^2x - x^2yz^3 + 3y + \frac{3}{2}z^4 + C$$

que es el valor de la función buscada.

#### 4.6. Flujo de un campo vectorial

Dado un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  y una superficie S, se define como flujo elemental del campo  $\vec{F}$  a través de la superficie S en el punto P de la misma a la expresión

$$d\phi = \vec{F} \cdot d\vec{S} \tag{4.31}$$

donde  $\vec{F}$  es valor del campo vectorial en el punto P y  $d\vec{S}$  es el vector normal a la superficie S en P y cuyo módulo es igual a la superficie del elemento de área considerado.

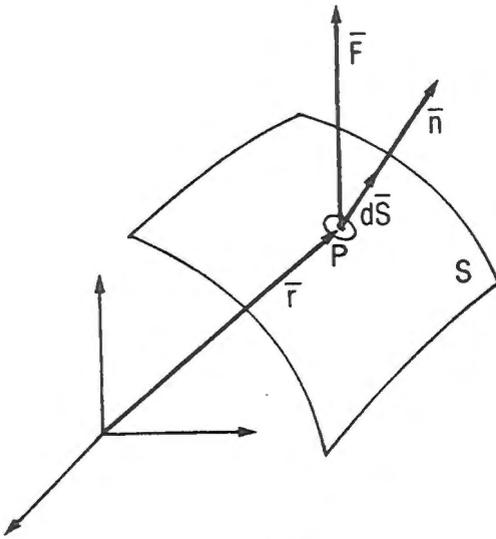


Fig. 4.6

En función del vector unitario normal  $\vec{n}$  a la superficie, el elemento de flujo es

$$d\phi = (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.32)$$

El flujo total del campo  $\vec{F}$  a través de la superficie S se obtiene integrando el flujo elemental definido en la (4.31), es decir

$$\phi_s = \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} = \iint_S (\vec{F} \cdot \vec{n}) dS \quad (4.33)$$

Puesto que  $\vec{n}$  puede orientarse en uno u otro sentido, según la normal a la superficie, el signo del escalar  $\phi_s$  dependerá de la orientación elegida.

### 4.7. Estudio local de campos vectoriales

En el estudio de las propiedades de los campos vectoriales que se utilizan para modelizar algunos fenómenos físicos, suele interesar conocer la variación de algunas características en puntos concretos del espacio y sus entornos elementales. Así, por ejemplo, en el campo eléctrico creado por una carga puntual es esencial estudiar las propiedades del campo en el punto donde se sitúa la citada carga o en el elemento de volumen que constituye su entorno diferencial. Asimismo es importante conocer cómo varía el campo entre un punto determinado otro inmediatamente próximo a él.

Todas estas propiedades se cuantifican mediante los denominados operadores diferenciales, siendo fundamentales, la divergencia y el rotacional, que se pasan a estudiar a continuación.

Por otra parte, la integración o extensión de estas propiedades en un punto, a un recinto finito permite deducir propiedades del campo que tienen gran aplicación en partes posteriores de la asignatura. Esta extensión se lleva a cabo mediante los teoremas integrales.

### 4.8. Divergencia de un campo vectorial

Dado un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  se define como divergencia de este campo en un punto  $P$  a la expresión

$$\operatorname{div} \vec{F} = \lim_{\partial v \rightarrow 0} \frac{1}{\partial v} \iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S} \quad (4.34)$$

donde  $\partial v$  es el elemento de volumen entorno del punto  $P$  y estando la integral de superficie del flujo del campo extendida a la superficie cerrada que envuelve dicho elemento de volumen.

El significado físico de la (4.34) y por tanto de la divergencia en un punto  $P$  es la cuantificación del flujo del campo a través de la superficie que limita un volumen elemental que contiene el punto, partido por dicho volumen. En definitiva, expresa el flujo por unidad de volumen en un punto, que se puede dar como

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{d\phi}{dv} \quad (4.35)$$

Tomando como  $d\vec{S}$  positivo el dirigido hacia el exterior del volumen, si el numerador de la (4.35) es positivo quiere decir que el flujo resultante a través de la superficie que limita al elemento de volumen considerado es saliente, la divergencia del campo en ese punto es positiva, diciéndose que constituye un manantial. En caso de flujo resultante entrante la divergencia es negativa y el punto constituye un sumidero.

Finalmente si la divergencia es nula se dice que el campo es solenoidal.

A partir del significado físico de la divergencia expresado en la (4.35) se puede obtener su expresión, que en coordenadas cartesianas se plantea del siguiente modo.

Sea  $P$  el punto en el que se pretende calcular la divergencia, y  $dx dy dz$  el valor del elemento de volumen considerado como entorno de  $P$ .

El flujo neto total a través de toda la superficie elemental que encierra el elemento de volumen es

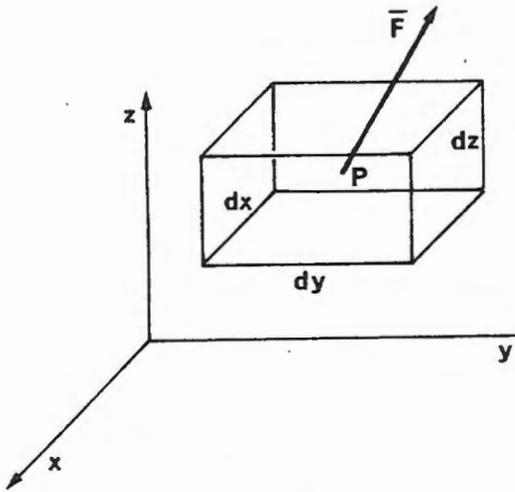


Fig. 4.7

$$d\phi = \text{div } \vec{F} dv \quad (4.36)$$

Ahora bien, este flujo neto se obtiene como la suma de los flujos netos a través de las caras del paralelepipedo diferenciales normales respectivamente a los ejes OX, OY y OZ, a los que se denominarán por  $d\phi_x, d\phi_y, d\phi_z$ , es por tanto

$$d\phi = d\phi_x + d\phi_y + d\phi_z \quad (4.37)$$

Cada uno de estos sumandos, como flujos netos, se pueden obtener como variaciones de flujos

(funciones escalares) a lo largo de una dirección, empleando el concepto y la expresión de la derivada direccional explicada anteriormente. Así, por ejemplo, el flujo neto a través de las caras normales al eje OX es

$$d\phi_x = \text{grad}(F_x dy dz) \cdot (dx \vec{i}) \quad (4.38)$$

que desarrollada da

$$d\phi_x = \left( \frac{\partial(F_x dy dz)}{\partial x} \vec{i} + \dots \right) \cdot (dx \vec{i}) = \frac{\partial(F_x dy dz)}{\partial x} dx = \frac{\partial F_x}{\partial x} dv \quad (4.39)$$

del mismo modo, los restantes flujos antes son

$$d\phi_y = \frac{\partial F_y}{\partial y} dv; \quad d\phi_z = \frac{\partial F_z}{\partial z} dv \quad (4.40)$$

de manera que al sustituir estos valores en la (4.34) resulta

$$d\phi = \left( \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \right) dv \quad (4.41)$$

que al identificarla con la (4.36), se obtiene como expresión de la divergencia

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \quad (4.42)$$

La extensión de la (4.36) a un recinto finito constituye el Teorema de la divergencia o de Gauss, considerando dicho recinto, de volumen  $V$  y limitado por la superficie  $S$ , dividido en elementos a los que se aplica la expresión diferencial

$$d\phi = \operatorname{div} \vec{F} \, dv$$

resultando al integrar que

$$\iint_S d\phi = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv$$

en la que el primer miembro representa el flujo del campo a través de la superficie  $S$  que limita el volumen  $V$ , es decir

$$\phi_S = \iiint_V \operatorname{div} \vec{F} \, dv \quad (4.43)$$

y que pone de manifiesto que dicho flujo es igual a la divergencia del campo extendida a todo el volumen,  $V$ , del recinto.

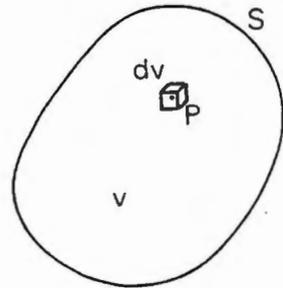


Fig. 4.8

#### 4.9. Rotacional de un campo vectorial

Dado un campo vectorial  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$  y siendo  $d\vec{s}$  un entorno superficial del punto  $P$  (sobre la superficie  $S$ ) limitado por la curva cerrada  $C$ , se define como rotacional del campo  $\vec{F}$  en  $P$  al vector,  $\operatorname{rot} \vec{F}$  tal que

$$\operatorname{rot} \vec{F} \cdot d\vec{S} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.44)$$

es decir, que su flujo a través del elemento  $d\vec{S}$  es igual a la circulación elemental del campo  $\vec{F}$  a lo largo de la curva  $C$  que encierra dicho entorno, y en el sentido positivo indicado en la figura.

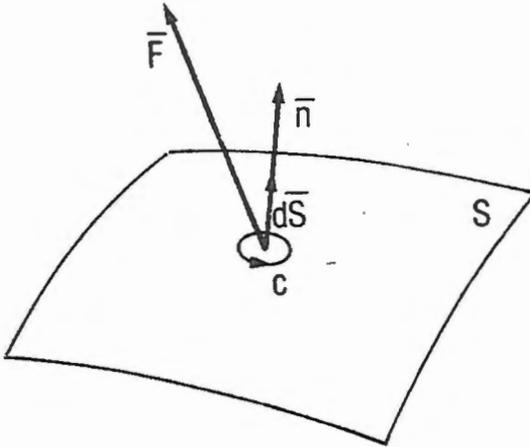


Fig. 4.9

Para obtener la expresión del rotacional en coordenadas cartesianas se seguirá un procedimiento análogo al empleado para el caso de la divergencia, aunque en este caso es conveniente hacerlo por componentes. Así, para la componente en  $OX$  del rotacional, la expresión (4.44) se transforma en

$$(\text{rot } \vec{F})_x dS_x = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (4.45)$$

de modo que el  $dS_x$  será un rectángulo elemental normal al eje  $OX$ , tal y como se indica en la figura. La circulación se tomará en el sentido antihorario para así obtener la componente en  $OX$  positiva del rotacional, y su valor será

$$\begin{aligned} \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} &= C_1^2 + C_2^3 + C_3^4 + C_4^1 = (C_1^2 - C_4^1) + (C_2^3 - C_3^4) = \\ &= (C_2^3 - C_4^1) - (C_3^4 - C_1^2) \end{aligned} \quad (4.46)$$

donde cada paréntesis representa la variación neta de la circulación en tramos paralelos. Dicha circulación es una función escalar y, por tanto, lo que interesa es calcular la derivada de esa función escalar en la dirección del eje  $OY$  o del  $OZ$  según caso.

Así,

$$C_2^3 - C_4^1 = d(F_z \cdot dz) = \text{gra } d(F_z \cdot dz) \cdot (dy \vec{j}) = \frac{\partial (F_z dz)}{\partial y} dy = \frac{\partial F_z}{\partial y} dz dy$$

del mismo modo

$$C_3^4 - C_1^2 = d(F_y \, dy) = \text{grad}(F_y \, dy)(dz \, \bar{k}) = \frac{\partial(F_y \, dy)}{\partial z} dz = \frac{\partial F_y}{\partial z} dy \, dz$$

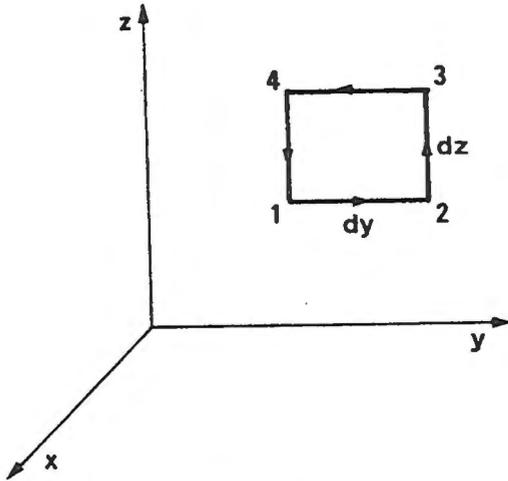


Fig. 4.10

con cuyos valores, la (4.46) se transforma en

$$\int_C \bar{F} \cdot d\bar{r} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) dy \, dz \quad (4.47)$$

que al identificarla con la (4.45) resulta

$$(\text{rot} \cdot \bar{F})_x = \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \quad (4.48)$$

De manera análoga al plantear el cálculo para las componentes en OY y OZ del rotacional se obtienen respectivamente

$$(\text{rot} \bar{F})_y = \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}; \quad (\text{rot} \bar{F})_z = \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \quad (4.49)$$

En consecuencia el vector  $\text{rot} \cdot \bar{F}$  queda

$$\text{rot} \cdot \bar{F} = \left( \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} \right) \bar{i} + \left( \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} \right) \bar{j} + \left( \frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y} \right) \bar{k} \quad (4.50)$$

que se puede expresar de la forma simbólica

$$\text{rot} \cdot \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix} \quad (4.51)$$

y que, obviamente, es de más fácil manejo.

Como se observa en la (4.50), las componentes del  $\text{rot} \vec{F}$ , coinciden con las diferencias entre las derivadas cruzadas de las correspondientes del vector campo, de manera que si el  $\text{rot} \vec{F}$  es nulo, lo son todas y cada una de sus componentes lo que implica que

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z} &= 0 \\ \frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x} &= 0 \\ \frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad (4.52)$$

condiciones que coinciden con las (4.29) y (4.30) que garantizaban la existencia de una función potencial  $U$  de la que derivaba el campo. En consecuencia si el campo  $\vec{F}$  es irrotacional ( $\text{rot} \vec{F} = \vec{0}$ ), deriva de un potencial, denominándose conservativo.

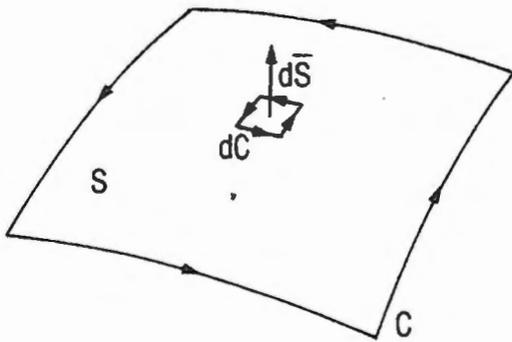


Fig. 4.11

Por otra parte, la definición del rotacional expresada en (4.44) admite una extensión a superficies finitas  $S$  limitadas por la curva  $C$  sin más que considerar la citada superficie como integrada por elementos  $d\vec{S}$  sobre ella tal y como se indica en la figura, de manera que al extender la (4.44) a la superficie finita resulta

$$\int_C \vec{F} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{F} \cdot d\vec{s} \quad (4.53)$$

expresión que constituye el teorema de Stokes.

#### 4.10. Otros operadores. El vector simbólico Nabla

A partir de los operadores definidos, tanto en campos, escalares (gradiente) como en campos vectoriales (divergencia y rotacional) se definen otros compuestos de éstos y para ello resulta cómodo introducir un vector simbólico,  $\nabla$ , dado por

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k} \quad (4.54)$$

y denominado operador nabla cuyo tratamiento funcional es el de un vector real interviniendo como tal en todas las operaciones.

Así, el gradiente de un campo escalar  $U(x, y, z)$ , se representaría como

$$\text{grad } U = \nabla U$$

Del mismo modo la divergencia de un campo vectorial  $\vec{F}$  vendría dada por

$$\text{div } \vec{F} = \nabla \cdot \vec{F}$$

y el rotacional por

$$\text{rot } \vec{F} = \nabla \times \vec{F}$$

La divergencia del gradiente de un campo escalar denominada también Laplaciana es

$$\text{div} \cdot (\text{grad } U) = \nabla \cdot (\nabla U) = \nabla^2 U \quad (4.55)$$

o bien

$$\nabla^2 U = \Delta U = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}$$

de donde, por analogía con el operador nabla se extrae el operador laplaciano de la expresión

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \quad (4.56)$$

En base a éste se puede definir la laplaciana de un vector como otro vector cuyas componentes son las laplacianas de las respectivas componentes del vector inicial, es decir

$$\text{Laplaciana } \vec{F} = \Delta \vec{F} = \Delta F_x \vec{i} + \Delta F_y \vec{j} + \Delta F_z \vec{k} \quad (4.57)$$

### Ejemplo 4.3

Dados los campos escalar y vectorial

$$U = x y z \quad \vec{V} = x^2 \vec{i} + x y z \vec{j} + z^2 \vec{k}$$

se pide:

1. Flujo del gradiente del campo  $U$  a través de la cara exterior de un elipsoide de revolución de eje vertical, y semiejes  $a = 2$ ,  $b = 1$ , siendo  $a$  el vertical o de simetría, y sabiendo que el centro del elipsoide es el punto  $C(0, 3, 0)$ .
2. Circulación del campo  $\vec{V}$  a lo largo de la línea intersección del plano  $z = 1$  y la superficie del elipsoide del apartado anterior.

### Solución:

$$1. \quad \text{grad } U = y z \vec{i} + x z \vec{j} + x y \vec{k}$$

Por ser superficie cerrada, aplicando Gauss es

$$\int_S (\text{gra } d U) \cdot d\vec{S} = \int_V \text{div} \cdot (\text{gra } d U) dv = 0$$

ya que

$$\text{div} \cdot (\text{gra } d U) = 0$$

2. Aplicando Stockes es

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S (\nabla \times \vec{v}) \cdot d\vec{S} \quad [1]$$

y como

$$\nabla \times \vec{v} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x^2 & xyz & z^2 \end{vmatrix} = -xy\bar{i} + yz\bar{k}$$

al sustituir en [1] queda, ya que  $d\vec{S} = dS\bar{k}$

$$\oint \vec{v} \cdot d\vec{r} = \int_S yz dS = \int_{z=1} y dS = y_G \cdot S = 3 \cdot \pi r_1^2 = \frac{9}{4} \pi$$

donde  $r_1$  se obtiene así

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{1} + \frac{z^2}{2^2} = 1; \quad z = 1$$

$$r_1^2 = 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}; \quad r_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$$



# CAPÍTULO 5

## CINEMÁTICA

### *5.1. Introducción a la Mecánica Clásica*

Antes de entrar en el tema concreto de la Cinemática y al objeto de encuadrarlo en el contexto general de la Mecánica Clásica es conveniente introducir a modo de generalidades, cuales son las características, objeto y partes de esta rama de la Física.

El objeto de la Mecánica Clásica es el de establecer las relaciones entre los movimientos de los sistemas materiales y las causas que los producen o fuerzas. En definitiva se trata de elaborar un modelo teórico para representar fuerzas y movimientos para, de este modo, tratar de encontrar relaciones matemáticas que permitan abordar el citado problema desde uno de los siguientes planteamientos:

- a) Conocido el movimiento del sistema material, obtener las fuerzas que lo provocan.
- b) Conocido el sistema de fuerzas obtener las ecuaciones del movimiento.

Las partes en que tradicionalmente se divide la Mecánica son: Cinemática, Estática y Dinámica.

La Cinemática trata de describir los movimientos de los sistemas sin atender a las causas que los producen. Se ocupa, por tanto, de la descripción geométrica de los desplazamientos de los cuerpos a lo largo del tiempo. Introduce, además de los elementos geométricos, el parámetro tiempo al que le asigna un carácter absoluto (no ocurre así en la Cinemática Relativista en la que el tiempo depende del sistema en que se mide).

La Estática es la parte de la Mecánica que estudia el equilibrio de sistemas materiales, tratando de buscar las condiciones que, bien las fuerzas, bien los

sistemas (o parámetros que los representan) deben cumplir para que se produzca ese estado de equilibrio.

Finalmente la Dinámica trata de establecer las leyes que relacionan las fuerzas que intervienen y los movimientos que provocan.

En resumen, se puede decir que el objetivo de la Mecánica se ha cumplido cuando de un sistema material sobre el que actúan unas ciertas fuerzas dadas, se conoce la ley que permite dar la posición del sistema en función del tiempo.

Aunque tradicionalmente, la secuencia de estudio de las distintas partes de la Mecánica ha variado siendo el de Cinemática, Estática y Dinámica, en el caso del presente texto y dada la menor importancia que la Estática pueda representar en la formación del estudiante de Ingeniería de Telecomunicación o de Sistemas informáticos, se tratará primero la Cinemática, luego la Dinámica y finalmente como casos particulares, y únicamente los que puedan tener cierto interés, algunos de la Estática.

Insistiendo en la posible aplicación de los conceptos de la Mecánica Clásica a partes posteriores de esta asignatura o de las posteriores de la carrera, el enfoque que se pretende dar de esta parte discrepa, en general, del de las destinadas al resto de Ingenierías y Arquitectura.

En este sentido, prácticamente se suprime el estudio de los sistemas indeformables (sólidos rígidos) y de la Estática; sin embargo se trata con más detalle la Cinemática y Dinámica del punto material dadas las aplicaciones que tienen en partes posteriores de la asignatura.

### ***5.2. Cinemática del punto***

De acuerdo con la definición de Cinemática, dada en el apartado anterior, concretamente la del punto tiene por objeto la descripción del movimiento del mismo sin entrar a estudiar o analizar las causas que lo producen.

Los postulados fundamentales de la Cinemática se pueden reducir a dos, a saber:

1. El marco matemático utilizado para la descripción de los fenómenos físicos es un espacio afín euclideo de tres dimensiones que se materializa en un sistema de referencia cartesiano rectangular cuyas coord-

nadas indican distancias y para las medidas de los intervalos de tiempo se utilizan relojes sincronizados situados en los puntos de dicho espacio.

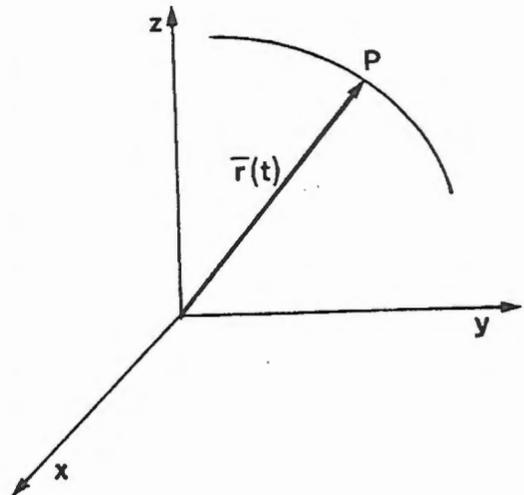
2. Las distancias y los intervalos de tiempo descritos por un mismo fenómeno básico son los mismos que cualquier sistema de referencia utilizado.

Este postulado en definitiva corresponde a los que confieren al tiempo y al espacio carácter absoluto, en contra de lo que ocurre en la Cinemática Relativista en la que estos intervalos no permanecen invariantes sino que dependen del sistema de referencia en el que se miden.

Estos principios han sido avalados por la experiencia secular de la Mecánica y, como anteriormente se ha mencionado, son aplicables a fenómenos en los cuales, no intervengan velocidades próximas a las de la luz, ni se estudian movimientos de partículas que constituyen la estructura atómica.

Los conceptos necesarios para la descripción del movimiento de un punto son:

- Vector de posición  $\vec{r}$  del punto es aquél cuyo origen coincide invariablemente con el origen de coordenadas y cuyo extremo coincide con el punto.



*Fig. 5.1*

Si este punto se mueve, su posición cambia con el tiempo, el extremo del vector de posición describe una curva que es la curva indicatriz del vector  $\vec{r}$ .

Dicha curva, en Cinemática, se llama trayectoria y es el lugar geométrico de los puntos del espacio que indican la posición sucesiva del punto en cada instante.

La expresión del vector de posición es

$$\vec{r} = \vec{r}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j} + z(t)\vec{k} \quad (5.1)$$

y las ecuaciones paramétricas de la trayectoria

$$\begin{aligned} x &= x(t) \\ y &= y(t) \\ z &= z(t) \end{aligned} \tag{5.2}$$

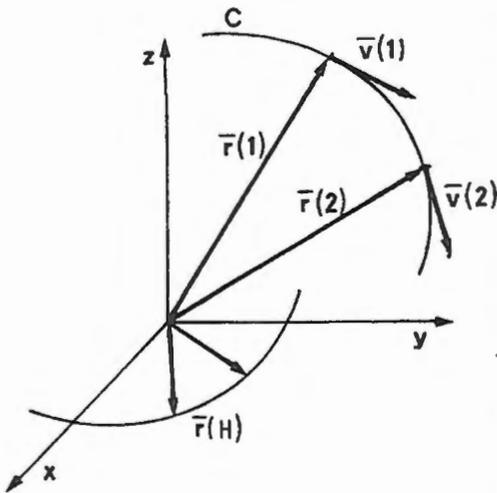
- Vector velocidad  $\vec{v}$  de un punto, es la derivada con respecto al tiempo del vector de posición del mismo y se expresa como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \dot{x}(t)\vec{i} + \dot{y}(t)\vec{j} + \dot{z}(t)\vec{k} \tag{5.3}$$

que, de acuerdo con lo estudiado en el capítulo 3, es un vector tangente a la trayectoria en el punto considerado.

La (5.3) también se puede expresar como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{ds}{dt} \vec{T} = v\vec{T} \tag{5.4}$$



**Fig. 5.2**

lo que pone de manifiesto que el módulo de la velocidad llamado celeridad, es la variación del espacio recorrido medido sobre la trayectoria, respecto del tiempo.

La (5.4) representa, pues, la expresión del vector velocidad de un punto referido al triedro intrínseco.

Si por el origen de coordenadas se trazan vectores equipolentes a las velocidades correspondientes a una determinada trayectoria, sus extremos están sobre una curva,  $\vec{r}_H = \vec{v}(t)$  que se denomina hodógrafo del movimiento del punto.

En la figura (5.2) se representa una trayectoria C en

la que se han dibujado dos posiciones del punto y sus correspondientes velocidades  $\vec{v}(1)$  y  $\vec{v}(2)$ , trazándose sus equipolentes por O que permiten dibujar la hodógrafa  $r_H$ .

Vector aceleración,  $\vec{a}$ , de un punto es la derivada con respecto al tiempo del vector velocidad del mismo, es decir

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \ddot{x}(t) \vec{i} + \ddot{y}(t) \vec{j} + \ddot{z}(t) \vec{k} \quad (5.5)$$

Para obtener las correspondientes componentes intrínsecas del vector aceleración se derivará la (5.4) respecto del tiempo, de modo que

$$\vec{a} = \frac{d \vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt} (v \vec{T}) = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \cdot \frac{d \vec{T}}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v \frac{d \vec{T}}{ds} \cdot \frac{ds}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + v^2 \frac{d \vec{T}}{ds}$$

que teniendo en cuenta la (3.18) resulta

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N} \quad (5.6)$$

lo que pone de manifiesto que el vector aceleración referido al triedro intrínseco tiene una componente sobre el vector tangente denominada tangencial y que vale

$$a_T = \frac{dv}{dt} \quad (5.7)$$

y otra sobre el vector normal, denominada aceleración normal dada por

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \quad (5.8)$$

donde  $\rho$  es el radio de curvatura de la trayectoria en el punto considerado.

Según esto, el vector aceleración de un punto está siempre contenido en el plano osculador del triedro intrínseco asociado al mismo, siendo, por tanto, nula siempre la componente de la aceleración sobre la binormal.

El análisis cinemático del punto según sus componentes intrínsecas facilita un criterio de clasificación de movimientos, según su trayectoria. Así, si el vector  $\vec{T}$  es constante la trayectoria es **rectilínea** y en caso contrario **curvilínea**. Dentro de las curvilíneas si el vector  $\vec{B}$  es constante la trayectoria está sobre un **plano** mientras que si es variable, la trayectoria es **alabeada**.

Por otra parte, y dentro de la clasificación de movimientos, la relación entre el arco recorrido sobre la trayectoria desde un punto fijo  $P_0$  tomado como origen de arcos y el tiempo, ofrece otro criterio de clasificación. Así, si la citada relación es lineal, lo que supone que la expresión del vector velocidad en intrínsecas, el coeficiente de  $\vec{T}$  es constante, el movimiento es **uniforme** y la función que liga espacios y tiempos es  $s = ct + s_0$ . Si dicha relación no es lineal, el movimiento es **variado**.

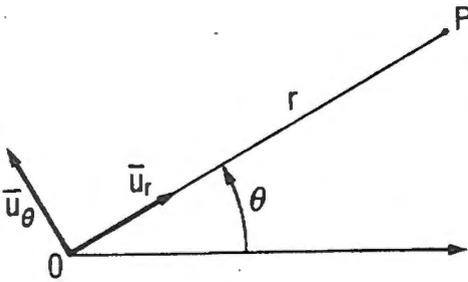


Fig. 5.3

En ocasiones para describir el movimiento de un punto sobre una curva plana da mayor información e incluso resulta más sencillo el referir los vectores cinemáticos (de posición, velocidad y aceleración) al sistema de coordenadas polares planas que se pasan a explicar.

Del mismo modo que en coordenadas cartesianas la posición de un punto en el plano viene determinada por dos números  $x$  e  $y$  que son sus coordenadas y que indican las distancias respectivas del punto al eje  $OY$  y  $OX$  respectivamente, las coordenadas que determinan la situación del punto en el sistema polar plano son:

$r$  o distancia del punto a otro fijo denominado polo,  $O$ .

$\theta$  o ángulo que el radio vector  $\vec{OP}$  forma con una semirrecta de referencia (que puede coincidir con la  $OX$ ).

La base utilizada para representar los vectores cinemáticos mediante las coordenadas polares planas es la formada por el triedro  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ , de los que sólo interesan  $\vec{u}_r$  y  $\vec{u}_\theta$  situados sobre el plano de referencia y cuya definición es:

El  $\vec{u}_r$  es el unitario del vector  $\vec{OP}$ .

El  $\vec{u}_\theta$  es el unitario normal a  $\vec{OP}$  en el sentido creciente de arcos recorridos por P sobre su trayectoria. Así, en la figura 5.4, si P recorre la curva C en el sentido indicado, que corresponde a un giro antihorario alrededor de O, el  $\vec{u}_\theta$  tendrá el sentido que se le da en la misma figura.

En estas condiciones, el vector de posición  $\vec{r}$  es

$$\vec{r} = r \vec{u}_r \quad (5.9)$$

y el vector velocidad

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt} \quad (5.10)$$

donde al ser  $\vec{u}_r$  un vector de módulo constante y que gira alrededor de O describiendo su extremo un arco  $s'$  y su radio un ángulo  $\theta$ , se puede expresar como

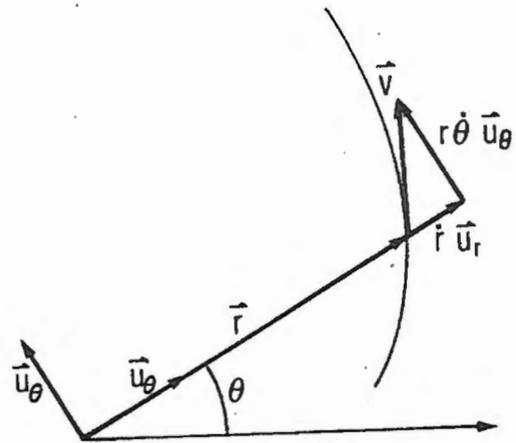
$$\frac{d\vec{u}_r}{dt} = \frac{d\vec{u}_r}{ds'} \cdot \frac{ds'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \vec{u}_\theta \cdot 1 \cdot \dot{\theta} \quad (5.11)$$

ya que  $d\vec{u}_r / ds'$  es un vector unitario perpendicular a  $\vec{u}_r$ ,  $ds' / d\theta$  es el radio del arco descrito por el vector  $\vec{u}_r$  en su giro (que vale la unidad) y  $d\theta / dt$  es la variación del ángulo respecto del tiempo y que denominaremos por  $\dot{\theta}$ .

Con todo ello, la expresión del vector velocidad en coordenadas polares planas es

$$\vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad (5.12)$$

denominándose a sus respectivas componentes radial y transversal de la velocidad.



Finalmente el vector aceleración en este mismo sistema de referencia se obtiene derivando respecto al tiempo el vector velocidad dado en (5.12)

$$\bar{a} = \frac{d\bar{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \dot{\bar{u}}_r) + \frac{d}{dt}(r \dot{\theta} \bar{u}_\theta) \quad (5.13)$$

donde

$$\frac{d}{dt}(r \dot{\bar{u}}_r) = r \ddot{\bar{u}}_r + r \dot{\bar{u}}_r = r \ddot{\bar{u}}_r + r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta \quad (5.14)$$

y

$$\frac{d}{dt}(r \dot{\theta} \bar{u}_\theta) = r \ddot{\theta} \bar{u}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta + r \dot{\theta} \frac{d\bar{u}_\theta}{dt} \quad (5.15)$$

que de modo análogo a lo establecido en la (5.11), el vector  $d\bar{u}_\theta / dt$  es

$$\frac{d\bar{u}_\theta}{dt} = \frac{d\bar{u}_\theta}{ds'} \cdot \frac{ds'}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = (-\bar{u}_r) \cdot 1 \cdot \dot{\theta} \quad (5.16)$$

con lo que la expresión de la aceleración resulta

$$\bar{a} = r \ddot{\bar{u}}_r + r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta + r \dot{\theta} \ddot{\bar{u}}_\theta - r \dot{\theta}^2 \bar{u}_r$$

que agrupando términos, según sus componentes, es

$$\bar{a} = (r \ddot{\bar{u}}_r - r \dot{\theta}^2) \bar{u}_r + (r \ddot{\theta} + 2r \dot{\theta} \dot{\bar{u}}_\theta) \bar{u}_\theta \quad (5.17)$$

denominándose a cada una de estas componentes radial y transversal de la aceleración.

### Ejemplo 5.1

Del movimiento de un punto se sabe que su trayectoria es plana y que las componentes tangencial y normal de su aceleración son constantes. Suponiendo que en el instante inicial, este móvil parte del reposo, determinar su trayectoria.

Si la curva es plana, sólo tiene curvatura de flexión cuyo radio es

$$\rho = \frac{ds}{d\theta}$$

Por otro lado, al ser constantes las componentes intrínsecas de la aceleración, es

$$a_T = \frac{dv}{dt} = C_1 \rightarrow v = C_1 t$$

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} = C_2 \rightarrow v^2 = C_2 \rho$$

y eliminando  $v$  entre ambas, se obtiene

$$t^2 C_1^2 = C_2 \rho$$

valor de  $t$  que sustituido en la primera de las anteriores integrada es

$$s = \frac{1}{2} C_1 \frac{C_2}{C_1^2} \rho = \frac{C_2}{2C_1} \rho = \frac{1}{k} \rho$$

donde se ha sustituido  $2C_1 / C_2 = k$ .

Resulta, por tanto, la ecuación diferencial

$$k s = \frac{ds}{d\theta}$$

que al integrar es

$$\int k d\theta = \int \frac{ds}{s}$$

o sea

$$\ln \frac{s}{s_0} = k \theta$$

o bien

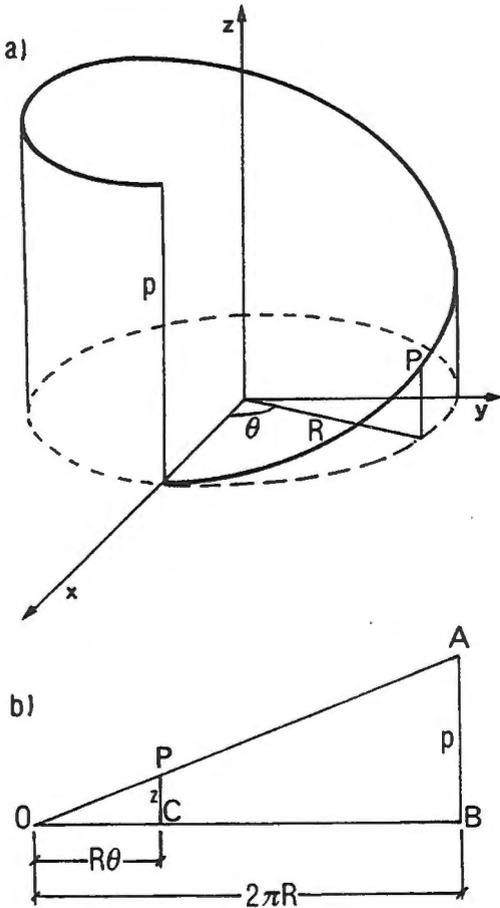
$$s = s_0 \cdot e^{k\theta}$$

que es la ecuación de la trayectoria.

**Ejemplo 5.2**

La hélice cilíndrica de paso  $p$  y radio del cilindro generador  $R$ , es recorrida por un punto móvil con velocidad constante  $v$ . Calcúlese las componentes intrínsecas de la aceleración del punto, así como los radios de curvatura de la hélice.

Las ecuaciones paramétricas de la hélice cilíndrica de eje vertical, tomando a éste como eje  $OZ$ , son  $x = R \cos \theta$ ;  $y = R \sin \theta$ ; y la  $z$  la obtenemos teniendo en cuenta la figura 5.5 por proporcionalidad entre los triángulos  $OCP$  y  $OBA$ .



$$\frac{z}{p} = \frac{R \theta}{2 \pi R} \quad z = \frac{p}{2 \pi} \theta$$

Por tanto la función vectorial será

$$\vec{r}(\theta) = R \cos \theta \vec{i} + R \sin \theta \vec{j} + \frac{p}{2 \pi} \theta \vec{k}$$

Calcularemos en primer lugar las curvaturas, empezando por la de flexión, de la que sabemos que

$$1 / \rho = |d\vec{T} / ds| \text{ donde}$$

Fig. 5.5

$$\vec{T} = \frac{d\vec{r}}{ds} = \frac{d\vec{r}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{-R \operatorname{sen} \theta \vec{i} + R \cos \theta \vec{j} + P/2\pi \vec{k}}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}}$$

y

$$\frac{d\vec{T}}{ds} = \frac{d\vec{T}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{-R \cos \theta \vec{i} - R \operatorname{sen} \theta \vec{j}}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2} \sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} = \frac{-R(\cos \theta \vec{i} + \operatorname{sen} \theta \vec{j})}{(R^2 + P^2/4\pi^2)}$$

que calculando el módulo de este vector y sustituyéndolo en el valor de  $1/\rho$  se obtiene

$$\frac{1}{\rho} = \frac{R}{R^2 + P^2/4\pi^2}$$

luego el radio de flexión es su inversa.

Para la curvatura de torsión  $1/T = |d\vec{B}/ds|$  calcularemos primero el vector binormal  $\vec{B}$ , por  $\vec{B} = \vec{T} \times \vec{N}$ , siendo  $\vec{N}$

$$\vec{N} = \frac{d\vec{T}/ds}{|d\vec{T}/ds|} = -\cos \theta \vec{i} - \operatorname{sen} \theta \vec{j}$$

luego

$$\begin{aligned} \vec{B} &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -R \operatorname{sen} \theta & R \cos \theta & P/2\pi \\ -\cos \theta & -\operatorname{sen} \theta & 0 \end{vmatrix} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \left( \frac{P}{2\pi} \operatorname{sen} \theta \vec{i} - \frac{P}{2\pi} \cos \theta \vec{j} + R \vec{k} \right) \end{aligned}$$

y hallando su derivada respecto al arco da

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{B}}{ds} &= \frac{d\vec{B}/d\theta}{ds/d\theta} = \frac{1}{\sqrt{R^2 + P^2/4\pi^2}} \cdot \left( \frac{P}{2\pi} \cos\theta \vec{i} + \frac{P}{2\pi} \operatorname{sen}\theta \vec{j} \right) / \frac{ds}{d\theta} = \\ &= \frac{P/2\pi}{R^2 + P^2/4\pi^2} (\cos\theta \vec{i} + \operatorname{sen}\theta \vec{j}) \end{aligned}$$

que al calcular su módulo y llevarlo a la expresión que da la torsión es

$$\frac{1}{\tau} = \frac{P/2\pi}{R^2 + P^2/4\pi^2}$$

siendo el radio de torsión, su inversa.

Para el cálculo de las componentes intrínsecas del vector aceleración partiremos de la expresión general de  $\vec{a}$  en intrínsecas, que es

$$\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{T} + \frac{v^2}{\rho} \vec{N}$$

en donde  $a_T = dv/dt = 0$ , ya que por ser un movimiento uniforme el módulo de la velocidad es constante.

La componente normal es  $a_N = v^2/\rho$ , siendo  $\rho$  el radio de curvatura de flexión obtenido anteriormente, luego

$$a_N = \frac{Rv^2}{R^2 + P^2/4\pi^2}$$

### Ejemplo 5.3

Estudiar el movimiento de un punto P de la periferia de un disco de radio R que rueda sin deslizar sobre un plano horizontal, suponiendo que la velocidad angular que lleva es constante  $w = \pi/2 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ .

Determinar en el instante  $t = 1$  s los vectores velocidad y aceleración así como las componentes intrínsecas de ésta, del punto de la periferia que en el instante  $t = 0$  se encontraba en la parte más alta del disco. En  $t = 1$  hállese también el radio de flexión de la trayectoria de P.

Para el estudio del movimiento de P, elegiremos el sistema de referencia de modo que, el plano sobre el que rueda el disco sea el  $z = 0$  (figura 5.6), y el origen del movimiento ( $t = 0$ ) tal que en ese instante el punto de contacto del disco con el plano horizontal sea el origen de coordenadas.

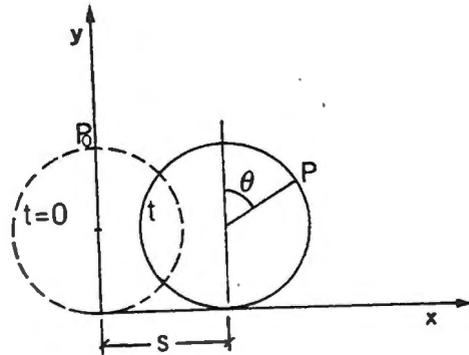


Fig. 5.6

En el instante  $t = 0$ , el punto P se encontraba en  $P_0$ ; en  $t = 1$ , como  $\theta = \pi/2$  se encontrará en  $P_1$  y en cierto instante (posición genérica) se encontrará en P.

A partir de esa posición genérica, podemos obtener las coordenadas de P y, en consecuencia, la ecuación de su trayectoria, así,

$$x = s + R \operatorname{sen} \theta = R \theta + R \operatorname{sen} \theta = R \omega t + R \operatorname{sen} \omega t$$

$$y = R + R \cos \theta = R + R \cos \omega t$$

Con lo cual, el vector de posición de P será

$$\vec{r} = R(\omega t + \operatorname{sen} \omega t) \vec{i} + R(1 + \cos \omega t) \vec{j}$$

pudiéndose obtener a partir de ésta, los vectores que nos piden, así

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = R(\omega + \omega \cos \omega t) \vec{i} + R(-\omega \operatorname{sen} \omega t) \vec{j} =$$

$$= R \omega [(1 + \cos \omega t) \vec{i} - \operatorname{sen} \omega t \vec{j}]$$

que para  $t = 1$

$$\vec{v}_1 = \frac{\pi R}{2} (\vec{i} - \vec{j}) \text{ m/s}$$

y la aceleración

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = R w \left[ -w \text{ sen } wt \vec{i} - w \text{ cos } wt \vec{j} \right] = -R w^2 (\text{sen } wt \vec{i} + \text{cos } wt \vec{j})$$

que para  $t = 1$

$$\vec{a}_1 = -\frac{R \pi^2}{4} \vec{i} \text{ m/s}^2$$

Las componentes intrínsecas de la aceleración para ese instante  $t = 1$  son:

$$a_T = \frac{d|\vec{v}|}{dt} = R w \frac{-2w \text{ sen } wt}{2\sqrt{2(1 + \text{cos } wt)}} = -R w^2 \frac{\text{sen } wt}{\sqrt{2(1 + \text{cos } wt)}}$$

donde  $v = R w \sqrt{2(1 + \text{cos } wt)}$ ; para  $t = 1$

$$a_{T_1} = -\frac{R \pi^2}{\sqrt{2}} = -\frac{R \pi^2}{4\sqrt{2}}$$

y puesto que la aceleración total es  $|\vec{a}_1| = R \pi^2 / 4$ , la componente normal será

$$a_{N_1} = \sqrt{a_1^2 - a_{T_1}^2} = \frac{R \pi^2}{4\sqrt{2}}$$

Una vez conocidas la velocidad y la aceleración normal, el radio de curvatura se puede determinar directamente a partir de la ecuación (5.8)

$$\rho = \frac{v_1^2}{a_{N_1}}$$

y, sustituyendo valores

$$\rho = \frac{2\pi R^2}{4} = \frac{4\sqrt{2}}{R\pi^2} = 2R\sqrt{2}$$

### 5.3. Cinemática de sistemas

En general se entiende como sistema de puntos a todo conjunto de puntos referidos a un cierto sistema de referencia.

En este sentido la Cinemática de sistemas trata de describir el movimiento de los mismos, que consiste en describir el movimiento de todos y cada uno de los puntos que integran al sistema.

Ahora bien, en ocasiones, los movimientos de los distintos puntos del sistema están relacionados entre sí, en cuyo caso basta conocer el movimiento de algunos de sus puntos para quedar determinados el de todos los demás. Tal es el caso de los sistemas indeformables que constituyen el modelo geométrico de lo que en Mecánica se denominan sólidos rígidos.

Un sistema indeformable se caracteriza por que la distancia entre cualquier par de puntos del sistema permanece constante. En base a esta propiedad se puede demostrar que las velocidades de todos sus puntos se conocen en un cierto instante, si en dicho instante se conocen las velocidades de tres de sus puntos no alineados o bien se conoce la velocidad de uno de sus puntos y el vector rotación instantánea del sistema que es un vector libre que en ese instante representa el giro del sistema alrededor de un cierto eje denominado eje instantáneo de rotación.

Llamando  $A$  al punto cuya velocidad se conoce  $\vec{v}_A$  y  $\vec{\Omega}$  al vector rotación del sólido en ese instante, la velocidad de un punto cualquiera del sistema es

$$\vec{v}_P = \vec{v}_A + \overrightarrow{PA} \times \vec{\Omega} \quad (5.18)$$

expresión que da la distribución de velocidades del sistema indeformable y de la cual se omite su deducción por el poco uso que en este texto se hace en los temas posteriores



# CAPÍTULO 6

## CINEMÁTICA DEL MOVIMIENTO RELATIVO

### 6.1. Introducción

En el capítulo anterior se ha estudiado la Cinemática del punto y de los sistemas considerando que éstos se movían respecto de un sistema que se tomaba invariablemente fijo. Sin embargo, en ocasiones interesa conocer el movimiento que un cierto sistema de puntos presenta respecto de un sistema de referencia que no permanece fijo sino que a su vez se mueve respecto de otro que se considera fijo.

Este es el objeto del presente capítulo, en el que hay que hacer notar que su ámbito de aplicación excluye el estudio de los movimientos de las partículas cuyas velocidades son comparables con la de la luz.

En el estudio de todo movimiento relativo intervienen siempre, al menos, dos sistemas de referencia a los que se denominan, fijo  $O_1(x_1, y_1, z_1)$  y móvil  $O(x, y, z)$ , que como su nombre indica se mueve respecto del primero.

### 6.2. Composición de velocidades

Sean los sistemas móvil,  $O$ , y fijo,  $O_1$ , representados en la figura 6.1 y  $P$  un punto cualquiera.

Evidentemente el movimiento de  $P$  se puede describir refiriéndolo al sistema móvil o al sistema fijo.

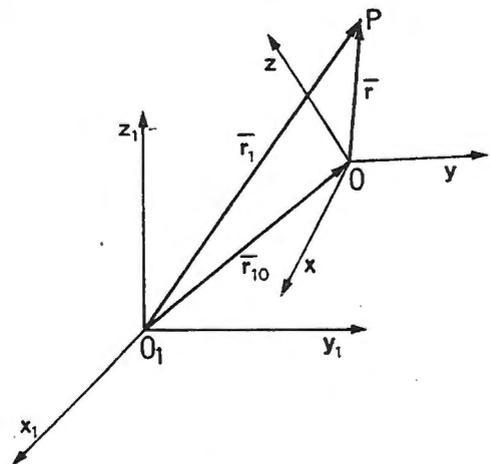


Fig. 6.1

Se estudiará el movimiento según los supuestos de que se conocen el movimiento del punto respecto al sistema móvil y el movimiento de éste respecto del fijo y del que se pretende obtener el movimiento del punto P respecto del sistema fijo.

En todo instante, tal y como se indica en la figura 6.1, se cumple que

$$\vec{r}_1 = \vec{r}_{10} + \vec{r} \tag{6.1}$$

Denominando por  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  e  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  a las ternas de referencias asociadas respectivamente al sistema fijo y móvil, la igualdad vectorial (6.1) se escribe como

$$\vec{r}_1 = x_{10} \vec{i}_1 + y_{10} \vec{j}_1 + z_{10} \vec{k}_1 + x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k} \tag{6.2}$$

donde  $(x_{10}, y_{10}, z_{10})$  y  $(x, y, z)$  son las respectivas coordenadas del punto P en los sistemas fijo y móvil.

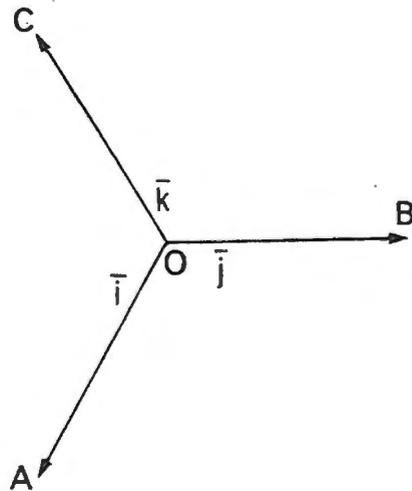
Derivando esta expresión respecto al tiempo, es

$$\dot{\vec{r}}_1 = \dot{\vec{v}}_1 = \dot{x}_{10} \vec{i}_1 + \dot{y}_{10} \vec{j}_1 + \dot{z}_{10} \vec{k}_1 + \dot{x} \vec{i} + \dot{y} \vec{j} + \dot{z} \vec{k} + x \dot{\vec{i}} + y \dot{\vec{j}} + z \dot{\vec{k}} \tag{6.3}$$

ya que la terna de vectores  $(\vec{i}_1, \vec{j}_1, \vec{k}_1)$  es fija mientras que la  $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$  es móvil, es decir se mueve con el sistema O.

Las derivadas respecto del tiempo de los vectores unitarios móviles,  $\dot{\vec{i}}, \dot{\vec{j}}, \dot{\vec{k}}$ , vienen dadas por

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{i}}{dt} &= \frac{d(\vec{OA})}{dt} = \vec{v}_A - \vec{v}_O \\ \frac{d\vec{j}}{dt} &= \frac{d(\vec{OB})}{dt} = \vec{v}_B - \vec{v}_O \end{aligned} \tag{6.4}$$



**Fig. 6.2**

$$\frac{d\vec{k}}{dt} = \frac{d(\vec{OC})}{dt} = \vec{v}_C - \vec{v}_O$$

en cuyos segundos miembros  $\vec{v}_A, \vec{v}_B, \vec{v}_C$  y  $\vec{v}_O$  representan los vectores velocidad instantánea de los puntos A, B, C y O respectivamente, y que son solidarios o fijos al sistema móvil, por lo que su distribución de velocidades es la dada por (5.18) lo que permite escribir

$$\begin{aligned}\dot{\vec{i}} &= \vec{v}_A - \vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OA} = \vec{\omega} \times \vec{i} \\ \dot{\vec{j}} &= \vec{v}_B - \vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OB} = \vec{\omega} \times \vec{j} \\ \dot{\vec{k}} &= \vec{v}_C - \vec{v}_O = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OC} = \vec{\omega} \times \vec{k}\end{aligned}\tag{6.5}$$

donde  $\vec{\omega}$  representa la rotación instantánea del sistema móvil respecto del fijo.

Teniendo en cuenta que el último término de la ecuación vectorial (6.3) es  $x\dot{\vec{i}} + y\dot{\vec{j}} + z\dot{\vec{k}}$  y de acuerdo con los valores obtenidos en (6.5) resulta

$$\begin{aligned}\dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} &= x(\vec{\omega} \times \vec{i}) + y(\vec{\omega} \times \vec{j}) + z(\vec{\omega} \times \vec{k}) = \\ &= (\vec{\omega} \times x\vec{i}) + (\vec{\omega} \times y\vec{j}) + (\vec{\omega} \times z\vec{k}) = \vec{\omega} \times \overrightarrow{OP} = \vec{\omega} \times \vec{r}\end{aligned}\tag{6.6}$$

y con ello, la expresión de la velocidad resulta

$$\vec{v}_1 = \dot{x}_{10}\vec{i}_1 + \dot{y}_{10}\vec{j}_1 + \dot{z}_{10}\vec{k}_1 + \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + \vec{\omega} \times \vec{r}\tag{6.7}$$

En base a esta composición de velocidades se definen dos movimientos ficticios de gran utilidad para el cálculo, que son:

- a) **Movimiento relativo**, es el del punto P, suponiendo que los ejes móviles OXYZ, no se mueven respecto de los fijos  $O_1X_1Y_1Z_1$ , es decir, en el que son constantes  $\vec{r}_{10}, \vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ .

Por lo tanto la velocidad y aceleración de P en este movimiento serán:

$$\text{Velocidad relativa} = \vec{v}_r = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k}\tag{6.8}$$

$$\text{Aceleración relativa} = \vec{a}_r = \ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k}\tag{6.9}$$

b) **Movimiento de arrastre**, es el del punto P, unido rigidamente a los ejes móviles OXYZ, cuando estos se mueven respecto a los fijos  $O_1X_1Y_1Z_1$ , es decir en el que son constantes x, y, z.

Por lo tanto la velocidad y la aceleración de P en este movimiento serán:

$$\text{Velocidad de arrastre} = \bar{v}_{Pa} = \dot{x}_{10}\bar{i}_1 + \dot{y}_{10}\bar{j}_1 + \dot{z}_{10}\bar{k}_1 + x\dot{\bar{i}} + y\dot{\bar{j}} + z\dot{\bar{k}} \quad (6.10)$$

$$\text{Aceleración de arrastre} = \bar{a}_{Pa} = \ddot{x}_{10}\bar{i}_1 + \ddot{y}_{10}\bar{j}_1 + \ddot{z}_{10}\bar{k}_1 + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} \quad (6.11)$$

Sustituyendo estos resultados en la expresión de  $\bar{v}_1$  resulta:

$$\bar{v}_P = \bar{v}_{Pr} + \bar{v}_{Pa} \quad (6.12)$$

Lo que pone de manifiesto que la velocidad absoluta del punto P, es decir, la del movimiento de P respecto del sistema fijo, en cada instante se puede considerar como suma de la que tiene P respecto del sistema móvil (considerado éste como fijo) más la que tendría el punto P respecto del fijo considerando a P solidario en el móvil.

### **6.3. Composición de aceleraciones. Teorema de Coriolis**

Derivando la expresión (6.3) de las velocidades, respecto al tiempo se obtiene la relación vectorial de aceleraciones que es

$$\begin{aligned} \frac{d\bar{v}_1}{dt} = \bar{a}_1 = & \ddot{x}_{10}\bar{i}_1 + \ddot{y}_{10}\bar{j}_1 + \ddot{z}_{10}\bar{k}_1 + \ddot{x}\bar{i} + \ddot{y}\bar{j} + \ddot{z}\bar{k} + \\ & + 2(\dot{x}\dot{\bar{i}} + \dot{y}\dot{\bar{j}} + \dot{z}\dot{\bar{k}}) + x\ddot{\bar{i}} + y\ddot{\bar{j}} + z\ddot{\bar{k}} \end{aligned} \quad (6.13)$$

cuyos términos se pasan a analizar:

De acuerdo con las (6.9) y (6.11), los términos

$$\ddot{x} \bar{i} + \ddot{y} \bar{j} + \ddot{z} \bar{k} = \bar{a}_r \quad (6.14)$$

y

$$\ddot{x}_{10} \bar{i}_1 + \ddot{y}_{10} \bar{j}_1 + \ddot{z}_{10} \bar{k}_1 + x \ddot{\bar{i}} + y \ddot{\bar{j}} + z \ddot{\bar{k}} = \bar{a}_a \quad (6.15)$$

representan respectivamente las aceleraciones relativas y de arrastre del movimiento compuesto antes estudiado. Además el segundo miembro de la (6.15) se puede expresar en función del vector aceleración angular, en  $\bar{v}_e = \dot{\bar{w}}$ , del sólido ya que

$$\ddot{\bar{i}} = \frac{d\dot{\bar{i}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{w} \times \bar{i}) = \bar{\alpha} \times \bar{i} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{i})$$

$$\ddot{\bar{j}} = \frac{d\dot{\bar{j}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{w} \times \bar{j}) = \bar{\alpha} \times \bar{j} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{j}) \quad (6.16)$$

$$\ddot{\bar{k}} = \frac{d\dot{\bar{k}}}{dt} = \frac{d}{dt}(\bar{w} \times \bar{k}) = \bar{\alpha} \times \bar{k} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{k})$$

con lo que el término  $x \ddot{\bar{i}} + y \ddot{\bar{j}} + z \ddot{\bar{k}}$  resulta

$$x \ddot{\bar{i}} + y \ddot{\bar{j}} + z \ddot{\bar{k}} = \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r})$$

y la expresión de la aceleración de arrastre queda

$$\bar{a}_a = \bar{a}_o + \bar{w} \times (\bar{w} \times \bar{r}) + \bar{\alpha} \times \bar{r} \quad (6.17)$$

donde  $\bar{a}_o$  representa la aceleración del punto 0 (origen del sistema móvil) respecto del sistema fijo.

Finalmente, el término  $2(\dot{x} \dot{\bar{i}} + \dot{y} \dot{\bar{j}} + \dot{z} \dot{\bar{k}})$ , teniendo en cuenta las expresiones (6.5) se puede escribir como

$$2(\dot{x} \dot{\bar{i}} + \dot{y} \dot{\bar{j}} + \dot{z} \dot{\bar{k}}) = 2(\bar{w} \times \bar{v}_r) \quad (6.18)$$

al que se denomina aceleración complementaria o de Coriolis, y que por no pertenecer a ninguno de los movimientos antes descritos (relativo y de arrastre), requiere un comentario aparte.

En efecto, la aceleración de Coriolis es un sumando de la aceleración absoluta del punto P, en la que cabe distinguir dos casos, siempre dentro del general de  $\vec{\omega} \neq \vec{0}$  y  $\vec{v}_r \neq \vec{0}$  simultáneamente, a saber:

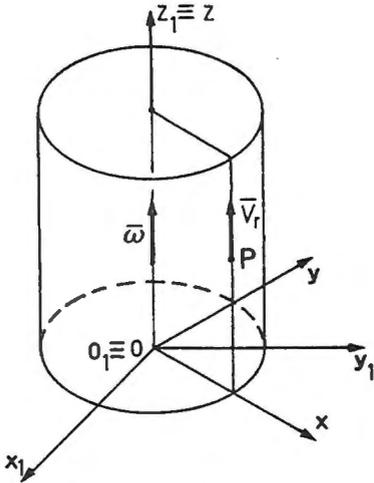


Fig. 6.3

- a) Si  $\vec{\omega}$  es paralela a  $\vec{v}_r$  la aceleración de Coriolis es nula. Así, por ejemplo, en el caso del movimiento de un punto P a lo largo de la generatriz de un cilindro que gira con una velocidad  $\vec{\omega}$  alrededor de su eje.

Eligiendo los sistemas fijo y móvil indicados en la figura (6.3), los vectores  $\vec{\omega}$  y  $\vec{v}_r$  son respectivamente:  $\vec{\omega} = \omega \vec{k}$ ,  $\vec{v}_r = v_r \vec{k}$  y por tanto la aceleración complementaria es nula.

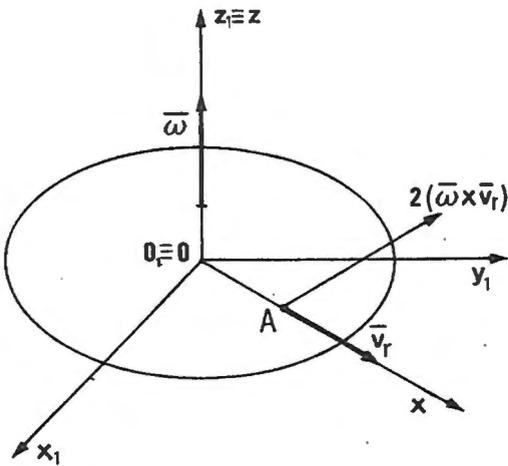


Fig. 6.4

- b) Si  $\vec{\omega}$  no es paralela a  $\vec{v}_r$  la aceleración de Coriolis no es nula. Para ver su significado físico, consideremos un ejemplo similar al anterior, pero en éste el punto que se mueva sobre una plataforma y en la dirección del radio de la misma. Evidente el punto al recorrer un radio de la plataforma aún con velocidad constante,  $\vec{v}_r$ , va variando el radio OA, de manera que si lo recorre en el sentido indicado en la figura 6.4, dicho radio aumentará y por tanto,

aunque  $\bar{\omega}$  sea constante la velocidad de P también aumentará, lo que se traduce en un término de la aceleración que es el de Coriolis.

Con todo ello, por tanto, la expresión de la aceleración de un punto P viene definitivamente dada por

$$\bar{a}_p = \bar{a}_o + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + \bar{\alpha} \times \bar{r} + \bar{a}_r + 2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r) \quad (6.19)$$

que será la que se aplique a problemas concretos.

### Ejemplo 6.1

Un sistema cartesiano OXYZ es móvil con relación a otro fijo  $O_1X_1Y_1Z_1$  quedando definido su movimiento de la siguiente forma. El origen móvil O se desplaza en el sentido positivo del semieje  $O_1X_1$  con velocidad constante  $\underline{v}$ . Un punto fijo B en el semieje OY a distancia "b" del O se desliza por el eje  $O_1Z_1$ . El triedro móvil gira con velocidad angular  $\underline{\omega}$  en el mismo sentido que el de las agujas del reloj alrededor del eje OY.

Determinar la velocidad absoluta de un punto P que desliza con velocidad constante  $\underline{u}$  en sentido positivo del eje OX, en el instante en que éste se encuentra en el plano  $z_1 = 0, y_1 = 0$ , y O dista de  $O_1$  una distancia "a". Condiciones iniciales: en  $t = 0, O \equiv O_1; P \equiv 0$ .

Para la obtención del vector velocidad absoluta, de acuerdo con los ejes elegidos que se dibujan en la figura, aplicaremos la expresión de la velocidad deducida teóricamente

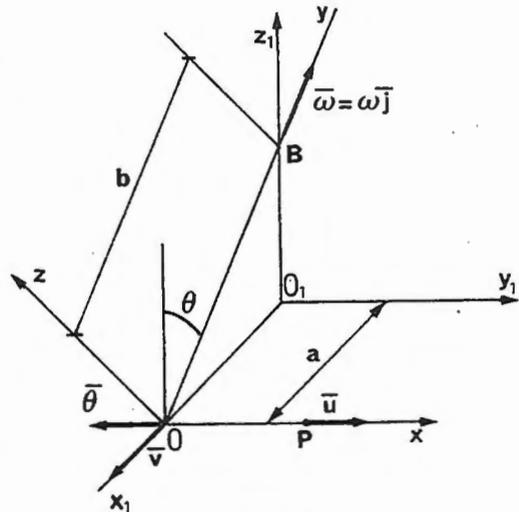


Fig. 6.5

$$\vec{v}_p = \vec{v}_o + \vec{\Omega} \times \vec{r} + \vec{v}_r \quad (1)$$

donde los vectores que intervienen, son

$$\vec{v}_o = v \vec{i}_1 \quad (2)$$

$$\vec{\Omega} = w \vec{j} - \dot{\theta} \vec{j}_1, \quad \text{y puesto que } \vec{j} = -\text{sen } \theta \vec{i}_1 + \text{cos } \theta \vec{k}_1, \\ \text{queda, } \vec{\Omega} = w \text{sen } \theta \vec{i}_1 - \dot{\theta} \vec{j}_1 + w \text{cos } \theta \vec{k}_1 \quad (3)$$

$$\vec{r} = u t \vec{j}_1 \quad (4)$$

$$\vec{v}_r = u \vec{j}_1 \quad (5)$$

Las (2), (4) y (5) están particularizadas para la posición que nos piden, mientras que la (3) es la expresión genérica de  $\vec{\Omega}$  en función de  $w$ ,  $\theta$  y  $\dot{\theta}$ . Teniendo en cuenta la figura, para particularizar la (3) tendremos que

$$\text{sen } \theta = \frac{vt}{b} \quad \text{y} \quad \text{cos } \theta = \sqrt{1 - \text{sen}^2 \theta} = \frac{1}{b} \sqrt{b^2 - v^2 t^2} \quad (6)$$

y el valor de  $\dot{\theta}$  lo obtendremos derivando la primera de las (6), con respecto al tiempo

$$\text{cos } \theta \dot{\theta} = \frac{v}{b} \rightarrow \dot{\theta} = \frac{v}{b \text{cos } \theta} = \frac{v}{\sqrt{b^2 - v^2 t^2}} \quad (7)$$

Las expresiones (6) y (7) particularizadas para la posición que nos piden en el problema son, teniendo en cuenta que  $v t = a$ ,

$$\text{sen } \theta = \frac{a}{b}; \quad \text{cos } \theta = \frac{\sqrt{b^2 - a^2}}{b}; \quad \dot{\theta} = \frac{v}{\sqrt{b^2 - a^2}} \quad (8)$$

que llevadas a (3), dan para la velocidad angular

$$\vec{\Omega} = -w \frac{a}{b} \vec{i}_1 - \frac{v}{\sqrt{b^2 - a^2}} \vec{j}_1 + \frac{w}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \vec{k}_1 \quad (9)$$

y con el valor de  $\bar{r}$ , dados por la (4), se obtiene el término

$$\bar{\Omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i}_1 & \bar{j}_1 & \bar{k}_1 \\ \frac{wa}{b} & -\frac{v}{\sqrt{b^2 - a^2}} & \frac{w}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \\ 0 & ut & 0 \end{vmatrix} = -\frac{uwt}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \bar{i}_1 - \frac{uwta}{b} \bar{k}_1 \quad (10)$$

Sustituyendo la (2), (5) y (10) en la (1), obtenemos para la velocidad absoluta de P, en el instante t que nos piden:

$$\begin{aligned} \bar{v}_p &= v \bar{i}_1 - \frac{uwt}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \bar{i}_1 - \frac{uwta}{b} \bar{k}_1 + u \bar{j}_1 = \\ & \left( v - \frac{uwt}{b} \sqrt{b^2 - a^2} \right) \bar{i}_1 + u \bar{j}_1 - \frac{uwta}{b} \bar{k}_1 \end{aligned} \quad (11)$$

#### 6.4. Movimiento relativo en el plano. Aplicación de polares planas

El tratamiento del estudio del movimiento relativo en el plano sigue el mismo procedimiento que el estudiado para el espacio.

Si se elige como plano del movimiento el OXY, evidentemente los vectores velocidad, y aceleración lineales estarán contenidos en el plano, mientras que los vectores velocidad y aceleración angulares serán normales a dicho plano y por tanto únicamente tendrán componentes en OZ, lo que, en general, facilita el estudio

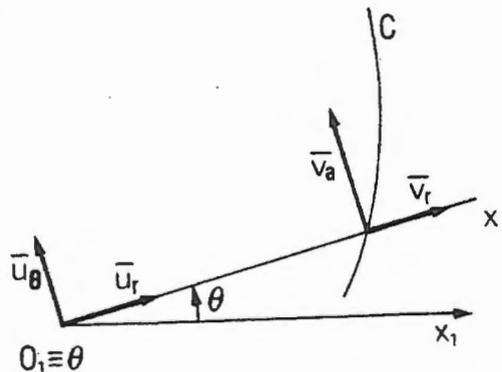


Fig. 6.6

También en este caso se pueden utilizar las coordenadas polares planas así como las expresiones de su velocidad y aceleración estudiadas en el capítulo anterior. Así, si se eligen como ejes fijos el que tiene su origen en el polo  $O$  y eje  $OX_1$ , coincidente con la semirrecta polar del sistema, y como ejes móviles de modo que el origen coincida con el del fijo y la semirrecta  $OX$  pase siempre por el punto  $P$  cuyo movimiento se pretende estudiar, y que describe la trayectoria  $C$ , resulta que la velocidad angular del sistema móvil respecto del fijo es

$$\bar{\omega} = \dot{\theta} \bar{u}_z \tag{6.20}$$

donde  $\bar{u}_z$  es el vector unitario que completa la terna dextrógira  $(\bar{u}_r, \bar{u}_\theta, \bar{u}_z)$ .

La velocidad relativa del punto  $P$  vendría dada por la variación de  $r$  respecto del tiempo ( $\dot{r}$ ) ya que en el sistema móvil elegido la trayectoria del punto  $P$  sería rectilínea (sobre la semirrecta  $OX$ ).

La velocidad de arrastre vendría dada para la debida al giro de  $OX$  alrededor de  $\bar{u}_z$  considerando que  $r$  es constante en ese instante, es decir  $(r\dot{\theta})$ .

La velocidad absoluta de  $P$ , por tanto vendría dada por

$$\bar{v}_o = \bar{v}_r + \bar{v}_a = \dot{r} \bar{u}_r + r \dot{\theta} \bar{u}_\theta \tag{6.21}$$

que al compararla con la expresión (5.12) de la velocidad en coordenadas polares resulta que la componente radial de aquella corresponde a la velocidad relativa y la tangencial o transversal a la velocidad de arrastre. Esta cuantificación hace que el empleo de las coordenadas polares planas sea especialmente adecuado a un cierto tipo de aplicaciones de movimientos planos.

Del mismo modo, en el vector aceleración se puede hacer una cuantificación semejante. Así, recordando la expresión de dicho vector en polares (5.17)

$$\bar{a}_p = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \bar{u}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \bar{u}_\theta$$

resulta que, el término  $\ddot{r}$  corresponde a la aceleración relativa. Asimismo, el término  $r\ddot{\theta} - r\dot{\theta}^2 \bar{u}_r$  corresponden respectivamente a los términos vectoriales  $(\bar{\alpha} \times \bar{r})$  y  $\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$  respectivamente, y que pertenecen al término de la aceleración de arrastre.

Finalmente, el término  $2\dot{r}\dot{\theta}\bar{u}_\theta$  corresponde a la aceleración complementaria o de Coriolis.

**Ejemplo 6.2**

Sobre una varilla OA que gira alrededor de O con velocidad angular  $w = \pi \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} = \text{cte}$  se mueve un punto P, de modo que su distancia a O está dada por la ecuación  $s = a(t^2 + 2t + 3)$ , donde a es una constante y t el tiempo expresado en segundos.

Si suponemos que en  $t = 0$ , P se encontraba a 6 m de O, y la varilla OA coincidía con la dirección de OX, se pide en el instante  $t = 3 \text{ s}$ :

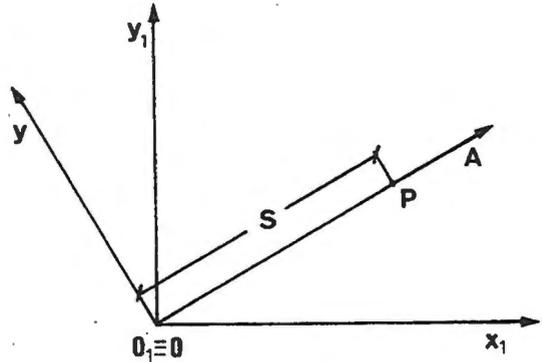


Fig. 6.7

1) Vectores velocidad absoluta y relativa de P al cabo de 2 segundos.

2) Vectores aceleración absoluta, de arrastre, relativa y complementaria.

Elegiremos el sistema de referencia fijo  $O_1X_1Y_1$  de modo que  $O_1$  coincide con el extremo de la varilla que hace de centro de giro, y el sistema móvil de modo que  $O = O_1$  y el eje OX coincida con la varilla.

En estas condiciones, el vector de posición de P, coincide en los dos sistemas puesto que O coincide con  $O_1$ , por tanto

$$\bar{r}_1 = \bar{r}$$

que al derivarla respecto del tiempo da:

$$\bar{v}_p = \bar{v}_r + \bar{w} \times \bar{r} \tag{1}$$

donde  $\vec{v}_r$ , velocidad relativa, es, expresada en el sistema móvil

$$\vec{v}_r = v_r \vec{i} = \frac{ds}{dt} \vec{i} = a(2t + 2) \vec{i}$$

y  $\vec{w} \times \vec{r}$ , es el término que representa la velocidad de arrastre, cuyo valor en el sistema móvil es

$$\vec{w} \times \vec{r} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 0 & 0 & w \\ s & 0 & 0 \end{vmatrix} = sw \vec{j}$$

por tanto la velocidad absoluta en el sistema móvil es

$$\vec{v}_p = a(2t + 2) \vec{i} + a(t^2 + 2t + 3) w \vec{j}$$

Si tenemos en cuenta las condiciones iniciales del problema, resulta:

$$\text{Para } t=0 \rightarrow s = s_0 = 3a = 6 \rightarrow a = 2$$

$$\text{Para } t=0 \rightarrow \theta = \theta_0 = 0$$

quedando

$$\vec{v}_p = 2 \left[ (2t + 2) \vec{i} + (t^2 + 2t + 3) w \vec{j} \right] = 16 \vec{i} + 36\pi \vec{j} \text{ m/s}$$

siendo

$$\vec{v}_r = 16 \vec{i} \text{ y } \vec{v}_a = 36\pi \vec{j}$$

La expresión de estos vectores en el sistema móvil es inmediata, si se tiene en cuenta que

$$\vec{i} = \cos \theta \vec{i}_1 + \sin \theta \vec{j}_1$$

$$\vec{j} = -\sin \theta \vec{i}_1 + \cos \theta \vec{j}_1$$

(2)

donde  $\theta$  para el instante que nos piden vale  $\theta = \omega t = 3\pi \text{ rad}$ .

El cálculo de los correspondientes vectores aceleración, se realiza derivando la expresión (1) respecto del tiempo

$$\bar{a}_p = \bar{a}_r + \bar{\omega} \times \bar{v}_r + \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} + \bar{\omega} \times \bar{v}_r + \bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r})$$

que agrupando términos da

$$\bar{a}_p = \bar{a}_r + \underbrace{\left( \frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} \right)}_{\bar{a}_a} + \underbrace{\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_r}_{\bar{a}_c} \quad (3)$$

donde  $\bar{a}_a$  y  $\bar{a}_c$  son las aceleraciones de arrastre y complementaria respectivamente.

Ahora bien,

$$\bar{a}_r = \frac{d^2 s}{dt^2} \bar{i} = 4\bar{i} \text{ m/s}^2;$$

$$\frac{d\bar{\omega}}{dt} \times \bar{r} = \bar{0} \text{ por ser } \bar{\omega} = \text{cte}$$

$$\bar{\omega} \times (\bar{\omega} \times \bar{r}) = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 0 & \omega r & 0 \end{vmatrix} = -\omega^2 r \bar{i}$$

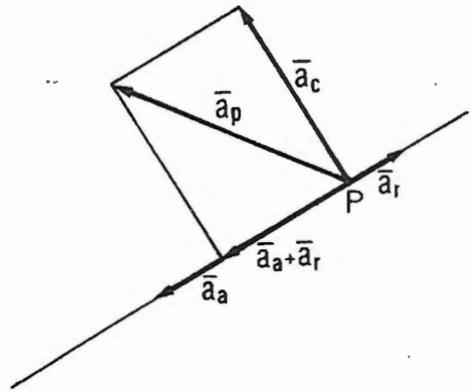


Fig.6.8

y finalmente

$$2(\bar{\omega} \times \bar{v}_r) = 2 \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ 0 & 0 & \omega \\ 2(2t+2)r & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4(2t+2)\omega \bar{j}$$

valores que particularizando para  $t = 3 \text{ s}$  y sustituidos en (3) dan

$$\bar{a}_p = (4 - 36\pi^2)\bar{i} + 32\pi\bar{j}$$

que es la aceleración absoluta de P.

# CAPÍTULO 7

## MOVIMIENTO ARMÓNICO SIMPLE

### 7.1. Introducción

Dentro del grupo de los movimientos rectilíneos presenta especial interés el vibratorio armónico simple por ser el movimiento elemental a partir del cual se puede estudiar cualquier tipo de vibración, por compleja que ésta sea, como superposición o composición de distintos armónicos simples (teorema de Fourier).

En este capítulo se estudia el movimiento armónico simple no amortiguado, desde el punto de vista cinemático, así como los casos más sencillos de composición de movimientos armónicos de la misma dirección y de direcciones perpendiculares.

Los resultados cinemáticos que aquí se obtienen se aplicarán en las lecciones posteriores de dinámica del punto material.

### 7.2. Definición y características

Un punto realiza un movimiento armónico simple alrededor de otro fijo,  $O$ , si en todo instante su distancia al punto  $O$  viene dada por la ecuación

$$x = A \operatorname{sen}(wt + \varphi) \quad (7.1)$$

donde  $x$  es la abscisa del punto sobre el eje  $OX$ , de origen el punto fijo  $O$ , y  $A$ ,  $\varphi$  y  $w$  son constantes.

A la abscisa,  $x$ , se le denomina elongación y a su valor máximo,  $A$ , amplitud. A las constantes  $w$  y  $\varphi$  se les llama respectivamente pulsación y fase inicial y al término  $(wt + \varphi)$  ángulo de fase.

La velocidad del punto se obtiene derivando la (7.1) respecto del tiempo, es decir

$$v = \dot{x} = Aw \cos(\omega t + \varphi) \quad (7.2)$$

Del mismo modo, la aceleración vale

$$a = \ddot{x} = -Aw^2 \sin(\omega t + \varphi) = -\omega^2 x \quad (7.3)$$

es decir, es proporcional a la elongación y dirigida en todo instante hacia el origen o centro de oscilación.

Una característica importante del m.a.s. es su período,  $T$ , o intervalo de tiempo transcurrido entre dos posiciones consecutivas en las que el punto presenta las mismas posiciones, velocidad y aceleración, es decir que

$$x(t) = x(t + T); \quad \dot{x}(t) = \dot{x}(t + T); \quad \ddot{x}(t) = \ddot{x}(t + T)$$

lo que exige la igualdad de los correspondientes ángulos de fase

$$2\pi + \omega t + \varphi = \omega(t + T) + \varphi$$

o sea

$$2\pi = \omega T$$

de donde

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \quad (7.4)$$

A la inversa del período se le denomina frecuencia,  $f$ , y vale

$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \quad (7.5)$$

y representa el número de oscilaciones por unidad de tiempo.

Otra forma de estudiar el m.a.s. es como el del punto proyección sobre un diámetro de otro punto ficticio que describiera un movimiento circular uniforme de radio igual a la amplitud.

En efecto, tomando como punto inicial del movimiento  $P_0$  y como origen de arcos de semieje  $OY$ , la posición de la proyección  $P$  de punto  $P_1$  que recorre la circunferencia viene dada por su abcisa que coincide con la dada en (7.1). Del mismo modo, se puede comprobar que la velocidad y aceleración de  $P$  coinciden con la dada en (7.2) y (7.3) respectivamente.

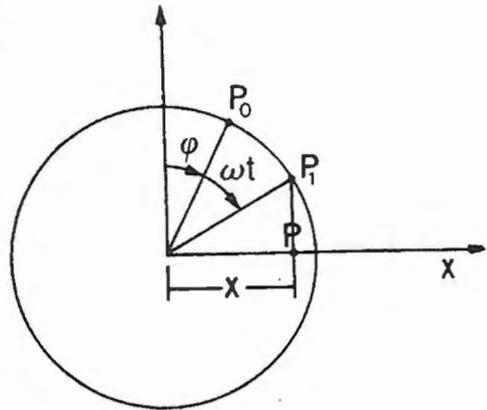


Fig. 7.1

### 7.3. Composición de dos movimientos armónicos simples de la misma dirección

Si el punto  $O$ , alrededor del cual el punto móvil  $P$  realiza un m.a.s., describe, a su vez, un movimiento armónico simple alrededor de otro fijo  $O_1$ , la posición, en cada instante del punto  $P$  respecto al fijo  $O$  viene dada por

$$x = x_1 + x_2 \tag{7.6}$$

donde  $x_1$  es la abcisa del punto  $P$  respecto al  $O$  y  $x_2$  es la abcisa del punto  $O$  respecto al  $O_1$ . Como ambos movimientos son armónicos simples la (7.6) se puede escribir como

$$x = A_1 \text{sen}(w_1 t + \phi_1) + A_2 \text{sen}(w_2 t + \phi_2) \tag{7.7}$$

Esta ecuación se puede representar geoméricamente como la proyección suma de las correspondientes proyecciones de sendos movimientos circulares uniformes de las características que se representan en la figura, en donde  $P_1$  y  $P_2$  son los

extremos de los vectores que representan cada uno de los movimientos componentes,

de modo que  $|\vec{OP}_1| = A_1$ ;  $|\vec{OP}_2| = A_2$

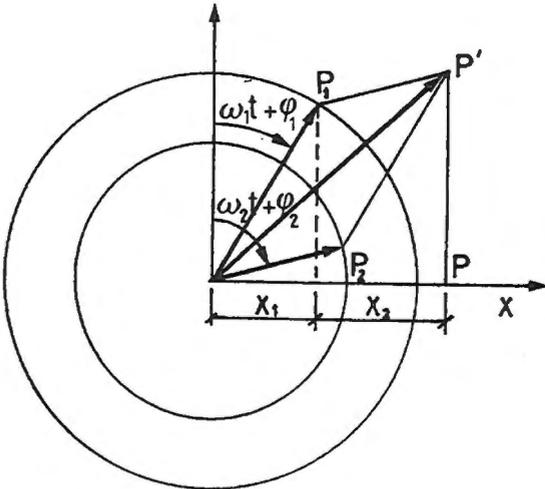


Fig. 7.2

Ahora bien, en función de las características particulares de cada uno de los movimientos componentes el movimiento resultante del punto P es de una forma o de otra. Como casos importantes particulares a estudiar son:

- a) Frecuencias y amplitudes iguales.
- b) Frecuencias iguales y amplitudes distintas.
- c) Frecuencias distintas y amplitudes iguales.

d) Frecuencias y amplitudes distintas.

Veamos cuales son las características del movimiento resultante para cada caso.

**a) Frecuencias y amplitudes iguales**

Si las frecuencias son iguales, también lo son las pulsaciones, lo que permite escribir

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega \quad \text{y} \quad A_1 = A_2 = A$$

y, con ello, la ecuación del movimiento resultante es

$$x = A [\text{sen}(\omega t + \phi_1) + \text{sen}(\omega t + \phi_2)] \tag{7.8}$$

que, teniendo en cuenta la expresión trigonométrica que da la suma de los senos de dos ángulos

$$\text{sen } a + \text{sen } b = 2 \text{sen} \frac{a+b}{2} \cdot \cos \frac{a-b}{2}$$

y, haciendo

$$a = \omega t + \varphi_1 \quad b = \omega t + \varphi_2$$

resulta

$$x = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \text{sen} \left( \omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2} \right) \quad (7.9)$$

lo que pone de manifiesto que el movimiento resultante es armónico simple, de pulsación  $\omega$ , de amplitud  $2A \cos(\varphi_1 - \varphi_2)/2$  y de fase inicial  $(\varphi_1 + \varphi_2)/2$ .

Esta conclusión se podía haber obtenido en base a la construcción geométrica dada en la figura 7.2, ya que, en estas condiciones, el paralelogramo  $OP, P'P_2$  es un rombo indeformable y su diagonal  $OP'$ , que gira con velocidad angular  $\omega$ , tiene de módulo

$$\left| \overrightarrow{OP'} \right| = 2A \cos \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2} \quad (7.10)$$

Si los movimientos componentes están en fase, se cumple que  $\varphi_1 + \varphi_2 = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) y el módulo del vector vale

$$\left| \overrightarrow{OP'} \right| = 2A \quad (7.11)$$

Si los movimientos componentes están en oposición de fase, se cumple que  $\varphi_1 + \varphi_2 = (2n + 1)\pi$  y el módulo del vector vale

$$\left| \overrightarrow{OP'} \right| = 0 \quad (7.12)$$

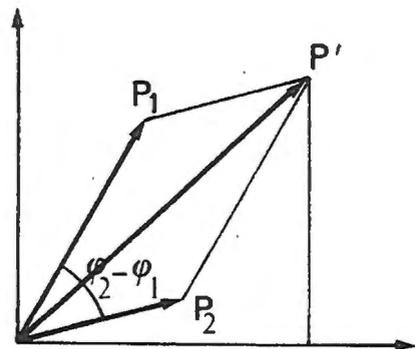


Fig. 7.3

lo que pone de manifiesto que el punto permanece fijo en el origen en todo instante.

**b) Frecuencias iguales y amplitudes distintas**

Si las frecuencias son iguales ( $w_1 = w_2 = w$ ) y las amplitudes distintas ( $A_1 \neq A_2$ ), el paralelogramo resultante sigue siendo indeformable aunque no es ya un rombo. Su amplitud es

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{7.13}$$

y su fase inicial  $\varphi$  dada por

$$\text{sen } \varphi = \frac{OP_o}{A} = \frac{A_1 \text{sen } \varphi_1 + A_2 \text{sen } \varphi_2}{\sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}} \tag{7.14}$$

Si los movimientos componentes están en fase, se cumple que  $\varphi_1 - \varphi_2 = 2\pi n$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) y el módulo del vector vale

$$\left| \overrightarrow{OP'} \right| = A_1 + A_2$$

es decir, que la amplitud toma su valor máximo.

Si los movimientos componentes están en oposición, se cumple que  $\varphi_1 - \varphi_2 = (2n + 1)\pi$  y la amplitud toma el valor mínimo

$$\left| \overrightarrow{OP'} \right| = |A_1 - A_2|$$

**c) Frecuencias distintas y amplitudes iguales**

En este caso, es  $w_1 \neq w_2$  y  $A_1 = A_2 = A$ . La ecuación del punto es

$$x = A[\text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + \text{sen}(w_2 t + \varphi_2)]$$

que procediendo de forma similar al apartado anterior resulta

$$x = 2A \cos\left(\frac{w_1 - w_2}{2} t + \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}\right) \text{sen}\left(\frac{w_1 + w_2}{2} t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right) \tag{7.15}$$

donde se observa que la amplitud del movimiento resultante ya no es constante sino que depende del tiempo.

El paralelogramo  $OP_1P_2$  es deformable y, por tanto, su diagonal  $\left| \overrightarrow{OP} \right|$  es variable.

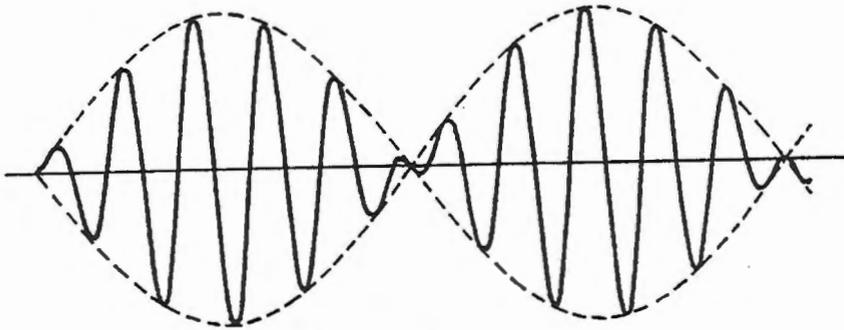


Fig. 7.4

El movimiento resultante es periódico de frecuencia  $w_1 + w_2 / 4\pi$  cuya amplitud es, a su vez una función periódica de frecuencia  $w_1 - w_2 / 4\pi$ , siempre menor que la del movimiento.

**d) Frecuencias y amplitudes distintas**

Si  $w_1 \neq w_2$  y  $A_1 \neq A_2$ , se tiene que

$$x = A_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{sen}(w_2 t + \varphi_2)$$

que al sumar y restar la cantidad  $w_1 t$  al segundo arco, se transforma en

$$x = A_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{sen}[w_1 t + (w_2 - w_1)t + \varphi_2]$$

y llamando  $\alpha$  a  $(w_2 - w_1)t + \varphi_2$ , resulta

$$x = A_1 \text{sen}(w_1 t + \varphi_1) + A_2 \text{sen}(w_1 t + \alpha) \tag{7.16}$$

que es formalmente análoga a la ecuación del caso b), por lo que se puede expresar como

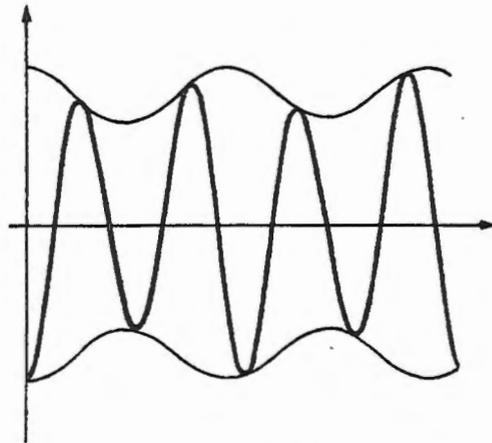
$$x = A \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi) \quad (7.17)$$

siendo

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos(\varphi_1 - \alpha) \quad (7.18)$$

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{A_1 \operatorname{sen} \varphi_1 + A_2 \operatorname{sen} \alpha}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \alpha} \quad (7.19)$$

El movimiento resultante es también periódico. Su pulsación es periódica y su amplitud es periódica no senoidal (Fig.7.5).



**Fig. 7.5**

#### ***7.4. Composición de dos movimientos armónicos simples de direcciones perpendiculares***

El movimiento de un punto sometido a la composición de dos movimientos armónicos simples de direcciones perpendiculares es tal que sus puntos proyección sobre estas direcciones perpendiculares describen movimientos armónicos simples.

En este caso, siempre será posible mediante traslación de uno de los ejes, paralelo a sí mismo, hacer coincidir los orígenes de ambos movimientos en un punto, O, que se toma como origen de coordenadas. En estas condiciones los ejes de los movimientos componentes (o proyección) coinciden con los OX e OY de coordenadas y las ecuaciones de estos movimientos serán

$$x = A \operatorname{sen}(w_1 t + \varphi_1) \quad (7.20)$$

$$y = B \operatorname{sen}(w_2 t + \varphi_2)$$

de las que se pueden estudiar, como más importantes, dos casos, a saber:

a) Si  $w_1 = w_2$

b) Si  $w_1 \neq w_2$  pero  $w_1 / w_2 = a / b$

que se pasan a desarrollar a continuación.

a) Si las pulsaciones son iguales, las ecuaciones (7.20) se transforman en

$$\begin{aligned} x &= A \operatorname{sen}(w t + \varphi_1) \\ y &= B \operatorname{sen}(w t + \varphi_2) \end{aligned} \tag{7.21}$$

que se pueden escribir también como

$$\frac{x}{A} = \operatorname{sen} w t \cos \varphi_1 + \cos w t \operatorname{sen} \varphi_1 \tag{I}$$

$$\frac{y}{B} = \operatorname{sen} w t \cos \varphi_2 + \cos w t \operatorname{sen} \varphi_2 \tag{II}$$

y que al verificar las operaciones

$$(I) \operatorname{sen} \varphi_2 - (II) \operatorname{sen} \varphi_1$$

$$(I) \cos \varphi_2 - (II) \cos \varphi_1$$

resultan

$$\frac{x}{A} \operatorname{sen} \varphi_2 - \frac{y}{B} \cos \varphi_1 = \operatorname{sen} w t \operatorname{sen}(\varphi_2 - \varphi_1)$$

$$\frac{x}{A} \cos \varphi_2 - \frac{y}{B} \cos \varphi_1 = \cos w t \operatorname{sen}(\varphi_1 - \varphi_2)$$

que al elevar al cuadrado y sumar ambas ecuaciones se obtiene

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2}{AB} x y \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \operatorname{sen}^2(\varphi_2 - \varphi_1) \tag{7.22}$$

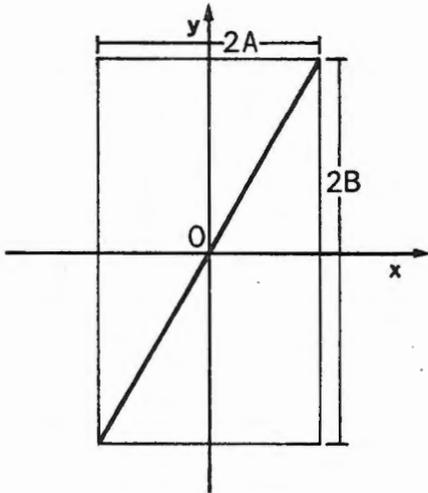


Fig. 7.6

ecuación de segundo grado que, en general, corresponde a una elipse, por lo que el movimiento se denomina vibración elíptica.

En cuanto a la forma de la elipse, viene dada por el valor particular de la diferencia de fase  $\varphi_2 - \varphi_1$  pudiéndose dar, como casos más importantes los siguientes

- a.1)  $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$  con lo que la (7.22) se reduce a

$$\left(\frac{x}{A} - \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

que es una recta doble tal y como se indica en la figura.

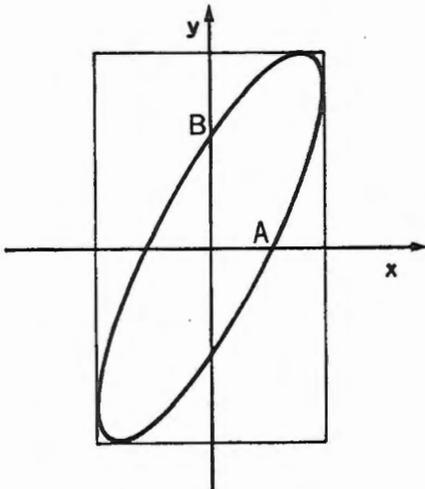


Fig. 7.7

- a.2)  $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi / 2$  que llamando a  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = -p$  resulta

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} + \frac{2xyp}{AB} = 1 - p^2$$

que es una elipse real como la indicada en la figura.

a.3)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi/2$ , la ecuación se reduce a

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$$

cuya representación se da en la figura

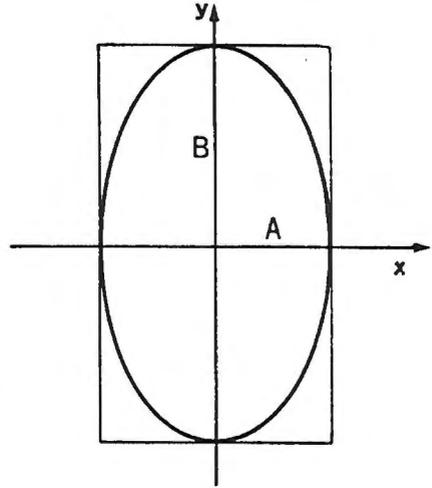


Fig. 7.8

a.4)  $\pi/2 < \varphi_2 - \varphi_1 < \pi$ , en cuyo caso llamando  $\cos(\varphi_2 - \varphi_1) = p$ , resulta como ecuación, la

$$\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} - \frac{2xy}{AB} p = 1 - p^2$$

que corresponde a la representada en la figura adjunta.

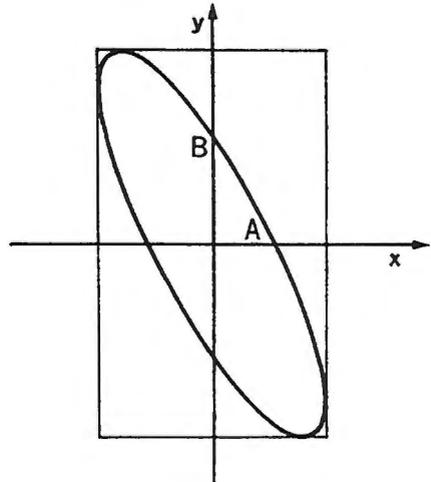


Fig. 7.9

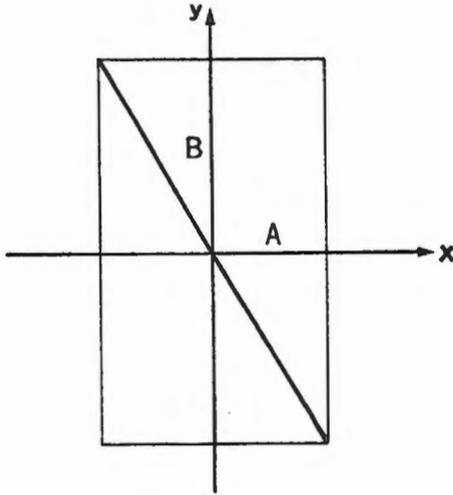


Fig. 7.10

a.5)  $\varphi_2 - \varphi_1 = \pi$ , la ecuación se reduce a

$$\left(\frac{x}{A} + \frac{y}{B}\right)^2 = 0$$

que es la recta doble representada en la figura.

b) Si  $w_1 \neq w_2$  puede todavía contemplarse dos casos, a saber

b.1)  $w_1 / w_2 = a / b$ , donde a y b son números enteros. En este caso, al cabo de un intervalo de tiempo igual al mínimo común múltiplo de los períodos de los movimientos componentes, el punto se encontrará en las mismas condiciones de posición, velocidad y aceleración que la inicial. En consecuencia la trayectoria será una curva cerrada y el movimiento será periódico. A las curvas que representan la trayectoria se las denomina curvas de Lissajous.

b.2) Si  $w_1 / w_2 \neq a / b$ , el movimiento no es periódico y por tanto su trayectoria no será una curva cerrada.

# CAPÍTULO 8

## DINÁMICA DEL PUNTO

### *8.1. Introducción*

Como se ha expuesto en el Capítulo 5, la Dinámica es la parte de la Mecánica que analiza el movimiento de los sistemas materiales atendiendo a las causas que lo producen (fuerzas).

Puesto que los conceptos de Dinámica que en el presente texto se utilizan son fundamentalmente los correspondientes a la partícula o punto material, se omitirá el estudio de los sistemas materiales así como de los temas que sólo son necesarios para el estudio de los mismos.

A efectos operacionales, se define el **punto material** como un cuerpo cuyas dimensiones geométricas son despreciables a la escala de observación, de forma que su posición en el espacio viene dada por la del punto geométrico que ocupa.

Se denomina **sistema de puntos materiales** a un conjunto de puntos materiales. Su posición con respecto a un sistema de referencia dado viene determinada por los correspondientes vectores de posición  $\vec{r}_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Si el sistema material es tal que las distancias entre todos sus puntos permanecen constantes, el sistema se llama **indeformable**. Si además es continuo, constituye lo que se denomina sólido rígido.

### *8.2. Fuerza. Axiomas de la Mecánica Clásica*

Los axiomas que a continuación se establecen constituyen la base de la Mecánica Clásica. Aunque su enunciado corresponde al punto material, resulta sencillo, en base a éstos, generalizar los resultados a cualquier tipo de sistema material.

Estos axiomas tienen su base conceptual en las leyes enunciadas por Newton, aunque su formalismo incluye el concepto de punto material, introducido posteriormente por Euler, lo que permite una sistematización de la Mecánica bastante sencilla, sin necesidad de recurrir a otros conceptos complementarios:

**Primer axioma:** Toda partícula libre de cualquier influencia conserva su estado de reposo o de movimiento rectilíneo uniforme.

En este axioma aparece implícitamente un concepto cualitativo de fuerza como la causa capaz de alterar el estado de movimiento de un punto material. Concretamente define la fuerza nula como la que actúa sobre una partícula que se encuentra en reposo o con movimiento uniforme.

**Segundo axioma:** Sean dos puntos materiales, A y B, aislados del resto del Universo. La influencia que A ejerce sobre B, y la que B ejerce sobre A, son magnitudes vectoriales (denominadas fuerzas,  $\vec{F}_{AB}$  y  $\vec{F}_{BA}$  respectivamente) siendo iguales en módulo y dirección, y de sentidos contrarios.

**Tercer axioma:** Toda partícula sobre la que actúa una fuerza  $\vec{F}$  se mueve de forma que su aceleración es proporcional a la fuerza

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{8.1}$$

donde  $m$  es una constante positiva que cuantifica la cantidad de materia que constituye la partícula. Recibe el nombre de masa y determina el comportamiento dinámico de las partículas cuando interaccionan entre sí.

La ecuación (8.1), denominada ecuación fundamental de la dinámica, establece la definición de fuerza a partir de la masa de la partícula y de su aceleración. En el Sistema Internacional la ecuación de dimensiones de la fuerza es  $[F] = MLT^{-2}$  y su unidad el newton ( $1N = 1kg\ m\ s^{-2}$ ).

Para que el concepto de fuerza que actúa sobre una partícula quede claramente determinado es preciso indicar con respecto a qué sistema de referencia se mide su aceleración y, por tanto, la fuerza que la provoca. De ahora en adelante, y salvo que se indique lo contrario, se utilizarán los sistemas de referencia **inerciales**, que se definen como sigue.

Sea un punto material, P, absolutamente aislado en el espacio, es decir, sometido a una fuerza nula. Se denomina inercial a cualquier sistema de referencia (O; X,Y,Z) en el cual la velocidad de dicho punto sea constante. Evidentemente, si un sistema es inercial, también lo es cualquier otro que se mueva con respecto a éste con movimiento de traslación uniforme.

En definitiva, un sistema de referencia inercial es aquel en el cual resultan válidos los axiomas de la Mecánica antes enunciados, de forma que las fuerzas medidas en ellos representan, intrínsecamente, la interacción ejercida sobre un punto.

### 8.3. Cantidad de movimiento. Impulso

Se denomina **cantidad de movimiento** de un punto material,  $\vec{P}$ , al vector producto de su masa por su velocidad:

$$\vec{P} = m \vec{v} \quad (8.2)$$

Su ecuación de dimensiones, en el SI, es  $[p] = MLT^{-1}$ , y la unidad en el SI es el  $kg \, ms^{-1}$ , que no recibe un nombre especial.

Si sobre la partícula actúa una fuerza  $\vec{F}$ , según (8.1) es

$$\vec{F} = m \vec{a} = m \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad (8.3)$$

es decir, la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula es igual a la derivada, con respecto al tiempo de su cantidad de movimiento.

Se define el **impulso** de una fuerza  $\vec{F}$ , que actúa durante un intervalo de tiempo  $[t_A, t_B]$ ,  $\vec{I}$ , como

$$\vec{I} = \int_{t_A}^{t_B} \vec{F} dt \quad (8.4)$$

Evidentemente, el impulso tiene dimensiones de cantidad de movimiento.

A partir de la definición del impulso, y sustituyendo en ella la ecuación (8.3) resulta

$$\bar{\mathbf{I}} = \int_{t_A}^{t_B} \frac{d\bar{\mathbf{p}}}{dt} dt = \int_{t_A}^{t_B} d\bar{\mathbf{p}} = \bar{\mathbf{P}}_A - \bar{\mathbf{P}}_B \quad (8.5)$$

ecuación que constituye el llamado teorema del impulso: “El impulso de las fuerzas que actúan sobre una partícula, durante un intervalo de tiempo, es igual al incremento de la cantidad de movimiento del punto en ese intervalo”.

### 8.4. Momento cinético. Teorema del momento cinético

Sea una partícula de masa  $m$  y un punto fijo  $O$ . Se llama **momento cinético** de la partícula respecto al punto  $O$ , al momento respecto de  $O$  de su cantidad de movimiento

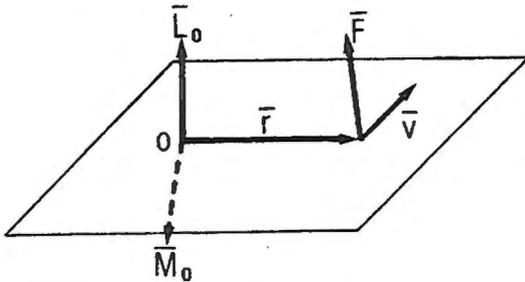


Fig. 8.1

$$\bar{\mathbf{L}}_o = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{p}} = m\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{v}} \quad (8.6)$$

Teniendo en cuenta que tanto  $\bar{\mathbf{r}}$  como  $\bar{\mathbf{v}}$  son, en general, funciones del tiempo, es evidente que  $\bar{\mathbf{L}}_o$  también depende de  $t$ . Calculemos su derivada temporal

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}_o}{dt} = m \frac{d\bar{\mathbf{r}}}{dt} \times \bar{\mathbf{v}} + m\bar{\mathbf{r}} \times \frac{d\bar{\mathbf{v}}}{dt}$$

Ahora bien, el primer término de la expresión anterior es nulo ( $\bar{\mathbf{v}} \cdot \bar{\mathbf{v}} = \bar{0}$ ), obteniéndose

$$\frac{d\bar{\mathbf{L}}_o}{dt} = m\bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{r}} \times \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{M}}_o \quad (8.7)$$

donde  $\bar{\mathbf{F}}$  es la fuerza que actúa sobre la partícula y  $\bar{\mathbf{M}}_o$  es su momento con respecto a  $O$ . La ecuación (8.7) constituye una expresión del teorema del momento cinético: “La derivada con respecto al tiempo del momento cinético” de una partícula respecto a un punto  $O$ , fijo, es igual al momento respecto a  $O$  de la resultante de las fuerzas que actúan sobre la partícula.

Si la partícula está sometida a una **fuerza central**, esto es, a una fuerza cuya línea de acción pasa constantemente por un punto fijo  $O$ , el teorema del momento cinético proporciona una integral primera de las ecuaciones del movimiento. En efecto, en este caso es

$$\bar{M}_o = \frac{d\bar{L}_o}{dt} = 0$$

que integrada da lugar a

$$\bar{L}_o = m\bar{r} \times \bar{v} = cte \quad (8.8)$$

es decir, si el momento de las fuerzas que actúan sobre la partícula es nulo, entonces el momento cinético se conserva. En este caso, la trayectoria de la partícula está contenida en el plano que pasa por  $O$  y es perpendicular a  $\bar{L}_o$ . En efecto, multiplicando (8.8) escalarmente por el vector de posición con respecto a  $O$ ,  $\bar{r}$ , resulta

$$\bar{r} \cdot \bar{L}_o = \bar{r} \cdot (m\bar{r} \times \bar{v}) = 0 \quad (8.9)$$

ecuación de un plano que pasa por  $O$  y es perpendicular a  $\bar{L}_o$ .

Por otra parte, y siempre bajo el supuesto de fuerzas centrales, el módulo del producto  $\bar{r} \times \bar{v}$  tiene una interpretación geométrica interesante. En efecto, el espacio recorrido por la partícula en un tiempo  $dt$  es  $d\bar{r} = \bar{v} dt$ , y el área barrida por el radio vector  $\bar{r}$ , durante ese tiempo (Fig. 8.3).

$$dA = \frac{1}{2} |\bar{r} \times d\bar{r}| = \frac{1}{2} |\bar{r} \times \bar{v}| dt$$

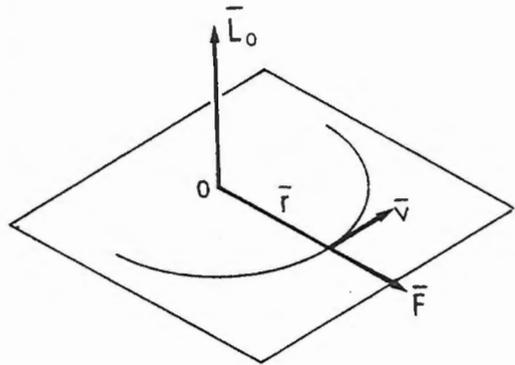


Fig. 8.2

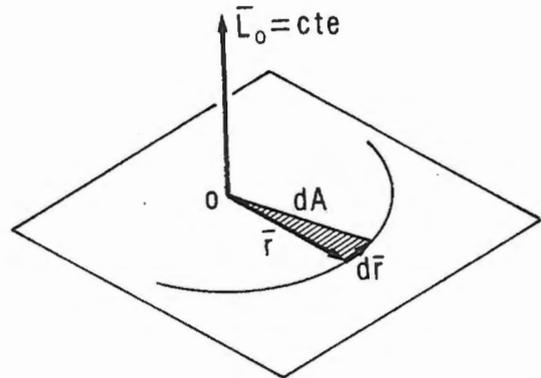


Fig. 8.3

Por tanto, si se define la velocidad areolar como  $dA / dt$ , entonces su valor es

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} |\vec{r} \times \vec{v}| = \text{cte} \quad (8.10)$$

ya que, según (8.8) lo es el momento cinético. En definitiva, la velocidad areolar de una partícula sometida a una fuerza central es constante, resultando que se conoce con el nombre de ley de las áreas.

### ***8.5. Ecuaciones del movimiento del punto material***

En definitiva, conocer el movimiento de un punto material es llegar a establecer el sistema de ecuaciones, denominadas ecuaciones del movimiento del punto, que permiten obtener los parámetros de posición del mismo en función del tiempo.

Por tanto, el primer paso es establecer el número de parámetros necesarios para que la posición del punto quede determinada. A estos parámetros independientes se les llama coordenadas y cada una de ellas representa una posibilidad de evolución posicional del punto o grado de libertad.

El número de grado de libertad de un punto depende de si éste está libre (3.g.d.l.) o ligado (sometido a una restricción o enlace). Así, por ejemplo, si el punto se mueve obligado a permanecer sobre el plano  $Z = 0$ , el número de coordenadas para determinar su posición será de 2, ya que dicho punto está sometido a una restricción de una de sus posibilidades de movimiento. Se dice entonces que el punto está sometido a un enlace, en este caso representado por la ecuación  $Z = 0$ .

En consecuencia, para establecer las ecuaciones del punto hay que distinguir dos casos: punto material libre y punto material ligado.

#### ***8.5.1. Punto material libre***

En este caso, la posición del punto viene determinada por tres parámetros  $x$ ,  $y$ ,  $z$ . Su evolución en el tiempo puede obtenerse por integración de la ecuación vectorial del tercer axioma

$$\vec{F} = m \vec{a}$$

que, proyectada sobre los tres ejes del sistema de referencia origina el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales

$$\begin{aligned} F_x &= m \frac{d^2 x}{dt^2} \\ F_y &= m \frac{d^2 y}{dt^2} \\ F_z &= m \frac{d^2 z}{dt^2} \end{aligned} \tag{8.11}$$

que mediante dos integraciones sucesivas respecto del tiempo permite la obtención de las ecuaciones del movimiento

$$x = x(t); \quad y = y(t); \quad z = z(t)$$

Las 6 constantes de integración que aparecen se determinan conociendo la velocidad  $\vec{v}$  y el vector de posición  $\vec{r}$  en un instante determinado.

### 8.5.2. Punto material ligado

En este caso, y según el número de enlaces, se distinguen dos tipos de enlaces, a saber:

#### a) Ligado a una superficie

En este caso, el punto posee únicamente dos grados de libertad, ya que las componentes de su vector de posición no son independientes, sino que están relacionadas por la ecuación de la superficie

$$f(x, y, z) = 0 \tag{8.12}$$

La ecuación fundamental de la dinámica se escribiría como

$$\vec{F} + \vec{R} = m \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} \tag{8.13}$$

donde  $\vec{F}$  es la resultante de las **fuerzas aplicadas**, que permanecen en ausencia del enlace.  $\vec{R}$  se llama **reacción del enlace**, y representa la fuerza que el enlace ejerce sobre la partícula, de forma que su trayectoria permanece sobre la superficie S, verificándose en todo instante la ecuación (8.12).

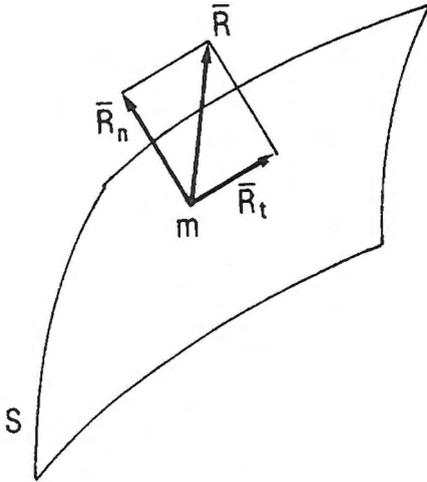


Fig. 8.4

La fuerza de enlace  $\vec{R}$  puede descomponerse en dos fuerzas figura 8.4; la reacción normal  $\vec{R}_n$ , perpendicular a la superficie, y la fuerza de rozamiento,  $\vec{R}_t$ , tangente a la superficie. La fuerza de rozamiento se opone al sentido del movimiento que tendría el punto, de no existir rozamiento y viene dada por la naturaleza del contacto enlace-partícula. Así, se pueden distinguir, entre otros, tres casos importantes:

- Rozamiento seco

$R_t = \mu R_N$ , donde  $\mu$  es una constante característica que se llama coeficiente de rozamiento.

- Rozamiento viscoso

$R_t = R_t(v)$  es decir es una función de la velocidad de la partícula.

- Enlace perfecto

$R_t = 0$ , siendo la reacción del enlace normal al mismo.

### b) Ligado a una curva

En este caso, la partícula está obligada a moverse sobre una curva, cuya ecuación general es de la forma

$$\vec{r} = \vec{r}(u)$$

La ecuación fundamental de la dinámica queda como

$$\bar{\mathbf{F}} + \bar{\mathbf{R}} = m \frac{d^2 \bar{\mathbf{r}}}{dt^2}$$

donde  $\bar{\mathbf{F}}$  y  $\bar{\mathbf{R}}$  tienen un significado idéntico al expuesto en el caso anterior. La reacción del enlace,  $\bar{\mathbf{R}}$ , se descompone en dos fuerzas:

$$\bar{\mathbf{R}} = \bar{\mathbf{R}}_t + \bar{\mathbf{R}}_n$$

donde  $\bar{\mathbf{R}}_t$  es la fuerza de rozamiento, tangente a la curva y opuesta al movimiento y  $\bar{\mathbf{R}}_n$  es la reacción normal, contenida en el plano normal a la curva.

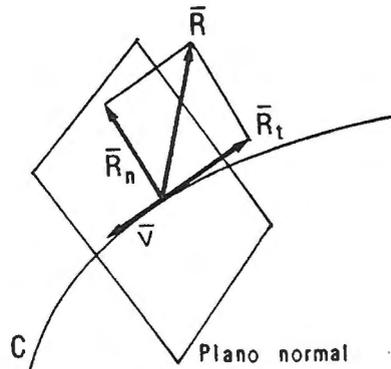


Fig. 8.5

### 8.6. Ecuaciones del equilibrio de un punto material

La condición necesaria y suficiente para que un punto material se encuentre en equilibrio es que su aceleración sea nula, es decir,  $\bar{\mathbf{a}} = \bar{\mathbf{0}}$ .

Según el tercer axioma de la Mecánica, esta condición es equivalente a que sea nula la resultante del sistema de fuerzas que actúa sobre el punto, por tanto la condición se reduce a

$$\sum \bar{\mathbf{F}} = \bar{\mathbf{0}} \tag{8.14}$$

que se desdobra en las tres escalares que permiten calcular la  $x$  y  $z$  correspondientes a la posición de equilibrio.



# CAPÍTULO 9

## TRABAJO Y ENERGÍA

### 9.1. Trabajo

Sea una partícula  $P$  que se mueve bajo la acción de una fuerza  $\vec{F}$  siguiendo una trayectoria  $C$ , y sea  $d\vec{r}$  el desplazamiento experimentado por el punto material en el tiempo  $dt$ .

Se denomina trabajo elemental realizado por la fuerza  $\vec{F}$  en el desplazamiento  $d\vec{r}$  al escalar

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (9.1)$$

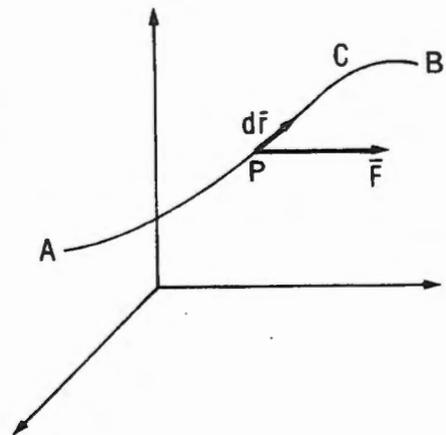
En un sistema de coordenadas cartesianas, en el que  $\vec{F}$  tiene como componentes  $F_x$ ,  $F_y$ ,  $F_z$ , y  $d\vec{r}$ ,  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$ , la (9.1) se escribe como

$$dW = F_x dx + F_y dy + F_z dz \quad (9.2)$$

El trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  en el desplazamiento  $AB$  a lo largo de la curva  $C$  es la suma de los infinitos trabajos elementales correspondientes a los desplazamientos  $d\vec{r}$  sobre  $C$ :

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} \quad (9.3)$$

es decir, representa la circulación de  $\vec{F}$  a lo largo de  $C$  entre  $A$  y  $B$ .



*Fig. 9.1*

Algunas consecuencias inmediatas de la definición de trabajo son las siguientes:

- El trabajo realizado por una fuerza normal a la trayectoria es nulo.
- Si sobre la partícula actúa un sistema de fuerzas  $\vec{F}_1, \vec{F}_2, \dots, \vec{F}_n$ , el trabajo realizado por la resultante es la suma de los trabajos realizados por cada una de las fuerzas por separado. En efecto

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r} = \left( \sum_i \vec{F}_i \right) \cdot d\vec{r} = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{r} = \sum_i dW_i$$

- Si la fuerza  $\vec{F}$  es constante, el trabajo realizado en el desplazamiento AB a lo largo de la curva C es

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = \vec{F} \cdot \int_C d\vec{r} = \vec{F} \cdot (\vec{r}_B - \vec{r}_A)$$

La ecuación de dimensiones del trabajo en el Sistema Internacional es  $[W] = [F]L = ML^2T^{-2}$  y su unidad el julio (J). Un julio es el trabajo realizado por una fuerza constante de 1 newton al desplazar su punto de aplicación 1 metro en su dirección.

### 9.2. Potencia

Sea una partícula como la mostrada en la figura 9.1, sometida a la acción de una fuerza  $\vec{F}$ , y que en un instante dado se mueve con velocidad  $\vec{v}$ . Se define la potencia desarrollada por la fuerza  $\vec{F}$  como el trabajo realizado por unidad de tiempo

$$P = \frac{dW}{dt} \tag{9.4}$$

Teniendo en cuenta la definición del trabajo elemental y que  $d\vec{r} = \vec{v} dt$ , la expresión (9.4) puede escribirse como

$$P = \frac{\vec{F} \cdot \vec{v} dt}{dt} = \vec{F} \cdot \vec{v} \quad (9.5)$$

es decir, la potencia es igual al producto escalar de la fuerza por la velocidad de su punto de aplicación.

La ecuación de dimensiones de la potencia es, según (9.4)

$$[P] = [W] T^{-1} = ML^2 T^{-3}$$

y su unidad en el S.I. es el Vatio (W);  $1 \text{ W} = 1 \text{ J s}^{-1}$ .

### 9.3. Energía cinética. Teorema de la energía cinética

Se denomina energía cinética de un punto material al producto de la mitad de su masa por el cuadrado de su velocidad

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m (\vec{v} \cdot \vec{v}) \quad (9.6)$$

Evidentemente, la energía cinética tiene dimensiones de trabajo y se mide, en el S.I., en julios.

Derivando la ecuación (9.6) con respecto al tiempo, se obtiene

$$\frac{dT}{dt} = m \vec{v} \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v} \cdot \vec{F} = P \quad (9.7)$$

es decir, la potencia desarrollada por la resultante de las fuerzas que actúan sobre una partícula es igual a la derivada, con respecto al tiempo, de su energía cinética.

Multiplicando (9.7) por  $dt$ , e integrando los instantes  $t_A$  y  $t_B$ , correspondientes a las posiciones A y B, respectivamente, se obtiene

$$\int_{t_A}^{t_B} P dt = \int_{T_A}^{T_B} dT$$

es decir

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r} = T_B - T_A = \frac{1}{2}(m v_B^2 - m v_A^2) \quad (9.8)$$

expresión que pone de manifiesto que, independientemente de la naturaleza de la fuerza  $\vec{F}$  y de la trayectoria que siga una partícula sometida a la misma, es trabajo realizado por la fuerza  $\vec{F}$  durante un intervalo de tiempo es igual a la variación de la energía cinética de la partícula en ese intervalo. Este resultado se conoce como teorema de la energía cinética.

Una consecuencia importante del mismo es que las fuerzas normales a la trayectoria de la partícula no modifican su energía cinética. Este es el caso de la reacción normal en un enlace, o de las fuerzas del tipo  $\vec{F} = \vec{c} \times \vec{v}$ , cuyo ejemplo más significativo es la fuerza magnética sobre una carga en movimiento, que será estudiada en lecciones posteriores.

### ***9.4. Energía potencial. Teorema de conservación de la energía mecánica.***

Sea una partícula sometida a la acción de una fuerza que depende únicamente de la posición del punto,  $\vec{F} = \vec{F}(x, y, z)$ . El trabajo realizado por dicha fuerza cuando la partícula se desplaza desde un punto A hasta otro B, siguiendo una trayectoria cualquiera C es

$$W_{AB} = \int_C \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

En general,  $W_{AB}$  depende de la trayectoria seguida, ya que se trata de la circulación de un campo vectorial. Ahora bien, en algunos casos de gran importancia, el campo de fuerzas  $\vec{F}$  es de tal naturaleza que el valor de  $W_{AB}$  es independiente de la trayectoria. Tal es el caso de las fuerzas que derivan de potencial (campo de fuerzas conservativo). En efecto, tal como se indicó en el capítulo 4, un campo deriva de potencial cuando existe una función escalar de punto,  $U(x,y,z)$ , tal que

$$\vec{F} = -\text{grad } U \quad (9.9)$$

En este caso, el trabajo realizado por  $\vec{F}$  entre A y B es

$$W_{AB} = \int_C -\text{grad } U \cdot d\vec{r} = \int_{U_A}^{U_B} -dU = U_A - U_B \quad (9.10)$$

es decir, resulta independiente de la trayectoria e igual a la disminución de la función U entre sus extremos.

La función  $U(x,y,z)$  se denomina **energía potencial** del punto en el campo de fuerzas  $\vec{F}$ . Sus dimensiones y unidades son las del trabajo.

Si la partícula se mueve con velocidad  $\vec{v}$  en el interior de un campo conservativo,  $\vec{F}$ , la potencia desarrollada por la fuerza es, según (9.5) y (9.9)

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\text{grad } U \cdot \frac{d\vec{r}}{dt} = -\frac{dU}{dt} \quad (9.11)$$

es decir igual a la derivada de la energía potencial con respecto al tiempo, cambiada de signo.

Comparando la ecuación (9.11) con la (9.7), resulta

$$P = -\frac{dU}{dt} = \frac{dT}{dt}$$

es decir

$$\frac{d}{dt}(T + U) = 0 \quad (9.12)$$

el término  $T+U = E$ , recibe el nombre de energía mecánica de la partícula y, como pone de manifiesto la ecuación anterior, es constante

$$T+U = E = \text{cte} \quad (9.13)$$

este resultado se denomina teorema de conservación de la energía mecánica: “La energía mecánica E de una partícula en un campo de fuerzas conservativo es constante respecto al tiempo”.

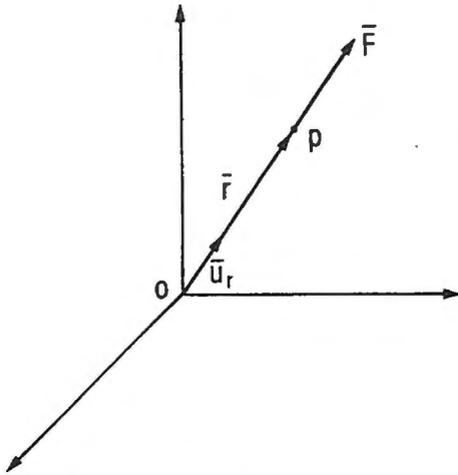


Fig. 9.2

**Ejemplo 9.1**

Calcular la energía potencial de una partícula que se mueve en el interior de un campo de fuerzas central

$$\vec{F} = f(r) \vec{u}_r$$

donde  $f(r)$  es una función cualquiera de la distancia del punto al centro de fuerzas y  $\vec{u}_r$  es el vector unitario  $\vec{u}_r = \vec{r} / r$ , figura 9.2.

Una fuerza cuya línea de acción pasa siempre por un punto fijo O y cuyo módulo depende únicamente de la distancia  $r$ , entre su punto de aplicación y el centro O, deriva de potencial, como puede comprobarse a partir de las condiciones (4.29) y (4.30). Por tanto, existe la función  $U(x,y,z)$  tal que  $\vec{F} = -\text{grad } U$ .

Para determinar la función U se partirá de la ecuación (9.11)

$$P = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\frac{dU}{dt}$$

Ahora bien,  $\vec{v}$  se calcula como

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(r \cdot \vec{u}_r) = \frac{dr}{dt} \vec{u}_r + r \frac{d\vec{u}_r}{dt}$$

y, multiplicando escalarmente esta expresión por la de la fuerza se obtiene

$$-\frac{dU}{dt} = f(r) \frac{dr}{dt}$$

ya que  $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$  y  $\vec{u}_r \cdot d\vec{u}_r / dt = 0$ , por ser constante el módulo de  $\vec{u}_r$ . En definitiva, se obtiene que

$$dU = -f(r) dr$$

siendo la energía potencial

$$U = -\int f(r) dr$$

Así, si  $f(r) = -k r$ , fuerza que actúa sobre una partícula ligada a un resorte, la energía potencial es

$$U = +\int k r dr = \frac{1}{2} k r^2 + \text{cte}$$

Si  $f(r) = k / r^2$ , fuerza inversamente proporcional al cuadrado de la distancia, la energía potencial resulta

$$U = -\int \frac{k}{r^2} dr = \frac{k}{r} + \text{cte}$$

dentro de este caso, si  $k = -G m M$  se obtiene la energía potencial gravitatoria, mientras que para  $k = 1 / 4\pi\epsilon_0 q_1 q_2$  se obtiene la energía potencial electrostática.



# CAPÍTULO 10

## DINÁMICA DEL MOVIMIENTO RECTILÍNEO

### 10.1. Introducción

La trayectoria rectilínea del punto material ocurre bajo dos circunstancias distintas:

- a) En el punto libre, cuando la fuerza aplicada es de dirección constante y coincidente con la velocidad inicial del punto.
- b) En el punto ligado a una recta fija siempre que la fuerza sea tal que le pueda imprimir movimiento.

En todo caso el movimiento se debe a la acción de la componente de  $\vec{F}$  colineal con la trayectoria.

Por ser la trayectoria una recta, la posición del punto vendrá dada por un sólo parámetro, por ejemplo, la coordenada  $x$ , medida a partir de su posición inicial  $O$ . Su velocidad y aceleración serán  $\dot{x}$  y  $\ddot{x}$ .

Si es  $m$  la masa del punto material, la segunda ley establece que

$$F = m \ddot{x}$$

donde  $\vec{F}$  es positiva si su sentido coincide con el de la aceleración.

En el caso más general, la fuerza  $F$  es de la forma

$$F = F(x, \dot{x}, t)$$

y el problema se plantea bajo dos aspectos:

- a) Conocido  $F(x, \dot{x}, t)$ , obtener la ley del movimiento. Caso que se estudiará posteriormente y que está determinado.

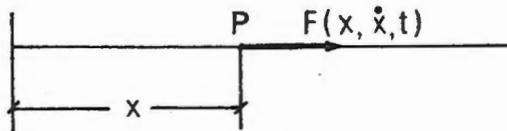


Fig. 10.1

- b) Conocida la ley  $x = x(t)$  obtener la fuerza que la provoca. Este caso, en general, quedaría indeterminado ya que

$$m \ddot{x} = m [\ddot{x}(t)]$$

sería una solución pero también lo sería al sustituir  $t$  en la misma a partir de los valores de  $x = x(t)$  y su derivada respecto del tiempo.

Así, por ejemplo, si  $x = x(t)$  es de la forma

$$x = e^t \rightarrow \begin{cases} \dot{x} = e^t \\ \ddot{x} = e^t \end{cases}$$

en cuyo caso puede ser solución de la ecuación

$$F_x = mx \quad \text{o} \quad F_x = m\dot{x} \quad F_x = me^t$$

que quedaría determinada si además se supiera si la dependencia de  $F$  es de  $x$ , de  $\dot{x}$ , o de  $t$ .

Por otra parte, si la ley del tiempo fuera general y dependiera de dos constantes arbitrarias

$$x = x(t, C, C_1) \tag{10.1}$$

entonces la determinación de  $F$  sería completa ya que entre las ecuaciones (10.1) y las que se obtienen al derivar por primera y segunda vez respecto del tiempo, se eliminarían las constantes  $C$  y  $C_1$  obteniéndose

$$F = F(x, \dot{x}, t)$$

y en consecuencia la ley quedaría determinada.

Cuando la fuerza  $F$  es función únicamente de la posición  $x$ , de la velocidad  $\dot{x}$  o del tiempo  $t$ , la anterior ecuación **siempre tiene solución**.

### 10.2. Fuerza dependiente de la posición

Si la fuerza,  $\bar{F}$ , es de la forma

$$F = F(x) \tag{10.2}$$

la ecuación del movimiento es

$$F(x) = m \frac{dv}{dt} \tag{10.3}$$

que al multiplicar por  $dx$  e integrar resulta

$$\int_{x_0}^x F(x) dx = \int_{x_0}^x m \frac{dv}{dt} dx = \int_{x_0}^x mv dv = \frac{1}{2} m [v(x)^2 - v^2(x_0)]$$

de donde

$$v^2(x) = v^2(x_0) + \frac{2}{m} \int_{x_0}^x F(x) dx = \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 \tag{10.4}$$

resultando

$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{v^2(x_0) + 2/m \int_{x_0}^x F(x) dx}} \tag{10.5}$$

ecuación que permite obtener la solución buscada  $x = x(t)$ .

(\*) Si la fuerza  $F$  deriva de un potencial, la función potencial se obtiene con facilidad ya que, por tratarse de un movimiento unidimensional, es

$$U = -\int F(x) dx$$

y como la fuerza es conservativa, el teorema de conservación de la energía mecánica constituye la integral primera del movimiento:

$$T + U = E \rightarrow \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + U(x) = E \quad (10.6)$$

donde  $E$  es la energía total del punto  $P$ , que permanece constante a lo largo del movimiento.

De modo análogo la ley horaria se obtiene a partir de (10.6) por integración

$$\dot{x}^2 = \frac{2}{m} [E - U(x)]; \quad \dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - U(x)]}$$
$$dt = \pm \frac{dx}{\sqrt{2/m [E - U(x)]}} \quad (10.7)$$

donde el signo se conoce al considerar el sentido del movimiento del punto.

Cuando la integral (10.7) es de difícil solución, la propia ecuación (10.6) proporciona una cierta descripción cualitativa del movimiento. En efecto, conocidos en un punto los valores de  $u(x)$  y  $\dot{x}$  (que es lo mismo que conocer  $E$ ) y conocida la función potencial  $U(x)$ , el movimiento queda restringido a la zona en que

$$E - U(x) \geq 0 \quad (10.8)$$

dado el carácter positivo de la energía cinética.

Veamos algún ejemplo ilustrativo que aclare esta afirmación:

- Si  $U(x)$  tiene la forma indicada en la figura (campana de potencial) según los valores que tome  $E$ , los movimientos resultan distintos.

Así :

a.1) Si  $E = E_1$  el movimiento -  
tiene lugar a lo largo de toda  
la recta ya que

$$T = E - U > 0 \forall x$$

a.2) Si  $E = E_2$  el movimiento -  
tiene lugar en las zonas

$$T = E - U(x) \geq 0 \rightarrow \begin{cases} Vx \leq x_2^* \\ Vx \geq x_2^{**} \end{cases}$$

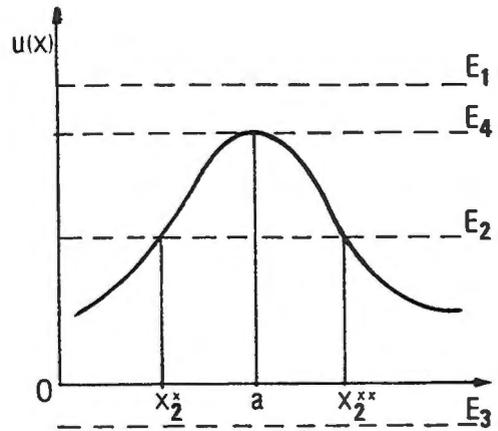


Fig. 10.2

Las abscisas  $x_2^*$  y  $x_2^{**}$  se denominan puntos absidales del movimiento y corresponden a puntos de velocidad nula en que se invierte el sentido del movimiento.

a.3) Si  $E = E_3$  el movimiento es físicamente imposible por la incompatibilidad de la condición y la fuerza.

a.4) Si  $E = E_4$  el movimiento del punto presenta una singularidad que tiene lugar en la posición correspondiente a la abscisa  $x = a$ .

En este punto, la velocidad es nula y además coincide en que también lo es la fuerza por ser

$$\frac{dU}{dx} = 0 \tag{10.9}$$

esto quiere decir que al llegar a este punto, por se nula  $U$  y ser nula  $F$ , por el primer principio, este punto quedaría en equilibrio.

Ahora bien si, por cualquier procedimiento, se separa este punto de dicha posición, entonces no volvería a ella. Por esta razón la posición de equilibrio antes citada se denomina inestable.

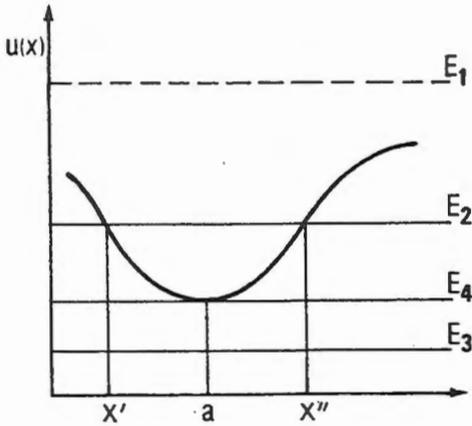


Fig. 10.3

b) En otras ocasiones, la función potencial tiene forma de pozo.

En la figura representamos un pozo de potencial con niveles energéticos análogos a los del caso anterior, lo que nos permitirá razonamientos paralelos.

b.1) Si  $E = E_1$ , el movimiento tiene lugar a lo largo de todo el eje  $x$ , acumulando la velocidad en puntos cercanos a  $x = a$ .

b.2) Si  $E = E_2$  el movimiento queda confinado en la zona  $x' \leq x \leq x''$ , no pudiendo existir fuera de la misma, siendo el movimiento periódico.

Finalmente señalar que el equilibrio que se alcanza en  $x = a$  es estable ya que al separar de la misma la fuerza tiende a que el punto vuelva a su posición de equilibrio.

Los pozos de potencial responden a fuerzas atractivas cuyo centro de atracción corresponde precisamente a la abscisa en la que  $U(x)$  es mínimo.

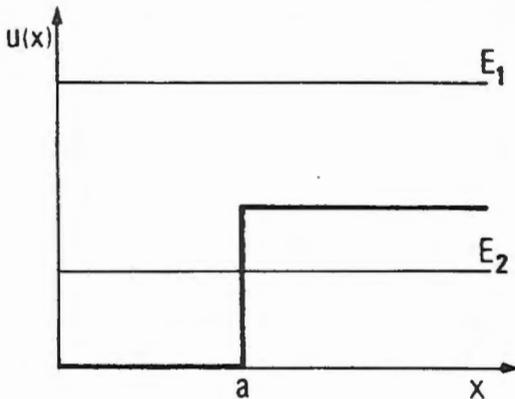


Fig. 10.4

c) Otro caso, muy importante en Física Moderna, en partículas es el correspondiente a barreras de potencial. Se trata de funciones potenciales  $U(x)$  tales que

$$U(x) = 0 \quad \forall x \leq a;$$

$$U(x) = U \quad \forall x \geq a$$

c.1) Si  $E = E_1$  la velocidad constante hasta  $x = a$ ,

sufre un descenso brusco en  $x = a$ , después del cual permanece constante. Ello implica la necesidad de fuerzas percusionales.

c.2) Si  $E = E_2$  el movimiento corresponde a un choque elástico.

De todo lo indicado hasta ahora conviene reseñar que los puntos de equilibrio del punto material se encontrarán en los máximos o mínimos de la función  $U(x)$  ya que en dichos puntos la fuerza  $\vec{F} = \vec{0}$  por anularse la derivada de  $U(x)$  respecto de  $x$ .

El hecho de que el punto sea máximo o mínimo incide en la naturaleza del equilibrio.

Si es un mínimo y el punto  $P$  lo apartamos de su abcisa una pequeña distancia bien sea a la derecha o a la izquierda observamos que la fuerza tiende a restituirlo a su posición inicial y en consecuencia es un equilibrio estable. Así en el tramo  $MB$  es

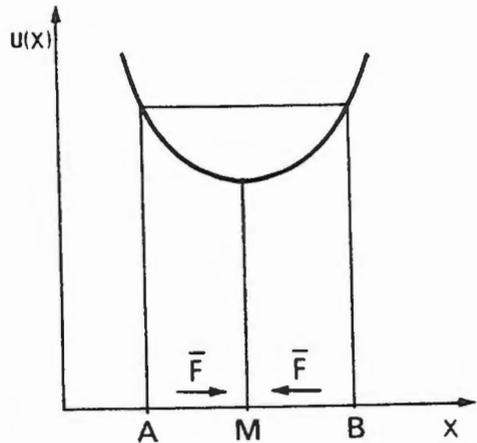


Fig. 10.5

$$\frac{dU(X)}{dx} < 0 \text{ y como } F = -\frac{dU(X)}{dx}$$

resulta que  $F$  es positiva, es decir que va dirigida en el sentido de las  $x$  crecientes. En el tramo  $MB$  es

$$\frac{dU(X)}{dx} > 0 \rightarrow F < 0$$

es decir va en el sentido decreciente de las  $x$ , por tanto van dirigidas tal y como se indica en la figura.

Analíticamente, por tanto la condición se expresa como

$$\frac{dU(X)}{dx} = 0 \text{ y } \frac{d^2U(X)}{dx^2} > 0$$

Por un razonamiento análogo se llega a que la condición de equilibrio inestable es la de máximo potencial

$$\frac{dU(X)}{dx} = 0 \quad \text{y} \quad \frac{d^2U(X)}{dx^2} < 0$$

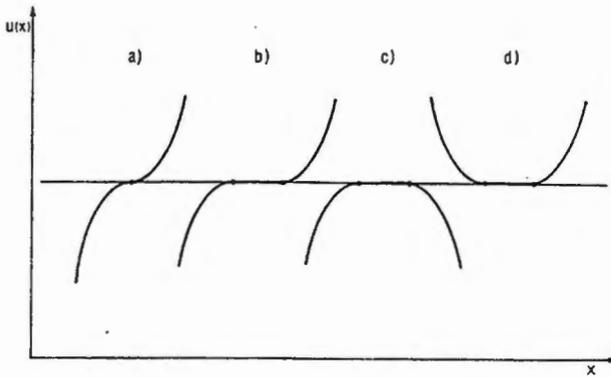


Fig. 10.6

mina "rellano". Este caso está representado en los dibujos (b) (c) y (d).

Si tanto la primera como la segunda derivada se anulasen estaríamos ante un punto de inflexión con derivada horizontal y podemos comprobar que el equilibrio en este caso es también inestable (a).

El equilibrio indiferente se produce cuando la derivada primera se anula no en un punto sino en un intervalo finito que se denomina "rellano".

### Ejemplo 10.1

Como caso particular de gran interés, analizaremos el caso de una fuerza del tipo  $F(x) = -kx$ , es decir, fuerza atractiva proporcional a la distancia a un punto fijo.

La energía potencial de la partícula en la posición  $x$  es

$$U = -\int F dx = \frac{1}{2} k x^2 + C$$

donde  $C$  es una constante de integración de valor arbitrario. Suponiendo que en  $x = 0$  es  $U = 0$ , resulta

$$U = \frac{1}{2} k x^2$$

Una vez calculada la función  $U(x)$ , las ecuaciones del movimiento se obtienen a partir de la ecuación (10.7) que, en este caso, toma la forma

$$dt = dx \left[ \frac{2}{m} (E - kx^2) \right]^{-1/2}$$

y, denominando  $w^2 = k/m$  y operando, se llega a

$$w dt = \frac{dx}{\sqrt{2E/k - x^2}}$$

o bien, llamando  $A^2 = 2E/k$

$$w dt = \frac{dx}{\sqrt{A^2 - x^2}}$$

Integrando la ecuación diferencial anterior se obtiene

$$wt + \varphi = \text{arc sen } \frac{x}{A}$$

o bien

$$x = A \text{ sen}(wt + \varphi) \tag{a}$$

donde  $A$  y  $\varphi$  son dos constantes de integración cuyos valores se determinan a partir de las condiciones iniciales del movimiento. En efecto, si en  $t = t_0$  es  $x = x_0$  y  $v = v_0$ , entonces

$$E = \frac{1}{2} (kx_0^2 + mv_0^2)$$

siendo  $A^2 = 2E/k$ , como se ha indicado anteriormente. Por otra parte, la constante  $\varphi$  se calcula a partir de la expresión

$$x_0 = A \text{ sen}(wt_0 + \varphi)$$

En definitiva, una partícula sometida a una fuerza de ese tipo describe un movimiento armónico simple, de pulsación  $\omega = \sqrt{k/m}$ .

Este resultado podría haber sido obtenido a partir de la ecuación fundamental de la dinámica

$$-kx = m \frac{d^2x}{dt^2}$$

o bien

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0 \quad \text{con} \quad \omega^2 = k/m$$

cuya integral es, evidentemente la función (a).

### ***10.3. Fuerza dependiente de la velocidad***

En este caso es  $F = F(v)$ , con lo que aplicando la segunda ley de Newton es

$$F(v) = m \frac{dv}{dt} \tag{10.10}$$

que, separando variables e integrando, resulta

$$dt = m \frac{dv}{F(v)} \rightarrow t - t_0 = m \int_{v_0}^v \frac{dv}{F(v)} \tag{10.11}$$

obteniéndose así la función

$$v = v(t) \tag{10.12}$$

Si ahora aplicamos el teorema de la energía cinética

$$d\left(\frac{1}{2} m v^2\right) = F(v) dx \tag{10.13}$$

$$m v dv = F(v) dx \rightarrow dx = m \frac{v dv}{F(v)}$$

que integrada dá

$$x - x_0 = m \int_{v_0}^v \frac{v dv}{F(v)} \quad (10.14)$$

obteniéndose así la función

$$v = v(x) \quad (10.15)$$

Finalmente si entre (10.11) y (10.14) se elimina  $v$ , se obtiene la función

$$x = x(t)$$

o expresión horaria deseada.

Como ejemplo de aplicación de este caso se pasa a estudiar la caída vertical de un punto material con resistencia proporcional a la velocidad (Ley de Stokes).

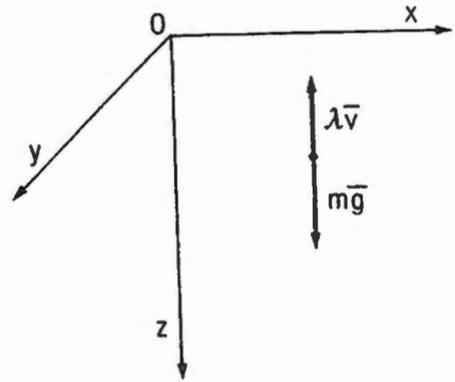


Fig. 10.7

En este caso al aplicar la ecuación de la dinámica se tiene

$$\sum F = m \frac{dv}{dt} \quad (10.16)$$

sobre el eje 0Z

$$\left. \begin{aligned} mg - \lambda v &= m \frac{dv}{dt} \\ mg &= \lambda a \end{aligned} \right\} \frac{dv}{dt} = g \left( 1 - \frac{v}{a} \right) \quad (10.17)$$

o bien

$$\frac{dv}{1 - v/a} = g dt \rightarrow -a \ln \left( 1 - \frac{v}{a} \right) = g t$$

de donde

$$1 - \frac{v}{a} = -\frac{g}{a}t \rightarrow v = a(1 - e^{-gt/a}) \quad (10.18)$$

e integrando de nuevo, es

$$\frac{dz}{dt} = a(1 - e^{-gt/a}) \rightarrow z = at + \frac{a^2}{g}(e^{-gt/a} - 1) \quad (10.19)$$

suponiendo  $z_0 = 0$

De la (10.18) se deduce que para  $t \rightarrow \infty$ ,  $v \rightarrow a$  y el movimiento tiende a ser uniforme.

Esta ley de caída es la que sigue una esfera que cae verticalmente en el seno de un líquido viscoso donde  $\lambda = 6\pi v r \mu$  donde  $r$  = radio esfera  $\rho$  = densidad material esfera y  $\mu$  = viscosidad fluido. Esto constituye la ley de Stokes.

### 10.4. Fuerza dependiente del tiempo

En este caso es de la forma  $F = F(t)$  y la ecuación de la dinámica se escribe

$$F(t) = m \frac{dv}{dt} \quad (10.20)$$

cuya integración da

$$m v = \int_{t_0}^t F(t) dt + m v_0 \quad (10.21)$$

si en  $t = t_0 \rightarrow v = v_0$ , quedando

$$v = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \quad (10.22)$$

obteniendo así la función

$$v = v(t) \tag{10.23}$$

Una nueva integración teniendo en cuenta que  $v = dx / dt$ , entre los límites  $x_0$  y  $x$ , proporciona

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \frac{1}{m} \int_{t_0}^t F(t) dt \rightarrow x - x_0 = \int_{t_0}^t v_0 dt + \int_{t_0}^t \frac{1}{m} \left[ \int_{t_0}^t F(t) dt \right] dt \tag{10.24}$$

que constituye la ecuación buscada  $x = x(t)$ .



# CAPÍTULO 11

## ELECTROSTÁTICA

### *11.1. Naturaleza eléctrica de la materia. Carga eléctrica*

El descubrimiento y estudio de distintos fenómenos electrostáticos (atracción de trocitos de papel por una barra de vidrio después de ser frotada, por ejemplo) y magnéticos (fuerzas entre circuitos recorridos por corrientes) demuestra la existencia de acciones a distancia distintas de las fuerzas gravitatorias estudiadas en Mecánica. Actualmente se sabe que estos fenómenos son consecuencia de un tipo de interacción específica entre las partículas que constituyen la materia.

Así, el átomo está formado por un núcleo rodeado de electrones; a su vez, el núcleo es una asociación de protones y neutrones. A cada tipo de partícula se le asocia, además de su masa, otra magnitud escalar, denominada **carga eléctrica**, que indica la intensidad de las acciones electromagnéticas que puede crear o experimentar.

Es un hecho constatado que existen dos tipos de cargas. Por convenio se denomina negativa a la carga del electrón y positiva a la del protón. El neutrón tiene una carga nula ya que sobre él no se manifiestan fuerzas eléctricas.

Hay que señalar otras dos propiedades de la carga eléctrica que son fundamentales para comprender la estructura eléctrica de la materia: la carga está cuantizada y se conserva en un sistema aislado eléctricamente.

En efecto, numerosos experimentos han demostrado que la cantidad de electricidad se presenta en valores múltiplos de otra a la que se denomina carga elemental,  $e$ . El valor medido para la carga elemental es, en unidades del S.I.

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

Así la carga del electrón es  $-e$  y la del protón  $+e$ . De esta forma, un átomo de número atómico  $Z$  posee  $Z$  electrones y  $Z$  protones, con lo que su carga neta es nula. Puesto que la materia está constituida por átomos, en su estado normal la naturaleza es eléctricamente neutra. No obstante, un cuerpo puede cargarse negativamente si sus átomos toman electrones en exceso, o positivamente si sus átomos pierden electrones.

En cuanto a la segunda propiedad de la carga eléctrica, su conservación, constituye un postulado de la teoría electromagnética que ha sido confirmado por todas las observaciones realizadas hasta la fecha: "La carga eléctrica total de un sistema cerrado (sin intercambio de materia con el exterior) permanece constante".

Como se ha indicado anteriormente, la naturaleza eléctrica de las partículas que constituyen la materia es la responsable de los fenómenos electromagnéticos. Por razones didácticas se divide el estudio de los mismos en dos partes. En la primera se analizan los fenómenos eléctricos asociados a las cargas en reposo (Electrostática). Posteriormente, se estudiarán los fenómenos magnéticos asociados a las cargas con movimiento en régimen estacionario (Magnetostática). Una vez estudiados, por separado, estos aspectos se establece la formulación general, ecuaciones de Maxwell, que engloba en una teoría general y a modo de síntesis, todos los casos estudiados.

### 11.2. Ley de Coulomb

Sean dos partículas A y B, cargadas con cargas  $q_1$  y  $q_2$ , respectivamente, en reposo y situadas en el vacío. Experimentalmente puede comprobarse que la

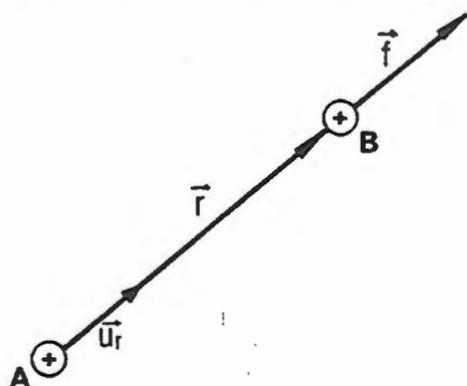


Fig. 11.1

interacción  $\vec{f}$ , ejercida por A sobre B es

$$\vec{f} = k \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.1)$$

donde  $\vec{r}$  es el vector de posición de B con respecto a A y  $\vec{u}_r$  es el versor de  $\vec{r}$ . Es decir, la fuerza ejercida por A sobre B lleva la dirección de la recta que une a A con B, es repulsiva si  $q_1$  y  $q_2$

son del mismo signo y atractiva si son de signos contrarios y su módulo es proporcional al producto de las cargas e inversamente proporcional al cuadrado de la distancia que las separa.

La ecuación (11.1) fue establecida por Coulomb, en 1780, mediante experimentos directos de precisión bastante grosera. No obstante, su validez queda establecida con gran exactitud a través del conjunto de consecuencias que se deducen de dicha ecuación.

El valor de la constante de proporcionalidad,  $k$ , depende del sistema de unidades utilizando para medir fuerzas, cargas y distancias. Así, en el S.I., las magnitudes fundamentales son longitud, masa, tiempo e intensidad de corriente (esta última magnitud, así como su unidad, el amperio, se definirán en lecciones posteriores). La carga eléctrica es, pues, una magnitud derivada cuya ecuación de dimensiones es

$$[Q] = IT$$

y su unidad es el Culombio:  $1 \text{ C} = 1 \text{ A s}$

En este sistema de unidades, el valor de  $k$  es

$$k = 9 \cdot 10^9 \text{ N m}^2 / \text{C}^2 \quad (11.2)$$

Por razones de comodidad en los cálculos, se conviene en sustituir la constante  $k$  por

$$k = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \quad (11.3)$$

donde  $\epsilon_0$  es una nueva constante denominada permitividad del vacío, cuyo valor es

$$\epsilon_0 = \frac{1}{4\pi k} = 8'85 \cdot 10^{-12} \text{ N}^{-1} \text{ m}^{-2} \text{ C}^2$$

Teniendo en cuenta (11.3), la ley de Coulomb puede escribirse como

$$\vec{f} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_1 q_2}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.4)$$

expresión que así se utilizará en lo que sigue.

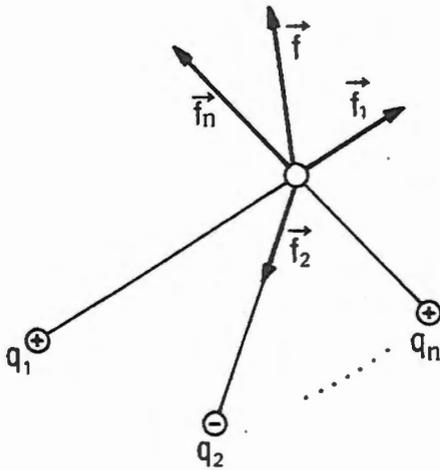


Fig. 11.2

interacción entre dos cualesquiera de ellas es la misma, estén o no presentes las demás”.

En el caso de más de dos cargas, la fuerza que actúa sobre una de ellas puede calcularse por aplicación sucesiva de la ecuación (11.4). Concretamente si se quiere obtener la fuerza  $\vec{f}$  que un conjunto de  $n$  cargas ejerce sobre otra,  $q$ , se aplicará la expresión

$$\vec{f} = \sum_i^n \vec{f}_i = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q q_i}{r_i^2} \vec{u}_{ri} \quad (11.5)$$

Este resultado es consecuencia del denominado principio de superposición: “En un sistema de cargas en reposo, la

### 11.3. Campo eléctrico

Se dice que en una región del espacio existe un campo eléctrico, cuando se manifiestan fuerzas de naturaleza electrostática sobre cargas eléctricas situadas en su interior. De esta definición se deduce que toda carga altera las propiedades del espacio que la rodea, creando en su entorno un campo eléctrico que constituye la causa física de las fuerzas eléctricas.

Para cuantificar el concepto de campo eléctrico anteriormente expuesto, se le asocia una función vectorial de punto  $\vec{E}(x,y,z)$  que se define como sigue. Supóngase un punto cualquiera del campo,  $P$ , en el que se sitúa una carga de prueba  $q'$ ; el valor del campo eléctrico en  $P$  es

$$\vec{E} = \vec{f} / q' \quad (11.6)$$

donde  $\vec{f}$  es la fuerza eléctrica que actúa sobre  $q'$ . En definitiva, el campo eléctrico en un punto  $P$  representa la fuerza que actuaría sobre la unidad de carga positiva situada en él. La fuerza que actúa sobre la carga  $q'$  es, por tanto

$$\vec{f} = q' \vec{E} \quad (11.17)$$

de donde se deduce que  $\vec{f}$  y  $\vec{E}$  tienen el mismo sentido si  $q'$  es positiva y sentidos contrarios si  $q'$  es negativa.

Hay que señalar que en la definición (11.6) se está admitiendo que el hecho de situar la carga de prueba en el punto  $P$  no altera a la distribución de carga que da origen al campo  $\vec{E}$ .

Las dimensiones del campo eléctrico son, a partir de (11.6)

$$[E] = [f][q]^{-1} = \text{MLT}^{-3} \text{I}^{-1}$$

sus unidades, en el S.I., son el N/C ó, como se verá más adelante, el V/m.

A partir de la ley de Coulomb y del principio de superposición se puede calcular el campo eléctrico creado por una carga puntual, sistema de cargas puntuales o distribuciones continuas de carga.

### 11.3.1. Campo eléctrico creado por cargas puntuales

Considérese una carga puntual y un punto  $P$  cuya posición con respecto a  $q$  viene dada por el vector  $\vec{r}$ . (Fig. 11.3). Si se sitúa una carga de prueba,  $q'$ , en  $P$  ésta se verá sometida a la fuerza

$$\vec{f} = \frac{qq'}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r$$

por lo que, según (11.6), el campo creado por  $q$  en  $P$  es

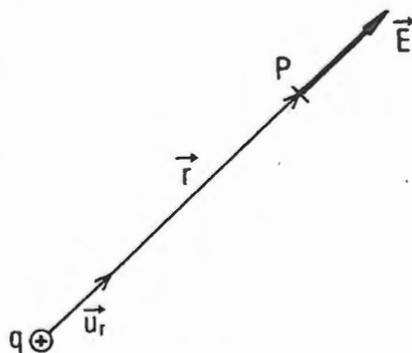


Fig. 11.3

$$\vec{E} = \frac{\vec{f}}{q'} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.8)$$

En el caso de  $n$  cargas puntuales,  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) ubicadas en los puntos  $O_1, O_2, \dots, O_n$ , el campo creado por dicho sistema en el punto  $P$  es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{r_i^2} \vec{u}_{ri} \quad (11.9)$$

donde

$$\vec{r}_i = \vec{O_iP}$$

Hay que señalar que el campo  $\vec{E}$  dado por (11.8) está definido en todos los puntos del espacio, salvo en los puntos  $O_i$  donde se encuentran las cargas puntuales.

### 11.3.2. Campo creado por una distribución continua de carga

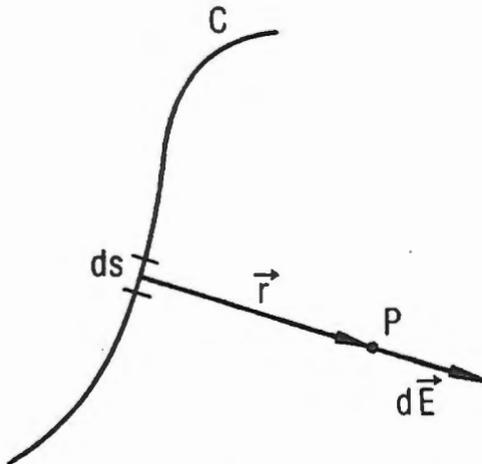


Fig. 11.4

#### a) Distribución lineal de carga.

Sea una curva,  $C$ , sobre la que hay distribuida de forma continua, una carga  $q$ . Cada diferencial de arco,  $ds$ , puede considerarse como el asiento de una carga diferencial  $dq$

$$dq = \lambda ds$$

donde  $\lambda$  es la densidad lineal de carga. El campo creado por  $dq$  en un punto  $P$  es

$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\lambda ds}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.10)$$

y el campo creado por la distribución de carga sobre la curva  $C$  es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_C \frac{\lambda ds}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.11)$$

b) Distribución superficial de carga.

En el caso de que la carga  $q$  esté distribuida sobre una superficie  $S$ , el campo en un punto  $P$  es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.12)$$

donde  $\sigma$  es la carga por unidad de superficie, o densidad superficial de carga.

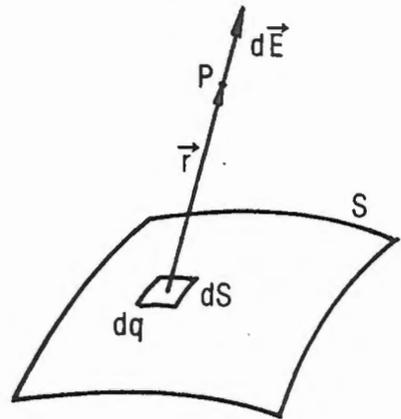


Fig. 11.5

c) Distribución volumétrica de carga.

De modo similar a los casos anteriores, el campo creado por un volumen  $V$ , en el que se ha distribuido una carga  $q$ , es

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho dv}{r^2} \vec{u}_r \quad (11.13)$$

siendo

$$\rho = \frac{dq}{dv}$$

la densidad volumétrica de carga.

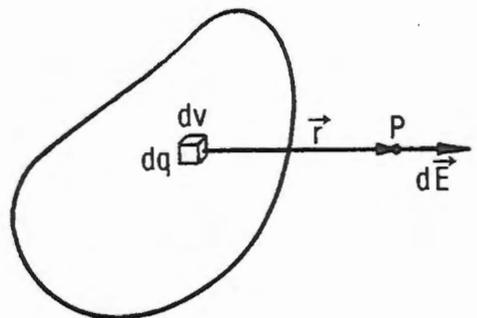


Fig. 11.6

### 11.4. Potencial electrostático

Tal como se vio en la lección 4, si el rotacional de un campo vectorial es nulo, entonces puede expresarse como el gradiente de un campo escalar. El campo eléctrico creado por una carga puntual verifica esta condición. En efecto, según (11.8)

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} \vec{u}_r$$

pero

$$\frac{\vec{u}_r}{r^2} = -\text{grad}\left(\frac{1}{r} + C'\right)$$

como puede comprobarse mediante un cálculo directo, luego

$$\vec{E} = -\text{grad}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C\right) \quad (11.14)$$

y, en definitiva

$$\vec{E} = -\text{grad } V \quad (11.15)$$

por lo que

$$\text{rot } \vec{E} = \vec{0} \quad (11.16)$$

A la función  $V$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} + C \quad (11.17)$$

se le denomina potencial electrostático creado por la carga puntual.  $C$  es una constante de integración de valor arbitrario que para eliminarla de la expresión basta con admitir que, en puntos muy alejados de la carga ( $r \rightarrow \infty$ ) el potencial vale 0. En estas condiciones  $C$  es nula y el potencial electrostático toma la forma

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r} \quad (11.18)$$

Si el campo  $\vec{E}$  es producido por un conjunto de cargas  $q_i$  ( $i=1, \dots, n$ ), llamando  $\vec{E}_i$  al campo creado por la carga  $q_i$ , y  $V_i$  a su función potencial asociada, resulta evidente que

$$\vec{E} = \sum_i^n \vec{E}_i = -\sum_i^n \text{grad } V_i = -\text{grad} \left( \sum_i^n V_i \right) \quad (11.19)$$

Por tanto,  $\vec{E}$  deriva del potencial  $V$

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \sum_i^n \frac{q_i}{r_i} \quad (11.20)$$

En el caso del campo creado por distribuciones continuas de carga, los campos dados por (11.11), (11.12) y (11.13) derivan de las siguientes funciones potenciales

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{\lambda ds}{r} \quad (11.21)$$

para el caso de una distribución lineal de carga;

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iint_S \frac{\sigma ds}{r} \quad (11.22)$$

si la carga está distribuida sobre una superficie  $S$  y

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \iiint_V \frac{\rho ds}{r} \quad (11.23)$$

en el caso de una distribución volumétrica de carga.

Puesto que  $\vec{E}$  deriva de potencial, su circulación a lo largo de una curva  $C$  es

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int -(\text{grad } V) \cdot d\vec{l} = -\int_{V_A}^{V_B} dV = V_A - V_B \quad (11.24)$$

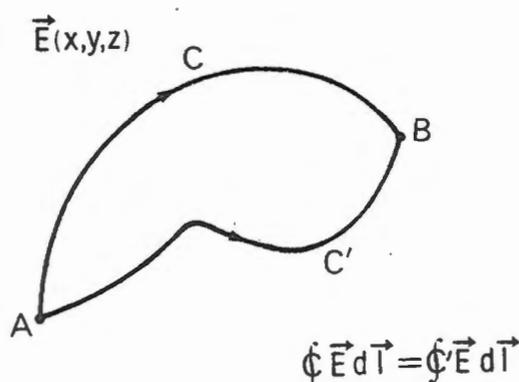


Fig. 11.7

es decir, la diferencia de potencial entre dos puntos es igual a la circulación del campo eléctrico a lo largo de cualquier curva que una dichos puntos. La circulación a lo largo de una curva cerrada es nula:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Un aspecto importante del potencial electrostático es su relación con la energía potencial asociada a las fuerzas electrostáticas. Así, una carga  $q$  situada en un campo eléctrico  $\vec{E}$ , está sometida a una fuerza

$$\vec{f} = q\vec{E} = -q \text{grad } V = -\text{grad } (qV) = -\text{grad } U$$

es decir, las fuerzas electrostáticas también son conservativas y la energía potencial asociada es

$$U = qV \tag{11.25}$$

El trabajo realizado por dichas fuerzas al desplazar una carga  $q$  desde un punto A hasta otro B es, por tanto

$$W_{AB} = \int \vec{f} \cdot d\vec{l} = U_A - U_B = q(V_A - V_B) \tag{11.26}$$

Esta relación permite definir la unidad de diferencia de potencial (ddp), ya que  $V_A - V_B = 1$ , si  $q = 1C$  y  $W_{AB} = 1J$ . En el S.I. dicha unidad es el voltio (V): un voltio es la ddp existente entre dos puntos de modo que, al desplazar una carga de un culombio de uno a otro, la fuerza eléctrica realiza un trabajo de un julio. Las dimensiones del potencial son, pues,

$$[V] = \frac{[W]}{[Q]} = ML^2 T^{-3} I^{-1}$$

### Nota complementaria 11.1. Estudio del dipolo eléctrico

Se denomina dipolo eléctrico a un sistema formado por dos cargas puntuales, de signos opuestos, separadas por una distancia  $\ell$ , muy pequeña frente a las distancias a las que se estudia el campo producido.

Denominaremos momento dipolar eléctrico

$$\vec{p} = q\vec{\ell} \quad (11.27)$$

donde  $\vec{\ell}$  es el vector que une a las cargas del dipolo y va dirigido desde la carga negativa hacia la positiva.

Calculemos el potencial creado por el dipolo en un punto P (Fig. 11.8)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} q \left( \frac{1}{r_A} - \frac{1}{r_B} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{r_B - r_A}{r_A r_B} \quad (11.28)$$

Ahora bien, admitiendo que  $r \gg \ell$ , resulta

$$r_A r_B \approx r^2$$

y

$$r_B - r_A \approx HB = \ell \cos\theta$$

En definitiva

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q\ell \cos\theta}{r^2} \quad (11.29)$$

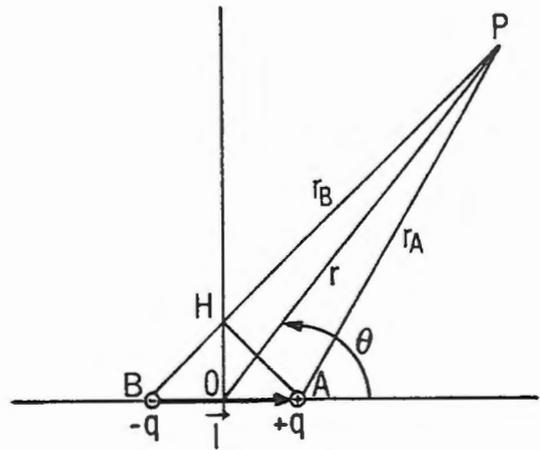


Fig. 11.8

o, teniendo en cuenta (11.27)

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{\vec{p} \cdot \vec{r}}{r^3} \quad (11.30)$$

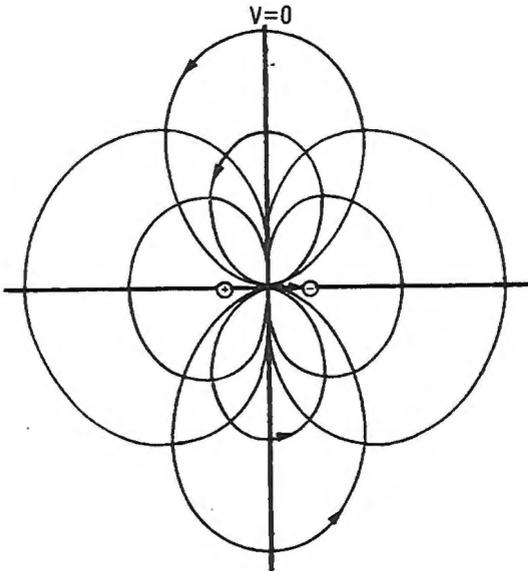


Fig. 11.9

Una vez obtenido el potencial, puede calcularse el campo como

$$\vec{E} = -\text{grad } V$$

En la figura 11.9 se representan las líneas de campo (con flechas) y equipotenciales para un dipolo eléctrico. Las superficies equipotenciales se engendran por revolución de estas líneas equipotenciales alrededor del eje del dipolo.

Consideremos ahora la acción ejercida por un campo eléctrico uniforme sobre un dipolo eléctrico.

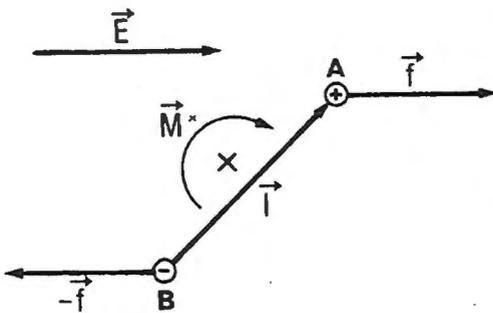


Fig. 11.10

La resultante de las fuerzas es nula, ya que  $\vec{E}$  toma el mismo valor en los puntos A y B (Fig.11.10).

No obstante, el dipolo está sometido a un par  $\vec{M}$  cuyo valor es, tomando momentos con respecto a B

$$\vec{M} = \vec{l} \times q\vec{E} = \vec{p} \times \vec{E} \quad (11.31)$$

El par  $\vec{M}$  tiende a orientar al dipolo en la dirección del campo.

### 11.5. Flujo del campo eléctrico. Teorema de Gauss

Sea una carga puntual  $q$  situada en  $O$ , y una superficie cerrada  $S$  que rodea a  $O$ . El flujo elemental del campo  $\vec{E}$ , creado por  $q$ , a través de un elemento de superficie  $d\vec{S}$  perteneciente a  $S$ , es

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (11.32)$$

donde  $d\vec{S}$  está orientado desde el interior de  $S$  hacia el exterior

Teniendo en cuenta el valor de  $\vec{E}$ , dado por (11.8), la ecuación (11.32) se transforma en

$$d\phi = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{r^2} dS \cos\alpha = \frac{q}{4\pi\epsilon_0} d\Omega \quad (11.33)$$

siendo

$$d\Omega = \frac{dS \cos\alpha}{r^2}$$

el ángulo sólido bajo el cual se ve la superficie  $dS$ , desde  $O$ .

El flujo total del campo a través de la superficie  $S$  es

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_0^{4\pi} d\Omega = \frac{q}{\epsilon_0} \quad (11.34)$$

es decir, resulta ser igual a la carga encerrada dividida por la permitividad,  $\epsilon_0$ . Obsérvese que, en el caso de que  $q$  hubiese estado situada fuera de la superficie, el flujo  $\phi$  sería nulo.

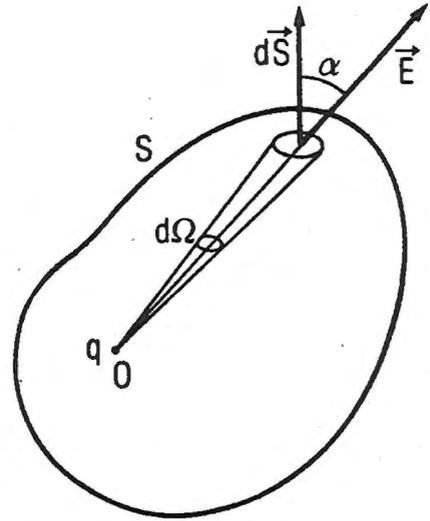


Fig. 11.11

Si la superficie  $S$  encierra a un conjunto de cargas  $q_i$  o a una distribución continua de carga,  $q$ , el flujo total será la suma de los flujos de los campos  $\vec{E}_i$  producidos por cada carga por separado, es decir

$$\phi = \sum_i \phi_i = \sum_i \frac{q_i}{\epsilon_0} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{11.35}$$

Estos resultados pueden resumirse en una única proposición denominada teorema de Gauss: “El flujo del campo eléctrico a través de una superficie cerrada  $S$ , es igual a la suma algebraica de las cargas situadas en el interior de  $S$ , dividida por  $\epsilon_0$ . Dicho flujo es independiente de la situación de las cargas dentro de  $S$  y de la existencia, o no, de las cargas exteriores a  $S$ ”.

El teorema de Gauss constituye una de las dos ecuaciones fundamentales de la electrostática (la otra es la ecuación 11.15, que determina la existencia de un potencial electrostático). Su importancia es esencial en la resolución de numerosos problemas.

### Ejemplo 11.1. Aplicación del teorema de Gauss

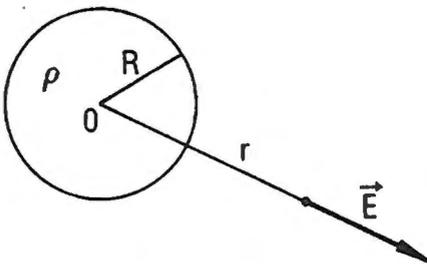


Fig. 11.12

Calcular el campo y potencial creados por una esfera de radio  $R$ , cargada uniformemente con una densidad volumétrica de carga  $\rho$ .

**Solución:**

- a) El campo  $\vec{E}$  posee simetría esférica, es decir, es radial y su módulo es una función de  $r$  (Fig. 11.12).

a.1)  $E(r > R)$

Tomemos una superficie esférica de radio  $r > R$  y con centro en  $O$ .

El flujo del campo a través de dicha superficie es

$$\phi = 4\pi r^2 E = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{4\pi R^3 \rho}{3}$$

de donde

$$E(r > R) = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2}$$

a.2)  $E(r < R)$

Del mismo modo, para una superficie de radio  $r < R$ , y centro en  $O$ , el flujo es

$$\phi = 4\pi r^2 E = \frac{Q'}{\epsilon_0}$$

donde  $Q'$  es la carga encerrada en el interior de la superficie, es decir

$$Q' = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho$$

Por tanto

$$E = \frac{Q'}{4\pi\epsilon_0 r^2} = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

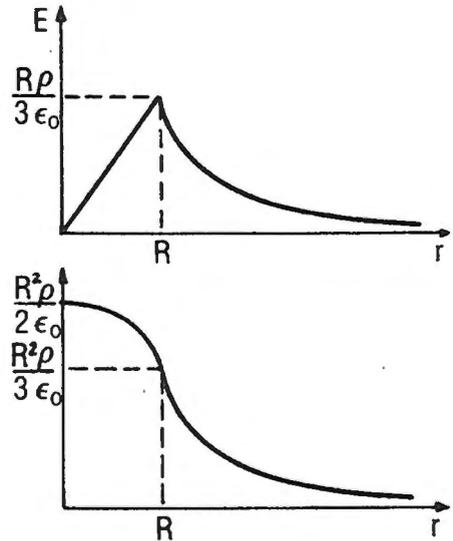


Fig. 11.13

La figura 11.13 muestra la variación de  $E$  en función de la distancia al centro de la distribución.

Obsérvese que el campo no presenta discontinuidades.

- b) Por las mismas razones de simetría antes expuestas, las superficies equipotenciales son superficies esféricas con centro en  $O$ , es decir  $V = V(r)$ . Una vez obtenido  $E(r)$ , el potencial puede calcularse como

$$V = -\int E \, dr + cte$$

b.1) Si  $r > R$ , entonces

$$V = \int -\frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r^2} dr + cte = \frac{R^3 \rho}{3\epsilon_0 r}$$

siendo nula la constante de integración, ya que se admite que  $V(r = \infty) = 0$

b.2) Si  $r < R$ , entonces

$$V = -\int \frac{\rho r}{3\epsilon_0} dr + cte = -\frac{\rho r^2}{6\epsilon_0} + cte$$

el valor de la constante puede calcularse teniendo en cuenta que, según b.1), el potencial correspondiente a  $r = R$  es

$$V_R = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0}$$

Por tanto

$$cte = \frac{R^2 \rho}{3\epsilon_0} + \frac{\rho R^2}{6\epsilon_0} = \frac{\rho R^2}{2\epsilon_0}$$

y

$$V(r \leq R) = \frac{\rho}{2\epsilon_0} \left( R^2 - \frac{r^2}{3} \right)$$

La figura 11.13, muestra la variación de  $V$  en función de  $r$ .

**Ejemplo 11.2. Campo creado por un plano uniformemente cargado**

Sea un plano cargado con una densidad superficial de carga  $\sigma$ . Las superficies equipotenciales son planos paralelos al mismo, por lo que el campo eléctrico será normal al plano.

Consideremos un cilindro normal al plano, de bases  $dS$ . El flujo del campo eléctrico se produce únicamente a través de las bases del cilindro, y por el teorema de Gauss debe verificarse que

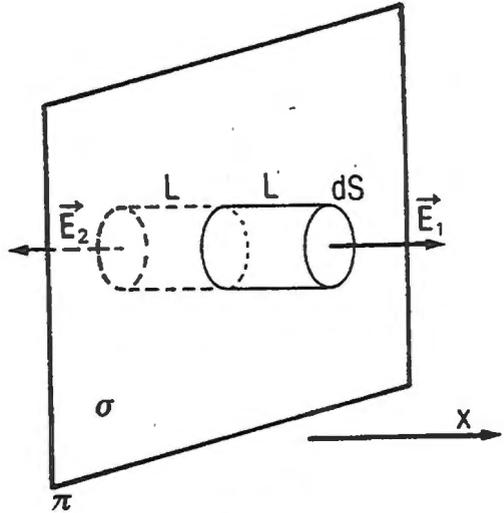


Fig. 11.14

$$E_1 dS + E_2 dS = \frac{\sigma dS}{\epsilon_0}$$

es decir

$$E_1 + E_2 = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

pero, por razones de simetría,  $E_1 = E_2 = E$ , luego

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

Es decir, el campo es uniforme a cada lado del plano. La figura muestra la variación de  $E$ . Obsérvese la discontinuidad que aparece en el valor del campo al pasar de uno a otro lado del plano. Dicha discontinuidad vale

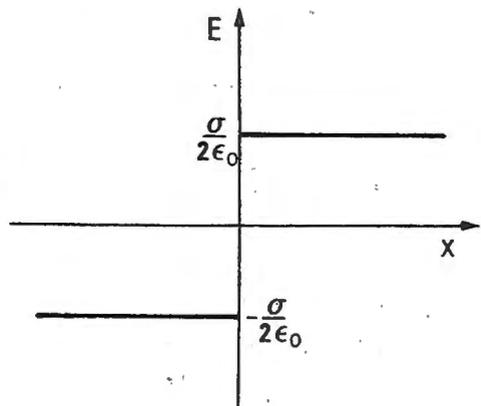


Fig. 11.15

$$\Delta E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$$

### 11.6. Teorema de Gauss en forma diferencial. Ecuaciones de Poisson y Laplace

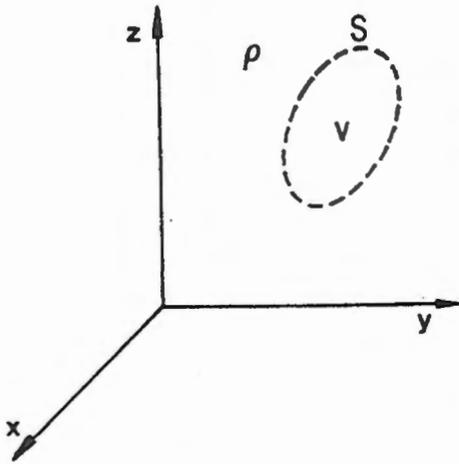


Fig. 11.16

Sea una región del espacio en la que hay una distribución continua de carga, de densidad volumétrica  $\rho$ . El teorema de Gauss permite establecer una relación local entre el campo en un punto P y la densidad de carga  $\rho$  en dicho punto.

En efecto, consideremos un volumen V cuya superficie exterior es S. A partir del teorema de Gauss resulta evidente que

$$\phi = \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \quad (11.36)$$

Pero teniendo en cuenta el teorema de la divergencia

$$\iint \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \text{div } \vec{E} dv$$

por lo que (11.36) puede escribirse como

$$\iiint_V \text{div } \vec{E} dv = \iiint_V \frac{\rho}{\epsilon_0} dv \quad (11.37)$$

Además la ecuación (11.37) se verifica para cualquier volumen v, por lo que los integrandos de ambos miembros deben ser iguales en cualquier punto del espacio. Es decir

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.38)$$

En los puntos de densidad de carga nula,  $\rho = 0$ , la ecuación anterior se transforma en

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (11.39)$$

Las ecuaciones anteriores constituyen la expresión diferencial del teorema de Gauss. Hay que señalar que dichas ecuaciones son relaciones locales entre el campo eléctrico y la densidad de carga en un punto. En ellas aparecen las variaciones del campo en la vecindad de un sólo punto. Por el contrario, la expresión (11.34) constituye la forma integral de dicho teorema: en ella intervienen los valores del campo eléctrico en todos los puntos de una superficie.

Las ecuaciones (11.38) y (11.39) pueden expresarse en función del potencial  $V$ . En efecto, teniendo en cuenta (11.15), resulta

$$\operatorname{div} \vec{E} = \operatorname{div}(-\operatorname{grad} V) = -\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}\right) = -\Delta V \quad (11.40)$$

Por tanto, (11.38) y (11.39) pueden escribirse como sigue

$$\Delta V = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (11.41)$$

y, para puntos con  $\rho = 0$ .

$$\Delta V = 0 \quad (11.42)$$

La ecuación (11.41) recibe el nombre de ecuación de Poisson y permite el cálculo del potencial cuando se conoce la densidad de carga y la permitividad del medio.

La ecuación (11.42) se denomina ecuación de Laplace, y con ella puede determinarse el potencial en el espacio exterior a la zona cargada.

**Ejemplo 11.3**

Sea una placa de espesor  $a$  y extensión infinita, cargada uniformemente con una densidad de carga  $\rho$ . Determinar, el campo eléctrico creado por esta distribución en el interior y exterior de la placa.

**Solución:**

Por razones de simetría, las superficies equipotenciales son planos paralelos a la placa, y el campo eléctrico es simétrico con relación al plano central de la placa. Es decir, teniendo en cuenta el sistema de referencia mostrado en la figura 11.17

$$\vec{E} = E(x) \vec{i}$$

con

$$E(0) = 0$$

Aplicando la ecuación (11.38) resulta

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}; \quad -a/2 < x < a/2$$

$$\text{div } \vec{E} = 0; \quad x < -a/2; \quad x > a/2$$

Pero, es este caso,

$$\text{div } E = \frac{dE}{dx}$$

luego

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{en el interior de la placa}$$

$$\frac{dE}{dx} = 0 \quad \text{en el exterior}$$

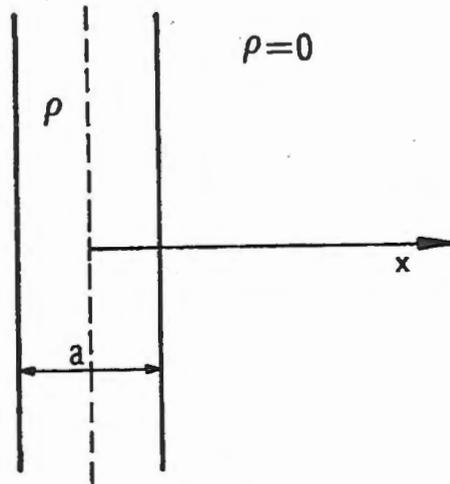


Fig. 11.17

Integrando la primera ecuación

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x + cte$$

pero  $E(0) = 0 \rightarrow cte = 0$ , luego, en el interior de la placa

$$E = \frac{\rho}{\epsilon_0} x; \quad -a/2 < x < a/2$$

En el borde de la placa  
( $x = a/2$ )

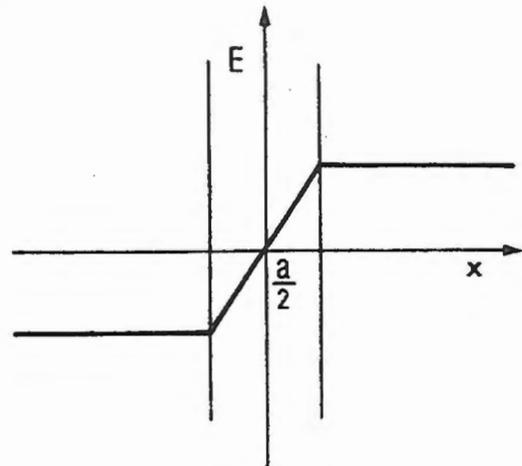
$$E(a/2) = \rho a / 2\epsilon_0$$

El campo en el exterior de la placa es constante:

$$\frac{dE}{dx} = 0 \rightarrow E = cte$$

y, teniendo en cuenta su valor en el borde de la distribución, resulta

$$E = \frac{\rho a}{2\epsilon_0}; \quad (x) a/2)$$



*Fig. 11.18*

La figura 11.18 muestra la variación de E en función de x.



## PROBLEMAS

- P.11.1. En los vértices de un triángulo equilátero de lado  $a$  hay situadas tres cargas iguales de valor  $-q$ . En su centro se coloca una carga positiva  $Q$
- a) Calcular el valor de  $Q$  para que la fuerza resultante sobre cada una de las tres cargas negativas sea nula.
  - b) Calcular la energía potencial de la carga  $Q$ .

### SOLUCIÓN

$$\text{a) } Q = \frac{|q|}{\sqrt{3}}$$

$$\text{b) } U = \frac{3\sqrt{3}qQ}{4\pi\epsilon_0 a}$$

- P.11.2. Una carga  $q_1$ , negativa, está situada en el origen de un sistema de coordenadas. En el punto  $A(d, 0, 0)$  se encuentra otra carga  $q_2$ , positiva. Determinar cuál es la superficie equipotencial  $V = 0$ .

### SOLUCION

Es una superficie esférica, con centro el  $P(x_o, y_o, z_o)$  y radio  $r$

$$x_o = q_1^2 d / (q_1^2 - q_2^2)$$

$$y_o = z_o = 0$$

$$r = \left| q_1 q_2 d / [q_1^2 - q_2^2] \right|$$

- P.11.3. Calcular, por integración, el campo eléctrico creado por un hilo rectilíneo, de longitud infinita, cargado uniformemente con una densidad lineal de carga  $\lambda$ , en un punto situado a una distancia  $r$  del hilo.

### **SOLUCION**

$$E = \lambda / 2\pi\epsilon_0 r$$

- P.11.4. Calcular el campo creado por un hilo rectilíneo de longitud  $L$ , cargado con una densidad lineal  $\lambda$ , en un punto  $P$ , equidistante de sus extremos a una distancia  $R$  de hilo.

### **SOLUCION**

$$E = \lambda / \left[ 2\pi\epsilon_0 R (1 + 4R^2 / L^2)^{1/2} \right]$$

- P.11.5. Dado un anillo de radio  $R$ , cargado uniformemente con una densidad lineal de carga  $\lambda$ , calcular el campo eléctrico y el potencial en un punto de su eje, situado a una distancia  $z$  del centro del anillo.

### **SOLUCION**

$$E = \lambda z R / 2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{3/2}$$

$$V = \lambda R / 2\epsilon_0 (R^2 + z^2)^{1/2}$$

- P.11.6. Una gotita de agua de 0,01 cm de diámetro se encuentra en el interior de un campo eléctrico vertical, uniforme, de valor  $E = 1000$  V/m. Determinar la carga que debe tener la gotita para que no caiga.

**SOLUCION**

$$Q = 5'13 \cdot 10^{-12} \text{ C}$$

- P.11.7. Calcular el campo eléctrico creado por un disco circular, cargado uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ , en un punto P de su eje. ¿Cuánto vale el campo si P está infinitamente próximo al centro del disco?

**SOLUCION**

a)  $E = \sigma \Omega / 4\pi\epsilon_0$

siendo  $\Omega$  el ángulo sólido bajo el cual se ve el disco desde P.

b)  $E = \sigma / 2\epsilon_0$

- P.11.8. Supóngase que el campo creado por una carga puntual fuese de la forma

$$\vec{E} = \frac{1}{4n\epsilon_0} \frac{q}{r^n} \vec{u}_r$$

con  $n \neq 2$ . a) Calcular, en estas condiciones, el flujo de este campo hipotético a través de una esfera de radio R, en cuyo centro se encuentra la "carga" q. b) ¿Se verifica el teorema de Gauss?

**SOLUCION**

a)  $\phi = q R^{2-n} / \epsilon_0$

b) No: El teorema de Gauss es una consecuencia de  $n = 2$ .

P.11.9. Calcular el campo y potencial creados por una esfera de radio  $R$ , cuya superficie está cargada uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$

**SOLUCION**

$$E(r) = 0 \qquad r < R$$

$$E(r) = R^2 \sigma / \epsilon_0 r^2 \qquad r > R$$

$$V(r) = R^2 \sigma / \epsilon_0 r \qquad r \geq R$$

$$V(r) = R \sigma / \epsilon_0 \qquad r \leq R$$

P.11.10. Calcular el campo creado por un cilindro de revolución, de radio  $R$  y longitud infinita, cuya superficie está cargada uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

**SOLUCION**

$$E(r) = R \sigma / \epsilon_0 r \qquad r > R$$

$$E = 0 \qquad r < R$$

P.11.11. Sea un dipolo de carga  $\pm q$  separadas una distancia  $a$ . Calcular el flujo del campo eléctrico creado por dicho dipolo a través de la superficie equipotencial  $V = 0$ . (Cálculase por integración directa y por aplicación del teorema de Gauss).

**SOLUCION**

$$\phi = q / \epsilon_0$$

- P.11.12. Sea  $S$  una superficie cerrada y  $P$  un punto de  $S$ . En  $P$  se sitúa una carga puntual  $q$ . Calcular el flujo del campo creado por  $q$  a través de  $S$ .

**SOLUCION**

$$\phi = q / \epsilon_0$$

- P.11.13. La atmósfera terrestre contiene cargas libres, repartidas de forma uniforme con densidad volumétrica  $\rho$ . Determinar  $\rho$  sabiendo que la diferencia de potencial entre el suelo y un punto  $P$  situado a 100 m de altura es  $V_p - V_0 = 9500 \text{ V}$ . El campo eléctrico junto al suelo vale  $100 \text{ V/m}$  y va dirigido hacia el interior.

**SOLUCION**

$$\rho = 8'85 \cdot 10^{-13} \text{ C / m}^3$$

- P.11.14 Entre los planos  $x = 0$  y  $x = d$  existe una distribución volumétrica de carga de densidad

$$\rho = \rho_0 x / d$$

Calcular  $E(x)$  y  $V(x)$  entre dichos planos sabiendo que  $V(x = 0) = V_1$  y que  $V(x = d) = V_2$

**SOLUCION**

$$E(x) = \frac{\rho_0 x^2}{2d \epsilon_0} + \frac{V_1 - V_2}{d} - \frac{\rho_0 d}{6 \epsilon_0}$$

$$V(x) = \frac{-\rho_0 x^3}{6d\epsilon_0} - \left[ \frac{V_1 - V_2}{d} - \frac{\rho_0 d}{6\epsilon_0} \right] x + V_1$$

## CAPÍTULO 12

### CONDUCTORES CARGADOS EN EQUILIBRIO

#### *12.1. Conductores y dieléctricos. Metales*

Experimentalmente puede comprobarse que determinadas sustancias poseen la propiedad de permitir el movimiento de cargas eléctricas a través de ellas, mientras que otras impiden tal flujo. Las primeras reciben el nombre de conductores, y las del segundo tipo se denominan dieléctricos.

De entre las muchas sustancias dieléctricas podemos destacar las siguientes: aire seco, plásticos, ebonita, resina, porcelana, los hidrocarburos, etc. Por el contrario, son conductores los metales y sus aleaciones, las soluciones acuosas de ácidos, bases y sales, etc.

La diferencia radical entre el comportamiento de un conductor y de un dieléctrico ante un campo eléctrico exterior hay que buscarla en la misma estructura de la materia, que será explicada con detalle en la última parte de este libro. No obstante, a los efectos que nos ocupan, estudio desde el punto de vista macroscópico de los fenómenos electrostáticos en la materia, admitiremos un modelo simplificado según el cual los conductores poseen cargas libres susceptibles de ser puestas en movimiento bajo la acción de cualquier campo eléctrico, por débil que éste sea. Por el contrario, en un dieléctrico, las cargas eléctricas que forman parte de los átomos o moléculas que lo constituyen están ligadas a los mismos.

De esta forma, al aplicar un campo eléctrico a un conductor, sus cargas libres se desplazarán, no alcanzándose el equilibrio electrostático hasta que el campo eléctrico en el interior del conductor se haya anulado. En un dieléctrico, las cargas no pueden desplazarse de un átomo a otro y la fuerza eléctrica que aparece bajo la acción de un campo eléctrico exterior no produce más efecto que una ligera redistribución de cargas en el seno de los átomos o moléculas a los que pertenecen.

En esta lección nos ceñiremos al estudio del equilibrio en conductores metálicos. Los metales están formados por iones positivos que ocupan posiciones fijas según un orden regular, dando lugar a una red cristalina. Los electrones que se han desprendido de los átomos metálicos circulan libre y desordenadamente en el seno del conductor. Dichos electrones libres aparecen en gran número (del orden de un electrón libre por cada átomo) formando una especie de “gas electrónico” que es el responsable de los fenómenos de conducción eléctrica.

En condiciones normales, en un volumen dado del conductor existe tanta carga positiva (debida a los iones fijos) como negativa (electrones libres). El metal es eléctricamente neutro. Un metal puede cargarse negativamente si, por cualquier procedimiento, se añade un exceso de electrones libres. Del mismo modo, una región con electrones en defecto aparecerá cargada positivamente.

### *12.2. Equilibrio de un conductor*

De lo expuesto anteriormente se deduce que, para que un conductor se encuentre en equilibrio electrostático es preciso que el campo eléctrico en su interior sea nulo

$$\vec{E} = \vec{0} \tag{12.1}$$

La ecuación (12.1) implica, teniendo en cuenta la definición de potencial electrostático, que

$$V = \text{cte} \tag{12.2}$$

es decir, el volumen del conductor es equipotencial y la superficie que lo limita es una superficie equipotencial.

Por otra parte, a partir de la expresión diferencial del teorema de Gauss, en cualquier punto del conductor se cumple que

$$\text{div } \vec{E} = 0 = \frac{\rho}{\epsilon_0} \rightarrow \rho = 0 \tag{12.3}$$

es decir, la densidad volumétrica de carga en el interior del conductor es nula en todos sus puntos. Este resultado implica que en cualquier elemento de volumen del

conductor existen tantas cargas negativas (electrones libres) como positivas (iones fijos) siendo su carga neta nula. Si el conductor está cargado, esta carga no compensada debe estar distribuida sobre la superficie.

Los resultados precedentes siguen siendo válidos en el caso de un conductor con una cavidad que no contiene cargas (Fig. 12.1). En efecto, la superficie interior es equipotencial y el potencial dentro de la cavidad debe ser constante (lo contrario implicaría la existencia de un máximo o un mínimo de potencial en una región sin cargas, lo que, como se explicará más adelante, es imposible). Por continuidad, dicho potencial es el del conductor.

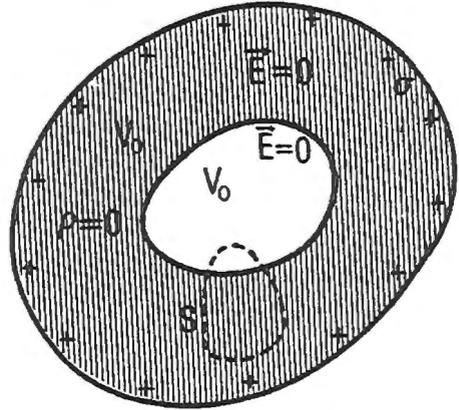


Fig. 12.1

Al ser el potencial uniforme, el campo eléctrico es nulo, no sólo en el conductor sino también en la cavidad.

Finalmente, la densidad superficial de carga en la superficie interior es nula, como puede comprobarse al aplicar el teorema de Gauss a una superficie cerrada  $S$  como la mostrada en la figura 12.1; el flujo a través de  $S$  es nulo ( $\vec{E} = \vec{0}$ ), y al no haber cargas en la masa conductora, ni en la cavidad, tampoco las habrá sobre la superficie interior del conductor.

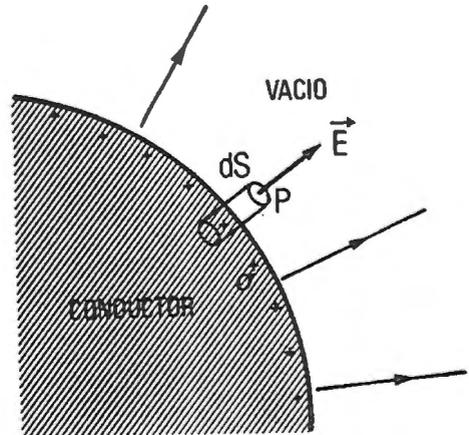


Fig. 12.2

En definitiva, en un conductor en equilibrio, con o sin cavidad, el potencial es uniforme, el campo eléctrico es nulo así como la densidad volumétrica de carga; toda la carga neta del conductor se encuentra distribuida sobre su superficie exterior.

### 12.2.1. Teorema de Coulomb

A partir de los resultados precedentes puede obtenerse una expresión del campo eléctrico en un punto infinitamente próximo a la superficie del conductor.

Supóngase un conductor cargado. Toda la carga está distribuida sobre su superficie: denominaremos  $\sigma$  a la correspondiente densidad de carga. Por otra parte, al ser la superficie del conductor equipotencial, las líneas de campo son perpendiculares a la misma.

Apliquemos el teorema de Gauss a una superficie como la mostrada en la figura 12.2, un cilindro de bases,  $dS$ , paralelas a la superficie del conductor cuya generatriz es perpendicular a dicha superficie. El flujo del campo eléctrico a través de la superficie exterior de este cilindro es

$$d\phi = \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

ya que el flujo a través de la superficie lateral es nulo. La carga encerrada en el cilindro es

$$dq = \sigma dS$$

Por tanto, a partir del teorema de Gauss se deduce que

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \tag{12.4}$$

resultado que constituye el denominado teorema de Coulomb.

Si se designa por  $\vec{u}_n$  al versor normal a la superficie del conductor y dirigido hacia afuera, la ecuación (12.4) puede escribirse como

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n \tag{12.5}$$

Obsérvese que  $\vec{E}$  va dirigido hacia el exterior o hacia el interior del conductor según que  $\sigma$  sea positiva o negativa, respectivamente.

Hay que señalar que el campo evaluado por (12.4) y (12.5) es el creado por toda la carga superficial del conductor. Dicho campo puede ser considerado como la superposición de dos campos  $\vec{E}_1$  y  $\vec{E}_2$ .  $\vec{E}_1$  es el creado por las cargas próximas a P y situadas en el disco dS, intersección del cilindro antes considerado con la superficie del conductor. El resto de la superficie del conductor crea el campo  $\vec{E}_2$ .

El campo  $\vec{E}_1$  puede ser calculado fácilmente (ver problema 11.7) y su valor es

$$\vec{E} = (\sigma / 2 \epsilon_0) \vec{u}_n$$

Por tanto, el campo  $\vec{E}_2$ , creado por el resto de las cargas superficiales del conductor es

$$\vec{E}_2 = \vec{E} - \vec{E}_1 = \frac{\sigma}{2 \epsilon_0} \vec{u}_n \quad (12.6)$$

Finalmente, cabe señalar que la expresión (12.5) del campo  $\vec{E}$  es válida con independencia de que el conductor se encuentre o no en presencia de otros conductores cargados o cargas puntuales. Ahora bien, si hay otras cargas, el campo  $\vec{E}_2$  es entonces el producido por **todas** las cargas, excepto aquellas ubicadas en el elemento de superficie dS próximo al punto P.

### 12.2.2. Presión electrostática

Como se ha indicado anteriormente en un conductor en equilibrio, cada elemento de superficie dS cargado con una densidad de carga  $\sigma$ , crea en su vecindad un campo  $\vec{E}_1 = \sigma / 2 \epsilon_0$  mientras que el resto de las cargas del conductor crean un campo  $\vec{E}_2 = \sigma / 2 \epsilon_0$ . Por tanto, la carga  $dq = \sigma dS$  de dicho elemento está sometida a una fuerza

$$d\vec{F} = \sigma dS \vec{E}_2 = \frac{\sigma^2}{2 \epsilon_0} dS \vec{u}_n \quad (12.7)$$

Dicha fuerza es perpendicular a la superficie del conductor y va dirigida hacia el exterior. Se denomina **presión electrostática** a la fuerza por unidad de superficie

$$p = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \tag{12.8}$$

La existencia de estas fuerzas puede comprobarse en el caso de conductores deformables. Por ejemplo, si se carga una pompa de jabón, ésta aumentará de tamaño en el momento de carga.

### 12.3. Fenómenos de influencia electrostática

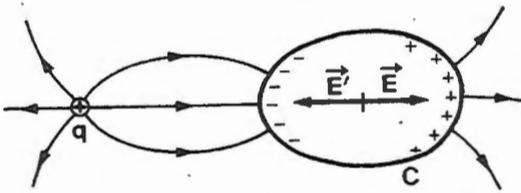


Fig. 12.3

Sea un conductor  $C$ , no cargado, en cuyas proximidades se ha situado una carga puntual  $q$  (Fig. 12.3). Esta carga crea en todo punto del espacio un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Dicho campo desplaza a los electrones libres del conductor, de forma que aparece sobre su superficie una distribución superficial de carga como la que se muestra

en la figura. El movimiento de cargas en el conductor cesa en el momento en que el campo en su interior se anula, esto es, cuando la distribución superficial de cargas originada sobre el conductor crea un campo  $\vec{E}'$  igual y opuesto al campo  $\vec{E}$  creado por la carga puntual. Se dice que el conductor  $C$  se ha cargado por influencia.

Una vez alcanzado el equilibrio se cumplen las propiedades antes estudiadas: campo nulo en el interior del conductor, potencial uniforme en él y distribución superficial de cargas. Obsérvese que, si bien han aparecido cargas sobre la superficie de  $C$ , su carga neta sigue siendo nula.

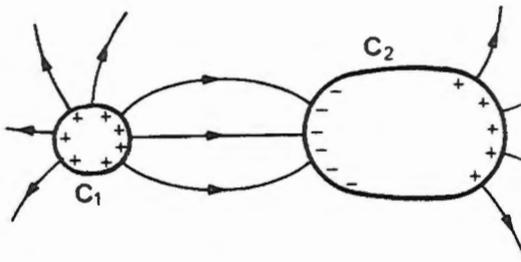


Fig. 12.4

Un fenómeno similar podría obtenerse si se acerca un conductor neutro,  $C_2$ , a otro conductor cargado  $C_1$ . El campo eléctrico creado por las cargas de  $C_1$  da lugar a la aparición de

cargas superficiales sobre  $C_2$ . A su vez, el campo eléctrico creado por las cargas que aparecen en  $C_2$  por influencia altera la distribución de cargas de  $C_1$  (Fig. 12.4). En definitiva, la influencia electrostática supone una modificación de las distribuciones superficiales de carga en los dos conductores, de forma que el campo creado en cada conductor por todas las cargas (las propias y las del otro) sea nulo.

Pasemos a estudiar una importante propiedad que relaciona las cargas superficiales que aparecen en los conductores por influencia: el teorema de los elementos correspondientes.

Sean dos conductores  $C_1$  y  $C_2$  que presentan influencia (Fig. 12.5). Considérese sobre  $C_1$  un elemento de superficie  $dS_1$ . Las líneas de campo que parten de  $dS_1$  forman un tubo de campo que, al llegar a  $C_2$ , delimita un elemento de superficie  $dS_2$ . En estas condiciones, se dice que  $dS_1$  y  $dS_2$  son **elementos correspondientes**.

Aplicando el teorema de Gauss a la superficie cerrada formada por el tubo de campo y las superficies  $\Sigma_1$  y  $\Sigma_2$ , tomadas en el interior de  $C_1$  y  $C_2$ , resulta obvio que el flujo del campo a través de dicha superficie es nulo; por tanto

$$0 = \frac{dq_1 + dq_2}{\epsilon_0}$$

siendo  $dq_1$  y  $dq_2$  las cargas de los elementos  $dS_1$  y  $dS_2$ , respectivamente. En definitiva

$$dq_1 = -dq_2 \tag{12.9}$$

es decir, dos elementos correspondientes tienen cargas iguales y opuestas.

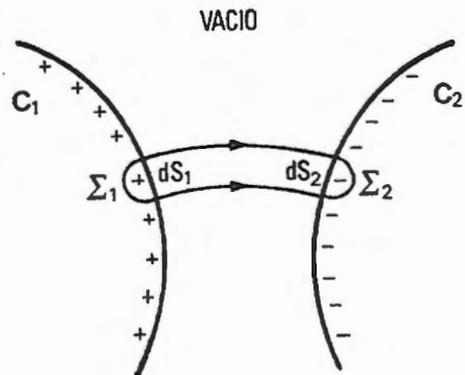
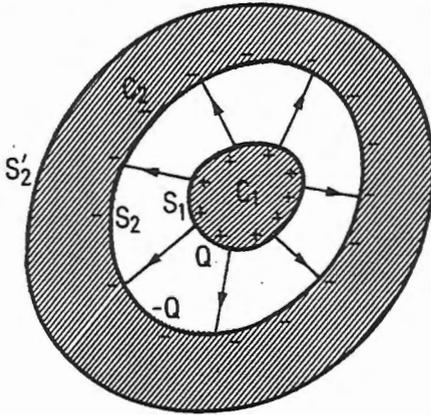


Fig. 12.5

Cuando el conductor  $C_2$  rodea totalmente al conductor  $C_1$  entonces la influencia entre ambos es total.

Si el conductor  $C_1$  está cargado positivamente, con carga total  $Q$ , entonces sobre la superficie interior de  $C_2$ ,  $S_2$  aparecerá una carga  $-Q$ .



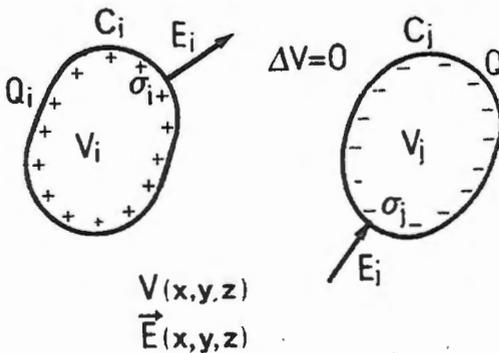
*Fig. 12.6*

Este resultado es una consecuencia del teorema de los elementos correspondientes, ya que todo elemento de  $S_1$  tiene su correspondiente en  $S_2$  y su viceversa.

En el caso en que la carga total de  $C_2$  sea  $Q_2$ , la superficie exterior,  $S_2'$ , tendrá una carga total  $Q_2 + Q$ , mientras que la superficie interior siempre tendrá una carga  $-Q$ , igual y opuesta a la de  $C_1$ .

## 12.4. Equilibrio de un sistema de conductores

### 12.4.1. Planteamiento del problema



*Fig.12.7*

Sea un conjunto de  $n$  conductores cargados y en equilibrio. El estudio del equilibrio de dicho sistema tiene como fin la determinación de la función potencial  $V(x,y,z)$  en cualquier punto del espacio, así como del campo eléctrico  $\vec{E}$  y de las densidades superficiales de carga de cada uno de los conductores.

Como punto de partida para la resolución de este problema se suponen conocidos alguno de los siguientes datos:

- Potencial  $V_i$ , de cada conductor, o bien
- Carga total,  $Q_i$ , de cada conductor.

El problema anterior queda resuelto si se obtiene la función  $V(x,y,z)$  que verifica en todos los puntos del espacio la ecuación de Laplace y que es compatible con las condiciones de contorno impuestas. Una vez conocido  $V(x,y,z)$ , el campo  $\vec{E}$  queda determinado por la relación  $\vec{E} = -\text{grad } V$ . La densidad superficial de carga en el conductor  $i$ -ésimo puede obtenerse calculando el campo eléctrico en la vecindad de su superficie y aplicando el teorema de Coulomb:

$$\sigma_i = \epsilon_0 E_i$$

En definitiva, desde el punto de vista matemático, el problema del equilibrio puede plantearse y resolverse como sigue:

- a) Si los datos de partida son los potenciales  $V_i$  de cada conductor, se trata de obtener una solución de la ecuación de Laplace,  $\Delta V = 0$ , que verifique las condiciones

$$V(P) = V_i \quad \forall P \in S_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

$$V_\infty = 0$$

donde  $S_i$  es la superficie del conductor  $i$ -ésimo.

- b) Si los datos conocidos son las cargas totales de cada conductor,  $Q_i$ , la solución de la ecuación de Laplace debe verificar las siguientes condiciones

$$\iint_{S_i} \sigma_i dS_i = \iint_{S_i} -\epsilon_0 \text{grad } V dS_i = Q_i \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

donde  $\sigma_i = -\epsilon_0 \text{grad } V$  es la densidad de carga en la superficie del conductor  $i$ -ésimo.

Hay que señalar que la resolución de estas ecuaciones presenta a menudo grandes dificultades matemáticas. No obstante, existen algunos procedimientos que permiten, en algunos casos, evitar la integración de la ecuación de Laplace.

### 12.4.2. Propiedades del equilibrio de un sistema de conductores

A continuación expondremos, sin demostración, algunas propiedades de las soluciones de el problema de equilibrio entre conductores, propiedades de gran importancia, tanto desde el punto de vista teórico como práctico.

- a) **Existe solución y ésta es única.** Es decir, dado un conjunto de conductores cargados, existe una y sólo una función que verifique la ecuación de Laplace y las condiciones de contorno impuestas (cargas o potenciales de los conductores).
  
- b) **Superposición de los estados de equilibrio.** Consideremos un conjunto de conductores y dos estados de equilibrio:
  - Estado 1, caracterizado por unos potenciales de los conductores  $V_i'$ , cuya solución es  $V'(x, y, z)$ .
  - Estado 2, caracterizado por unos potenciales  $V_i''$  y cuya solución es  $V''(x, y, z)$ .

Entonces, la solución de otro estado 3, en el cual los potenciales de los conductores son  $V_i = \alpha V_i' + \beta V_i''$  es

$$V = \alpha V' + \beta V'' \quad (12.10)$$

La superposición no afecta sólo al potencial, sino también al campo eléctrico y a la distribución de cargas. Así, si para el estado 1 se tiene un campo y unas densidades superficiales de carga  $\vec{E}'(x, y, z)$  y  $\sigma_i'$  y para el estado 2,  $\vec{E}''(x, y, z)$  y  $\sigma_i''$ , entonces el campo y densidades de carga para el estado 3 serán

$$\vec{E} = \alpha \vec{E}' + \beta \vec{E}'' \tag{12.11}$$

$$\sigma_i = \alpha \sigma'_i + \beta \sigma''_i$$

El principio de superposición tiene su justificación matemática en la linealidad de la ecuación de Laplace.

c) El potencial  $V$  no puede tener máximos ni mínimos relativos en puntos donde no hay cargas, como puede comprobarse fácilmente a partir del teorema de Gauss.

d) **Imágenes eléctricas.** Sea un sistema de conductores,  $C_i$ , cuyos potenciales son  $V_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Denominaremos  $S_i$  a la superficie del conductor  $i$ -ésimo.

Consideremos ahora otro sistema 2, idéntico al anterior salvo por el hecho de que uno de los conductores,  $C_1$  por ejemplo, ha sido sustituido por un conjunto de cargas puntuales  $q_1, q_2, \dots$ , situadas en el interior de  $S_1$  de forma

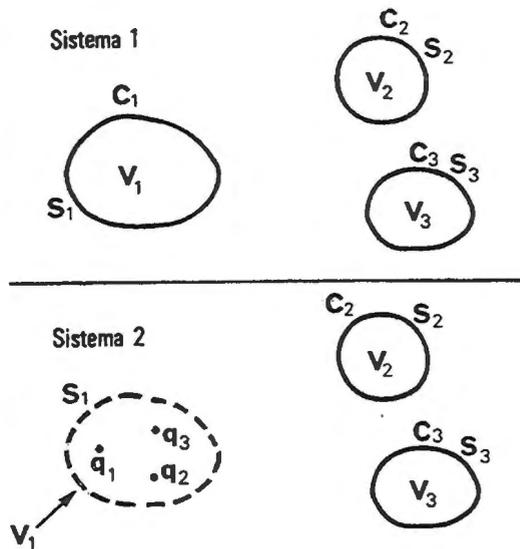


Fig. 12.8

que el potencial sobre  $S_1$  sigue valiendo  $V_1$  (Fig. 12.8). En estas condiciones, la solución correspondiente al sistema 2,  $V(x,y,z)$ , es idéntica, en todos los puntos exteriores a  $S_1$ , a la solución correspondiente al sistema 1. Se dice que el conjunto de cargas puntuales  $q_1, q_2, q_3 \dots$  que sustituye a las cargas de  $C_1$  en el sistema 1 es la imagen eléctrica de dicho conductor.

**Ejemplo 12.1**

Equilibrio de un sistema de conductores por integración de la ecuación de Laplace.

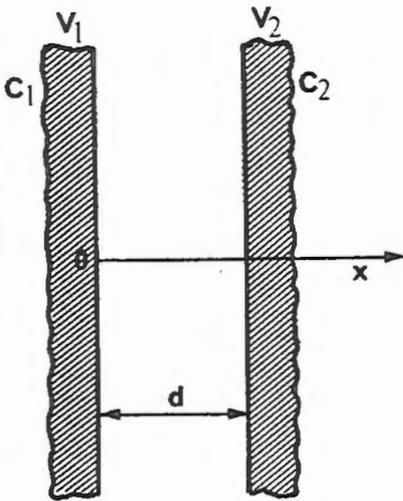


Fig. 12.9

Sea el sistema de la figura 12.9, formado por dos conductores con dos superficies planas y paralelas, de dimensión infinita, separados una distancia  $d$ .

Sabiendo que el conductor  $C_1$  está a potencial  $V_1$  y que el conductor  $C_2$  está a potencial  $V_2$ , calcular el campo y potencial electrostático en el espacio comprendido entre los dos conductores, así como la densidad superficial de carga en cada uno de ellos. (Admítase que  $V_1 > V_2$ ).

**Solución:** Por razones de simetría, las superficies equipotenciales son planos paralelos a las superficies de los conductores, y el campo eléctrico sólo tendrá componente en  $x$ . En definitiva

$$V = V(x)$$

Por tanto la ecuación de Laplace  $\Delta V = 0$  queda, en este caso como

$$\frac{d^2V}{dx^2} = 0$$

ecuación cuya integral es

$$V = k_1 x + k_2$$

donde  $k_1$  y  $k_2$  son dos constantes. Para la determinación de dichas constantes se parte de las condiciones de contorno:

$$V(x=0) = V_1$$

$$V(x=d) = V_2$$

En definitiva, las constantes resultan ser

$$k_1 = \frac{-(V_1 - V_2)}{d}$$

$$k_2 = V_1$$

Por tanto el potencial en el espacio entre conductores es

$$V(x) = -\frac{(V_1 - V_2)}{d}x + V_1$$

El campo eléctrico  $\vec{E}(x)$  se calcula como  $\vec{E} = -\text{grad } V$

$$\vec{E} = -\frac{dV}{dx} \vec{i} = \frac{V_1 - V_2}{d} \vec{i}$$

es decir, en este caso el campo es uniforme.

Una vez calculado el campo eléctrico, la densidad superficial de carga en cada conductor se obtiene a partir del teorema de Coulomb:

$$\vec{E} = \frac{\sigma}{\epsilon_0} \vec{u}_n$$

Así, para el conductor  $C_1$ ,

$$\vec{E} = \frac{V_1 - V_2}{d} \vec{i}$$

siendo  $\vec{u}_n = \vec{i}$ , por tanto

$$\frac{V_1 - V_2}{d} \vec{i} = \frac{\sigma_1}{\epsilon_0} \vec{i} \rightarrow \sigma_1 = \frac{V_1 - V_2}{d} \epsilon_0$$

En el caso del conductor  $C_2$ , el campo toma el mismo valor, pero  $\vec{u}_n = -\vec{i}$ . Por tanto

$$\frac{V_1 - V_2}{d} \vec{i} = -\frac{\sigma_2}{\epsilon_0} \vec{i} \rightarrow \sigma_2 = -\frac{V_1 - V_2}{d} \epsilon_0$$

Obsérvese que  $\sigma_1 = -\sigma_2$ , ya que la influencia entre los dos conductores es total.

### Ejemplo 12.2

Equilibrio en un sistema de conductores en el que se conocen las distribuciones de carga.

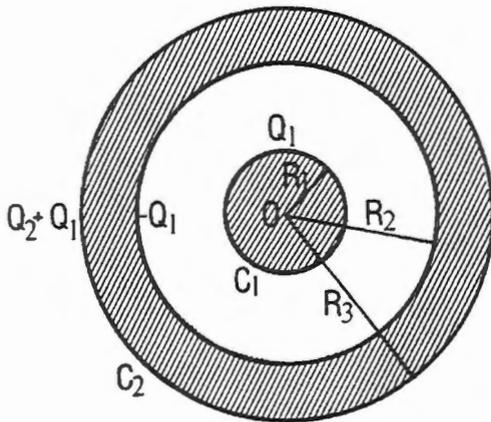


Fig. 12.10

Sea el sistema de la figura 12.11 constituido por una esfera conductora maciza, de radio  $R_1$  y una esfera hueca de radios  $R_2$  y  $R_3$ , concéntrica con la anterior. La carga de la esfera maciza es  $Q_1$  y la de la esfera hueca  $Q_2$ . Determinar el potencial en cada punto del espacio.

**Solución:** Por razones de simetría las superficies equipotenciales son superficies esféricas con centro en  $O$ :  $V = V(r)$ . Además, las cargas que aparecen sobre cada una de las superficies metálicas están distribuidas uniformemente.

La carga  $Q_1$  de la esfera de radio  $R_1$  está distribuida sobre su superficie.

Puesto que la influencia entre  $C_1$  y  $C_2$  es total, en la superficie interior de  $C_2$  aparece una carga  $-Q_1$  distribuida uniformemente. Sobre la superficie

exterior de  $C_2$  aparece una carga  $Q_1 + Q_2$ . De esta forma, la carga total de  $C_2$  es  $-Q_1 + Q_2 + Q_1 = Q_2$ .

En definitiva, el sistema de la figura equivale a tres distribuciones superficiales y esféricas de carga: una de radio  $R_1$  con carga total  $Q_1$ , y otra de  $R_2$  con carga  $-Q_1$  y una tercera de radio  $R_3$  y carga total  $Q_1 + Q_2$ .

El potencial creado por tales distribuciones en cada punto del espacio P, situado a una distancia  $r$  de O, es según los resultados del problema 11.9.

$$\text{a) } r \leq R_1 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{R_1} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_3} \right)$$

$$\text{b) } R_1 \leq r \leq R_2 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{R_2} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_3} \right)$$

$$\text{c) } R_2 \leq r \leq R_3 \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{R_3} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{R_3}$$

$$\text{d) } R_3 \leq r \quad V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \left( \frac{Q_1}{r} - \frac{Q_1}{r} + \frac{Q_1 + Q_2}{r} \right) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 + Q_2}{r}$$

Obsérvese que  $V$  es uniforme en los puntos de cada conductor (casos a y c) pero varía en el exterior de los conductores (casos b y d).

### Ejemplo 12.3

Método de las imágenes eléctricas.

Sea un plano conductor  $\pi$  conectado a tierra, y una carga puntual  $q$  situada a una distancia  $d$  de dicho plano.

Calcular la densidad superficial de carga que aparece sobre  $\pi$  por influencia.

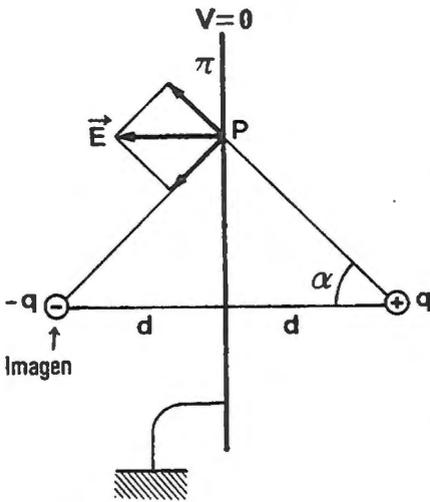


Fig. 12.11

Dicho plano puede ser sustituido por una o varias cargas puntuales situadas en la zona interior, de forma que el potencial creado por dichas cargas "imagen" más el creado por  $q$  sea nulo en cualquier punto  $P$  de  $\pi$ .

El número y situación de tales cargas imagen resultan evidentes en este caso. En efecto, teniendo en cuenta el estudio del dipolo realizado en la lección anterior, una carga  $-q$ , simétrica de  $q$  con respecto a  $\pi$  origina un potencial nulo en cualquier punto  $P$  de  $\pi$ . Dicha carga  $-q$  constituye la imagen eléctrica del plano conductor  $\pi$ .

El campo eléctrico en  $P$  se calcula a partir de los campos creados por  $q$  y  $-q$ .

$$E = 2 \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q}{(r^2 + d^2)} \cos \alpha$$

pero

$$\cos \alpha = \frac{q}{(r^2 + d^2)^{1/2}}$$

por tanto,

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{qd}{(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

dicho campo es perpendicular a  $\pi$  y dirigido hacia el interior.

A partir del teorema de Coulomb, la densidad de carga sobre  $\pi$  es

$$\sigma = \epsilon_0 E = \frac{qd}{2\pi(r^2 + d^2)^{3/2}}$$

negativa, puesto que  $\vec{E}$  va dirigido hacia el interior

### 12.5. Pantallas eléctricas

Considérese un conductor hueco,  $C$ , que se mantiene a potencial constante (conectándolo a tierra, por ejemplo). En estas condiciones,  $C$  constituye lo que se denomina una **pantalla eléctrica** ya que, como se demostrará más adelante, el potencial  $V(x,y,z)$  en el interior de la cavidad es independiente de la existencia y posición de cargas en el espacio exterior y viceversa, el potencial  $V(x,y,z)$  en el exterior es independiente de la existencia y posición de cargas dentro de la cavidad.

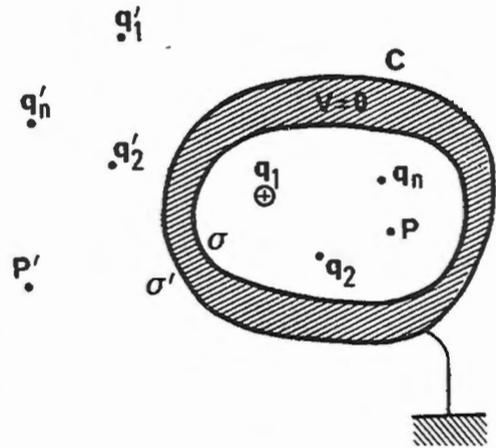


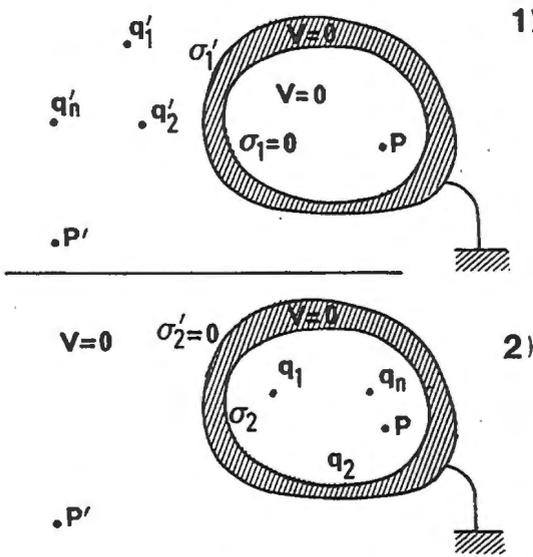
Fig. 12.12

En definitiva, un conductor hueco conectado a potencial constante divide el espacio en dos regiones completamente independientes desde el punto de vista electrostático.

La demostración del efecto pantalla puede realizarse fácilmente a partir del principio de superposición de los estados de equilibrio. Supóngase, por ejemplo, el estado representado en la figura 12.12; un conductor hueco conectado a tierra, con  $n$  cargas en el interior y un conjunto de  $m$  cargas en el exterior. Dicho estado puede descomponerse en dos (Fig. 12.13):

- Estado 1, en el que el conductor  $C$  está conectado a tierra y se han suprimido las cargas interiores. En estas condiciones, el potencial en el interior de la cavidad es nulo (ver apartado 12.2) para cualquier distribu-

ción exterior de cargas. La superficie exterior del conductor tiene una densidad superficial de carga  $\sigma_1'$  y la superficie interior está descargada.



1) El potencial en un punto  $P'$ , exterior, es  $V_1(P')$ .

2) Estado 2, el conductor está conectado a tierra y se suprimen las cargas exteriores. Puesto que la superficie exterior del conductor está a potencial nulo y no hay cargas en el exterior, el potencial será nulo en cualquier punto del exterior. Asimismo, son nulos el campo eléctrico fuera del conductor y la densidad superficial de carga de la superficie exterior ( $\sigma_2' = 0$ ).

Fig. 12.13

La superficie interior está cargada con una densidad  $\sigma_2$  y el potencial de un punto cualquiera dentro de la cavidad es  $V_2(P)$ .

Al superponer los dos estados se tiene que:

a) El potencial en el punto  $P'$  es

$$V(P') = V_1(P') + V_2(P') = V_1(P')$$

es decir, es independiente de la existencia de cargas en el interior.

b) El potencial en el punto  $P$  es

$$V(P) = V_1(P) + V_2(P) = V_2(P)$$

no depende de las cargas exteriores.

- c) Las dimensiones superficiales de carga que aparecen sobre las superficies interior y exterior de  $C$  son, asimismo, independientes de la existencia o no de cargas en el exterior o interior de  $C$ , respectivamente

$$\sigma' = \sigma'_1 + \sigma'_2 = \sigma'_1$$

$$\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 = \sigma_2$$

Las aplicaciones del efecto de pantalla son numerosas, por ejemplo, para aislar aparatos de medida de posibles influencias exteriores. Asimismo, los hilos de conexión entre aparatos suelen estar rodeados de una malla metálica denominada blindaje que elimina cualquier perturbación de tipo eléctrico.



## PROBLEMAS

P.12.1. Una esfera conductora, de radio  $R_1$  y carga  $Q$  se une mediante un hilo conductor, de capacidad despreciable, a otra esfera de radio  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ), inicialmente descargada. Suponiendo que las esferas están lo suficientemente alejadas entre sí para que los fenómenos de influencia sean despreciables, calcular:

- a) Cargas  $Q_1$  y  $Q_2$  de cada esfera;
- b) Potencial;
- c) Densidad superficial de carga en cada esfera.

### SOLUCIÓN

$$\text{a) } Q_1 = \frac{QR_1}{R_1 + R_2}; \quad Q_2 = \frac{QR_2}{R_1 + R_2}$$

$$\text{b) } V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{(R_1 + R_2)}$$

$$\text{c) } \sigma_1 = \frac{Q}{4\pi R_1(R_1 + R_2)}; \quad \sigma_2 = \frac{Q}{4\pi R_2(R_1 + R_2)} \rangle \sigma_1$$

P.12.2. Un sistema está formado por dos esferas conductoras concéntricas. La esfera exterior de radio  $R_1$ , tiene una carga  $Q$ . La esfera interior tiene como radios interior y exterior  $R_2$  y  $R_3$ , respectivamente. Calcular la carga total  $Q'$  de la esfera exterior, para que el potencial de la esfera interior sea nulo. ¿Cuánto vale el potencial de la esfera exterior?

**SOLUCIÓN**

$$Q' = -\frac{Q}{R_2 R_1} (R_2 R_1 + R_3 R_2 - R_3 R_1)$$

$$V = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \frac{(R_2 - R_1)}{R_2 R_1}$$

P.12.3. Sea una esfera conductora, con centro en  $O$  y radio  $R$ . Dicha esfera, que se encuentra conectada a tierra (potencial nulo) está sometida a la influencia de una carga puntual  $q$ , situada a una distancia  $d$  de  $O$ .

Calcular la carga  $Q$  que adquiere la esfera por influencia.

**SOLUCIÓN**

$$Q = -q r / d$$

P.12.4. Sea un sistema como el de la figura, formado por tres placas conductoras idénticas y paralelas. Las placas exteriores están conectadas mediante un hilo, mientras que la placa interior permanece aislada y cargada con una densidad superficial de carga  $\sigma$ .

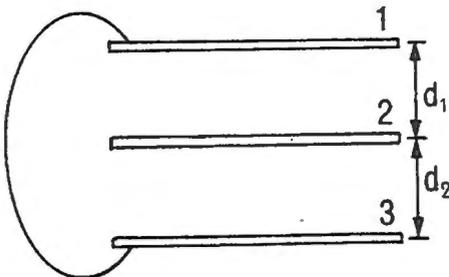


Fig. 12.4

Determinar las densidades de carga  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , a cada lado de la placa interior.

**SOLUCIÓN**

$$\sigma_1 = \sigma \frac{d_2}{d_1 + d_2} \quad \sigma_2 = \frac{\sigma d_1}{d_1 + d_2}$$

P.12.5. La figura muestra un sistema formado por cuatro placas metálicas idénticas, paralelas y separadas cada una de la siguiente una pequeña distancia,  $d$ . Inicialmente, todas las placas están descargadas. Las placas extremas se unen mediante un hilo, mientras que las placas interiores se conectan a un generador, de forma que la ddp entre ellas es  $V$ . Calcular:

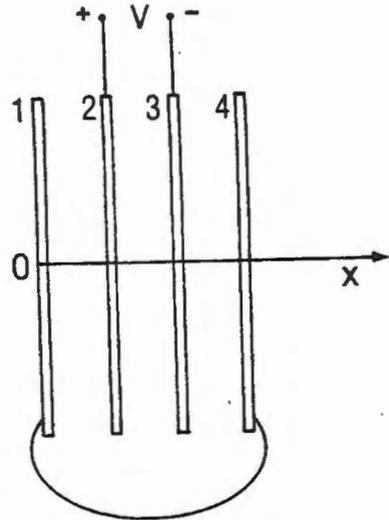


Fig. 12.5

- Densidad superficial de carga en cada placa.
- Valores del campo eléctrico entre las armaduras.

**SOLUCIÓN**

$$a) \quad \sigma_1 = -\frac{\epsilon_0 V}{2d} = -\sigma_4;$$

$$\sigma_2 = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 V}{d} = -\sigma_3$$

$$b) \quad E_{12} = E_{34} = -\frac{V}{2d};$$

$$E_{23} = \frac{V}{d}$$

P.12.6. Dado el sistema de la figura, calcular la carga total  $Q$  de la esfera.

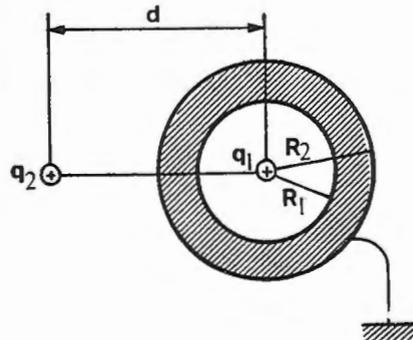


Fig. 12.6

**SOLUCIÓN**

$$Q = -\frac{1}{d} (q_1 d + q_2 R_2)$$



# CAPÍTULO 13

## CAPACIDAD. CONDENSADORES

### *13.1. Capacidad de un conductor aislado*

Sea un conductor de carga  $Q$  y potencial  $V$ , situado en el vacío, sin influencia alguna de otros conductores o cargas.

Se define como **capacidad** del conductor,  $C$ , al cociente

$$C = Q / V \quad (13.1)$$

siendo una característica del conductor que tan sólo depende de su forma y tamaño. Es decir, la relación  $Q / V$  es constante, independiente de la carga del conductor. Así, a partir del principio de superposición de los estados de equilibrio, resulta evidente que al multiplicar la carga por un factor cualquiera,  $\lambda$ , el potencial del conductor se multiplica por el mismo factor, permaneciendo constante la relación  $Q / V$ .

La ecuación de dimensiones de la capacidad es

$$[C] = \frac{[Q]}{[V]} = M^{-1} L^{-2} I^2 T^4$$

Su unidad, en el S.I., es el culombio/voltio, denominado faradio (F). En la práctica se utilizan sus submúltiplos: el microfaradio ( $\mu\text{F}$ ), el nanofaradio (nF) y el picofaradio (pF), que equivalen a  $10^{-6}\text{F}$ ,  $10^{-9}\text{F}$  y  $10^{-12}\text{F}$ , respectivamente.

En el caso de un conductor esférico, de radio  $R$  y carga  $Q$  el potencial es

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{R}$$

Por tanto, su capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = 4\pi\epsilon_0 R$$

resultando ser directamente proporcional al radio de la esfera.

Así, y para hacernos una idea del orden de magnitud de 1F, si dicha esfera fuese la Tierra, supuesta conductora, su capacidad sería de tan sólo

$$C = 4\pi\epsilon_0 6'37 \cdot 10^6 = 7'1 \cdot 10^{-4} \text{ F}$$

es decir, menos de una milésima de faradio.

### 13.2. Condensador. Capacidad de un condensador

Se denomina condensador al sistema formado por dos conductores con influencia total. Los dos conductores se denominan armaduras.

La figura 13.1 muestra un condensador en el que la armadura interior (1) tiene una carga total  $Q$ , siendo su potencial  $V_1$ . Debido a la influencia total, la superficie interior de la armadura (2) tiene una carga  $-Q$ ; su potencial es  $V_2$ .

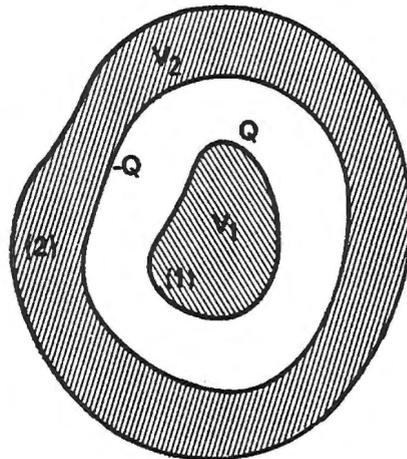


Fig. 13.1

Por aplicación del principio de superposición de los estados de equilibrio, resulta evidente que la relación  $Q / (V_1 - V_2)$  es constante. Dicha relación se llama capacidad el condensador,  $C$

$$C = Q / [V_1 - V_2] \tag{13.2}$$

La ecuación de dimensiones de la capacidad de un condensador es la misma que la estudiada en el apartado anterior. Se mide en faradios.

A continuación se calculan las capacidades de algunos tipos de condensadores.

### 13.2.1. Condensador plano

Un condensador plano está constituido por dos armaduras con superficies planas, paralelas y de dimensiones infinitas. En estas condiciones, y tal como se estudió en el ejemplo resuelto 12.1, el campo eléctrico entre las armaduras es uniforme y vale

$$E = \sigma / \epsilon_0$$

siendo  $\sigma$  la densidad superficial de carga, uniforme, de la armadura (1).

La diferencia de potencial entre las armaduras es

$$V_1 - V_2 = Ed = \sigma d / \epsilon_0$$

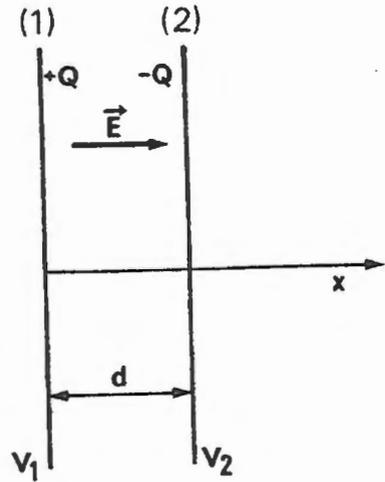


Fig. 13.2

Por tanto, para una porción del condensador de área  $S$ , y carga  $Q = \sigma S$ , la capacidad es

$$C = \frac{Q}{V} = \frac{\sigma S}{\sigma d / \epsilon_0} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \quad (13.3)$$

En la práctica, resulta imposible construir un condensador con armaduras de "dimensiones infinitas" (condición necesaria en un condensador plano para que la influencia sea total).

No obstante, la expresión (13.3) constituye una buena aproximación en el caso de un condensador con armaduras de superficie  $S$ , siempre que las dimensiones de

las armaduras sean muy superiores a la distancia que las separa: en tales condiciones pueden despreciarse los efectos de bordes.

13.2.2. Condensador esférico

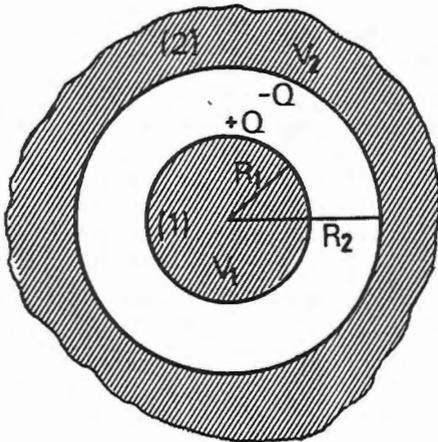


Fig. 13.3

Está formado por dos conductores esféricos concéntricos, de radios  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente (Fig. 13.3). Teniendo en cuenta las condiciones de simetría, la carga de ambas armaduras está distribuida uniformemente, y el campo eléctrico es radial. Por aplicación del teorema de Gauss, dicho campo es

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2}$$

Por tanto, la ddp entre las armaduras es

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} Q \left[ \frac{R_2 - R_1}{R_1 R_2} \right]$$

y la capacidad

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = 4\pi\epsilon_0 \frac{R_1 R_2}{R_2 - R_1} \tag{13.4}$$

Si las dos armaduras están muy próximas, es decir, si  $R_2 - R_1 = d$  es muy pequeño frente a  $R_1$ , entonces puede admitirse que  $R_1 \approx R_2$ , y (13.4) se escribe como.

$$C = 4\pi\epsilon_0 \frac{R^2}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{13.5}$$

expresión idéntica a la obtenida para un condensador plano.

13.2.3. Condensador cilíndrico

Sus armaduras tienen superficies cilíndricas coaxiales, de radios  $R_1$  y  $R_2$  y de longitud teóricamente infinita. Sean  $V_1$  y  $V_2$  los potenciales de dichas armaduras y consideremos una porción de condensador de longitud  $L$ . La carga de dicha porción es  $Q$  en la armadura interior y  $-Q$  en la exterior.

El campo entre las armaduras es radial. Aplicando el teorema de Gauss, su módulo es

$$E = \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Q}{rL}$$

y la ddp entre las armaduras

$$V_1 - V_2 = \int_{R_1}^{R_2} E \, dr = \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 L} \ln \frac{R_2}{R_1}$$

Por tanto, la capacidad resulta

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{2\pi\epsilon_0 L}{\ln(R_2 / R_1)} \tag{13.6}$$

Si las dos armaduras están muy próximas ( $R_2 - R_1 = d$  es muy pequeño frente a  $R_1$ ), entonces

$$\ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right) = \ln\left(\frac{R_1 + d}{R_1}\right) = \ln\left(1 + \frac{d}{R}\right) \approx \frac{d}{R}$$

y la expresión (13.6) se transforma en

$$C = \frac{2\pi\epsilon_0 LR}{d} = \frac{\epsilon_0 S}{d} \tag{13.7}$$

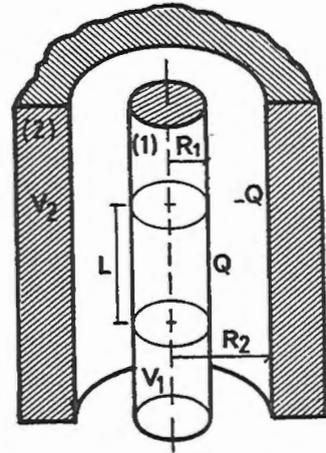


Fig. 13.4

ecuación idéntica a la (13.3) y (13.4).

### 13.2.4. Condensador de forma cualquiera

Considérese un condensador de forma cualquiera cuyas armaduras están separadas una distancia  $d$ , constante y muy pequeña frente a las dimensiones de las armaduras.

Las líneas de campo son aproximadamente, segmentos rectilíneos que parten de (1) y llegan a (2). El módulo del campo eléctrico es

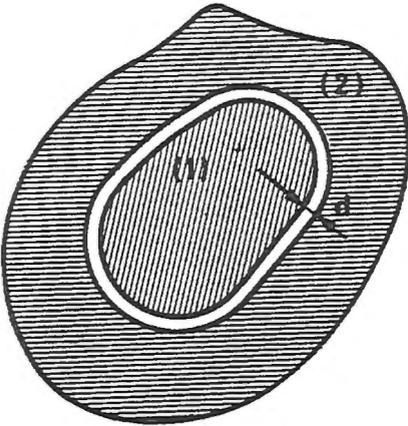


Fig. 13.5

$$E = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

Pero teniendo en cuenta que  $d$  es muy pequeña,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon_0} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

luego

$$\frac{Q}{\epsilon_0 S} = \frac{V_1 - V_2}{d}$$

de donde se deduce que

$$C = \frac{Q}{V_1 - V_2} = \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

## 13.3. Asociación de condensadores

La figura 13.6 muestra el símbolo utilizado para representar un condensador en los esquemas de circuitos eléctricos.

Se denomina capacidad equivalente de un sistema de condensadores a la capacidad de un condensador único tal que, al ser cargado a la misma ddp del sistema, almacena la misma carga.



Fig. 13.6

En este apartado nos ceñiremos al estudio de los dos tipos de asociación de condensadores más frecuentes: asociación en serie y asociación en paralelo.

**13.3.1. Asociación en paralelo**

Las armaduras de los condensadores se unen como se muestra en la figura 13.7, de forma que todos ellos están sometidos a igual ddp,  $V_A - V_B$ . La carga total del sistema,  $Q$ , es la suma de las cargas de cada uno de los condensadores

$$Q = \sum_i^n Q_i = (V_A - V_B) \sum_i C_i \quad (13.8)$$

Si se sustituye esta asociación de condensadores por el condensador equivalente, al aplicar la diferencia de potencial  $V_A - V_B$  tomaría la carga  $Q$ . Por tanto, teniendo en cuenta (13.8)

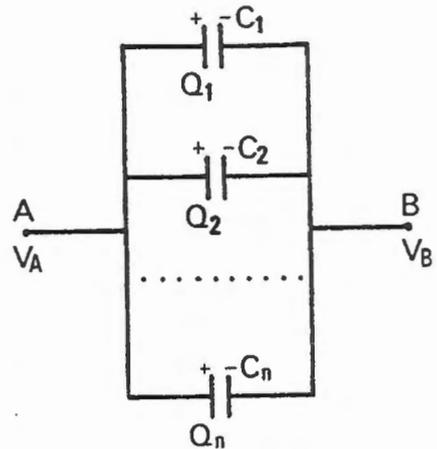


Fig. 13.7

$$Q = (V_A - V_B) C = (V_A - V_B) \sum_i C_i$$

Luego

$$C = \sum_i C_i \quad (13.9)$$

Es decir, la capacidad equivalente a un conjunto de condensadores asociados en paralelo es la suma de las capacidades de los conductores que forman la asociación.

13.3.2. Asociación en serie

Las armaduras de los condensadores se conectan como se muestra en la figura 13.8.

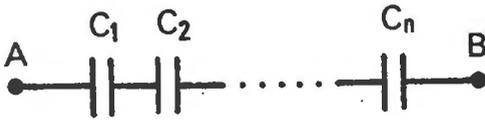


Fig. 13.8

Supongamos que los condensadores están inicialmente descargados y que se establece entre los extremos de la asociación una ddp,  $V_A - V_B$ . Por el propio proceso de carga, todos los condensadores de la asociación tomarán la misma carga  $Q$ . La diferencia de potencial en bornes del condensador  $i$ -ésimo es  $V_i = Q / C_i$ .

Por tanto, la ddp total es

$$V_A - V_B = \sum_i V_i = Q \cdot \sum_i \frac{1}{C_i} \tag{13.10}$$

Y, si se sustituye la asociación por el condensador equivalente, de capacidad  $C$

$$V_A - V_B = \frac{Q}{C}$$

expresión que, comparada con la (13.10), da lugar a

$$\frac{1}{C} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{C_i} \tag{13.11}$$

Es decir, la capacidad equivalente a un conjunto de condensadores asociados en serie es tal que su inversa es igual a la suma de las inversas de las capacidades de los condensadores del sistema.

## 13.4. Energía electrostática

### 13.4.1. Energía de un conductor cargado

Tal como se indicó en la lección 11, el trabajo que realizan las fuerzas electrostáticas al desplazar una carga  $q$  desde un punto A hasta otro B, con potenciales  $V_A$  y  $V_B$ , respectivamente, es

$$W_{AB} = q(V_A - V_B)$$

Si  $V_B > V_A$ , el trabajo resulta ser negativo, lo que indica que, para llevar una carga puntual positiva desde un punto de menor hasta otro de mayor potencial, hay que realizar un trabajo contra las fuerzas del campo.

Así, para incrementar en  $dq$  la carga de un conductor que ya se encuentra a un potencial  $V$  será preciso realizar el trabajo correspondiente al desplazamiento de una carga  $dq$  desde el infinito (potencial cero) hasta el conductor (potencial  $V$ ). Dicho trabajo es

$$dW = V dq \quad (13.12)$$

Por otra parte, como la relación entre la carga y el potencial del conductor es constante,  $C = q / V$ , la (13.12) puede expresarse como

$$dW = q dq / C \quad (13.13)$$

El trabajo necesario para cargar el conductor con una carga total  $Q$  es, pues,

$$W = \int_0^Q \frac{q dq}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13.14)$$

Esta expresión proporciona la energía almacenada en el conductor cargado y, teniendo en cuenta la definición de capacidad, dicha expresión puede transformarse en

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} QV = \frac{1}{2} V^2 C \quad (13.15)$$

### 13.4.2. Energía de un condensador

El proceso de carga de un condensador puede representarse como el paso de cargas positivas desde la armadura de menor potencial a la de mayor, para lo cual es preciso un aporte de energía que es almacenada por el condensador.

Supóngase que, en un instante dado, la carga del condensador es  $q$ , siendo la ddp entre las armaduras  $q / C$ . La energía necesaria para incrementar en  $dq$  la carga del condensador es

$$dW = q \, dq / C \quad (13.16)$$

y la energía almacenada en el condensador para una carga total  $Q$

$$W = \int_0^Q \frac{q}{C} dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} \quad (13.17)$$

o bien, teniendo en cuenta la definición de capacidad

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} (V_1 - V_2)^2 C = \frac{1}{2} (V_1 - V_2) Q \quad (13.18)$$

### 13.4.3. Localización de la energía electrostática

En los apartados anteriores se ha definido la energía electrostática de un conductor cargado o de un condensador, a partir del trabajo que hay que realizar para desplazar las cargas en contra de las fuerzas del campo. Por tanto, parece lógico que la energía electrostática se localice en aquellos puntos del espacio en los que existe campo eléctrico, es decir, en el espacio entre los conductores.

Se denomina densidad de energía,  $w$ , a la energía almacenada en un campo eléctrico por unidad de volumen

$$w = dW / dv$$

En el caso particular de un condensador plano, cargado y aislado en el vacío, la energía almacenada por el condensador es

$$W = \frac{1}{2} C (V_1 - V_2)^2$$

donde,  $V_1 - V_2 = E d$ , y  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d}$

Por tanto, la energía almacenada es

$$W = \frac{1}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d} E^2 d^2 = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 S d \quad (13.19)$$

Ahora bien, como el factor  $S d = v$  representa el volumen entre las armaduras, la densidad de energía resulta

$$w = \frac{dW}{dv} = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 \quad (13.20)$$

La expresión (13.20) ha sido establecida para un caso particular; no obstante, su validez es general. Dicha ecuación permite calcular la energía electrostática  $W$  por integración, admitiendo que todo elemento de volumen  $dv$  contiene una energía local igual a

$$\frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 dv$$

### Ejemplo 13.1

Sea una esfera conductora de radio  $R$ , con una carga  $Q$ .

- Calcular la densidad de energía almacenada en el espacio libre.
- Calcular la energía total.

### Solución:

- El campo eléctrico en un punto situado a una distancia  $r$  del centro de la esfera es

$$E = 0 \quad \text{si} \quad r < R$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q}{r^2} \quad \text{si} \quad r > R$$

Por tanto, a partir de (13.20) resulta

$$w = 0 \quad \text{si} \quad r < R$$

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 = \frac{1}{32\pi^2 \epsilon_0} \frac{Q^2}{r^4} \quad \text{si} \quad r > R$$

- b) Considérese una capa esférica de radio  $r > R$ , espesor  $dr$  y concéntrica con la esfera. El volumen de dicha capa es

$$dv = 4\pi r^2 dr$$

y la energía almacenada en la misma

$$dW = w dv = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{r^2} dr$$

La energía almacenada en el espacio que rodea al conductor es, por tanto

$$W = \frac{Q^2}{8\pi\epsilon_0} \int_R^\infty \frac{dr}{r} = \frac{1}{8\pi\epsilon_0} \frac{Q^2}{R}$$

expresión idéntica a la que se hubiera obtenido a partir de la carga y capacidad del conductor

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{4\pi\epsilon_0 R}$$

### 13.5. Fuerza entre armaduras de un condensador

Sea un condensador plano cuyas armaduras, de superficie  $S$ , están separadas en el vacío una distancia  $x$ . Sea  $Q$  la carga del condensador (Fig. 13.9).

Evidentemente, al estar cargadas las armaduras con cargas opuestas, éstas se atraerán con una fuerza  $\vec{f}$  que se calcula a continuación.

Para ello, consideremos un elemento de superficie  $dS$  sobre la armadura 1. Según se vio en el apartado 12.2.2. Dicho elemento está sometido a una fuerza  $d\vec{f}$  debida al efecto que el campo eléctrico creado por las cargas del condensador (excepto las de  $dS$ ) ejercen sobre las cargas ubicadas en  $dS$ . Esta fuerza es

$$d\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} dS \vec{u}_n$$

donde  $\sigma = Q/S$  es la densidad superficial de carga en el elemento  $dS$ . La fuerza resultante que actúa sobre la armadura 1 es la resultante del sistema de fuerzas paralelas distribuidas uniformemente sobre dicha armadura.

$$\vec{f} = \frac{\sigma^2}{2\epsilon_0} \vec{u}_n \int_S dS = \frac{\sigma^2 S}{2\epsilon_0} \vec{u}_n \quad (13.21)$$

Y, teniendo en cuenta que  $\sigma = Q/S$ , resulta

$$\vec{f} = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} \vec{u}_n \quad (13.22)$$

El mismo resultado podría haberse obtenido teniendo en cuenta consideraciones energéticas. En efecto, la energía almacenada por el condensador es

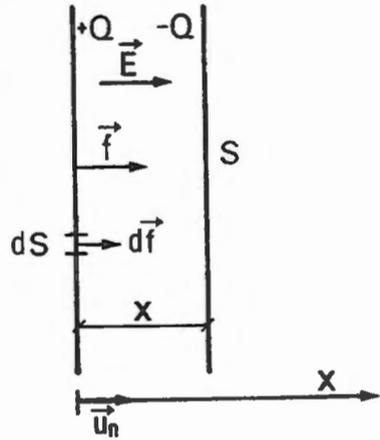


Fig.13.9

$$W = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2} \frac{Q^2 x}{\epsilon_0 S}$$

Si, manteniendo la carga del condensador constante, se aproximan las armaduras una distancia  $dx$ , la energía almacenada disminuye en la cantidad.

$$dW = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} dx \quad (13.23)$$

Dicha disminución de energía equivale al trabajo realizado por la fuerza  $\bar{f}$ , que actúa sobre la armadura 1, en el desplazamiento  $dx$ , es decir

$$dW = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S} dx = f dx$$

por tanto,

$$f = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{\epsilon_0 S}$$

resultado que coincide con el anteriormente obtenido.

## PROBLEMAS

P.13.1. Una esfera conductora de radio  $R_1$  se carga a potencial  $V$  y se aísla. A continuación se conecta, mediante un hilo conductor de capacidad despreciable, a otra esfera conductora de radio  $R_2$ , inicialmente descargada. Admitiendo que dichas esferas están lo suficientemente alejadas entre sí para que los fenómenos de influencia sean despreciables, calcular:

- a) Energía del sistema antes y después de conectar las esferas.
- b) Capacidad del sistema después de conectar las esferas.

### SOLUCIÓN

- a)  $W_0 = 2\pi\epsilon_0 R_1 V^2$ ;  $W_1 = W_0 R_1 / (R_1 + R_2)$
- b)  $C = 4\pi\epsilon_0 (R_1 + R_2)$

P.13.2. Dada la asociación de la figura, calcular:

- a) Capacidad equivalente.
- b) Carga del condensador 2 si la ddp entre A y B es  $V$ .

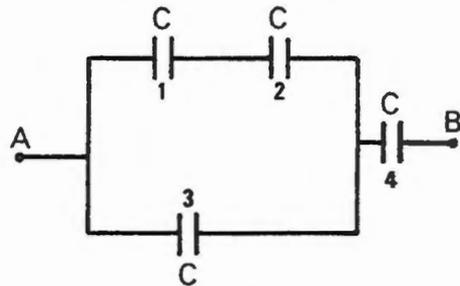


Fig.13.2

### SOLUCIÓN

- a)  $C_{eq} = \frac{3C}{5}$
- b)  $Q_2 = \frac{VC}{5}$

P.13.3. Un condensador de capacidad  $C_1$  es cargado bajo una ddp  $V_1$  y aislado. A continuación se conecta en paralelo con otro condensador de capacidad  $C_2$ , inicialmente descargado. Calcular:

- ddp de ambos condensadores en el estado de equilibrio.
- Energía del sistema antes y después de la asociación.

**SOLUCIÓN**

a) 
$$V = \frac{C_1 V_1}{C_1 + C_2}$$

b) 
$$W_0 = \frac{1}{2} V_1^2 C_1; \quad W_1 = W_0 \left( \frac{C_1}{C_1 + C_2} \right)$$

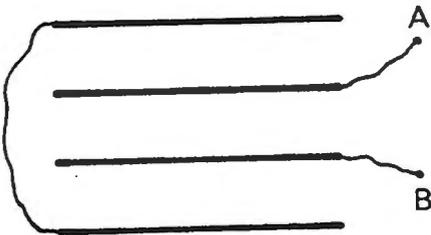


Fig. 13.4

P.13.4. La figura muestra un conjunto de cuatro placas metálicas idénticas, de superficie  $S$  y espesor despreciable, situadas en el vacío con una separación entre placas igual a  $d$ . Calcular la capacidad equivalente entre A y B.

**SOLUCIÓN**

$$C = \frac{3}{2} \frac{\epsilon_0 S}{d}$$

P.13.5. Repetir el cálculo del problema anterior suponiendo que la conexión entre placas es como la de la figura.

**SOLUCIÓN**

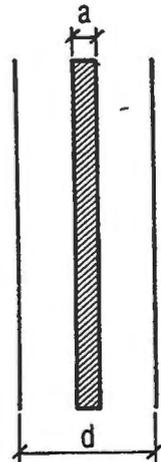
$$C = \frac{2}{3} \frac{\epsilon_0 S}{d}$$



P.13.5

P.13.6. Un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie  $S$  y están separadas una distancia  $d$ , se carga bajo una ddp  $V$  y se aísla. A continuación se introduce entre las armaduras una placa metálica de espesor  $a$  y superficie  $S$ .

- Calcular la capacidad del condensador.
- Calcular la ddp entre las armaduras,  $V_1$ .
- Calcular la energía almacenada antes y después de introducir la placa metálica.
- Calcular la carga que tomaría el condensador en el supuesto de que la placa sea introducida mientras el mismo está aún conectado a la fuente (ddp constante).



P.13.6

**SOLUCIÓN**

a)  $C = \frac{\epsilon_0 S}{d-a}$       b)  $V_1 = V \left( \frac{d-a}{d} \right)$

c)  $W_0 = \frac{1}{2} V^2 \frac{\epsilon_0 S}{d}$ ;       $W_1 = W_0 \left( \frac{d-a}{d} \right)$

d)  $Q = \frac{\epsilon_0 VS}{d-a}$

P.13.7. Dado el sistema de la figura, calcular la energía almacenada por cada condensador si la ddp entre A y B es V.

**SOLUCIÓN**

$$W_1 = \frac{2}{9} V^2 C$$

$$W_2 = \frac{1}{9} V^2 C$$

$$W_3 = \frac{9}{16} V^2 C;$$

$$W_4 = \frac{3}{16} V^2 C$$

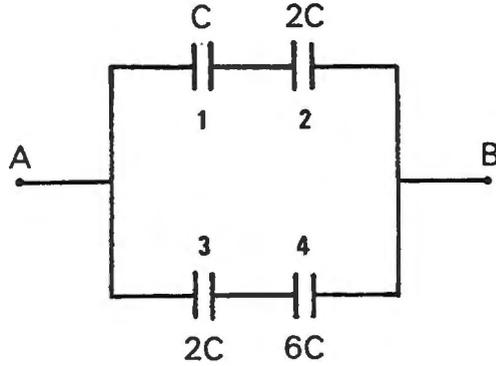


Fig. 13.7

P.13.8. Calcular la energía de una distribución de carga uniforme y esférica, cuyo radio de la distribución es R y la densidad de carga,  $\rho$ .

**SOLUCIÓN**

$$W = \frac{4\pi\rho^2R^5}{15\epsilon_0}$$

# CAPÍTULO 14

## ESTUDIO MACROSCÓPICO DE LOS DIELÉCTRICOS

### *14.1. Dieléctricos. Polarización*

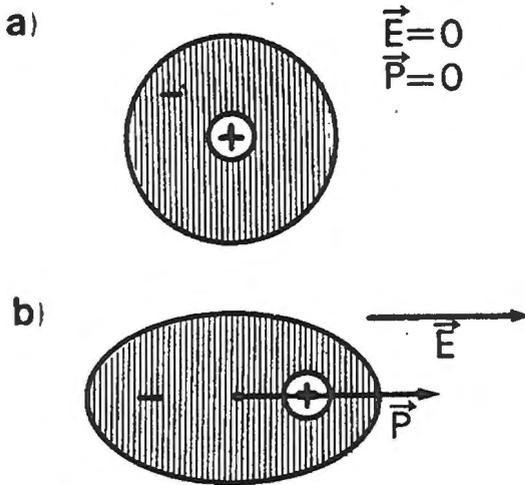
En los capítulos precedentes se han estudiado las leyes de la electrostática, válidas en el vacío o en el interior de metales. En el presente se extienden dichas leyes al estudio de los fenómenos eléctricos en los medios no conductores.

A diferencia de los metales, en los dieléctricos no existen cargas libres que se puedan mover a través del medio bajo la acción de un campo eléctrico: las partículas cargadas que constituyen los átomos y moléculas de un dieléctrico están ligadas a los mismos.

No obstante, cuando un dieléctrico se introduce en un campo eléctrico, puede alterarse ligeramente la distribución de cargas de sus átomos o moléculas, de forma que cada elemento de volumen adquiere un momento dipolar eléctrico  $d\vec{p}$ . Se dice entonces que el dieléctrico se ha polarizado por acción del campo eléctrico.

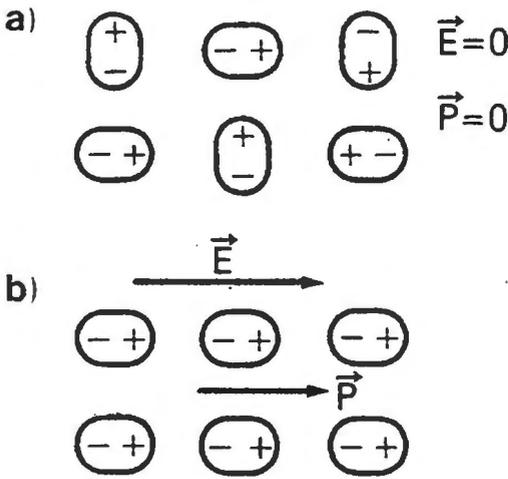
El fenómeno de polarización obedece a distintos mecanismos según sea la naturaleza del dieléctrico. Así, se pueden distinguir tres tipos de polarización: polarización electrónica, polarización por orientación y polarización iónica. Hay que señalar que en un mismo medio pueden superponerse varios de estos tipos de polarización.

La **polarización electrónica** se produce en dieléctricos constituidos por átomos o moléculas en los que los baricentros de las cargas positivas y negativas coinciden. Así, en ausencia de un campo eléctrico exterior, cada molécula carece de un momento dipolar permanente (Fig. 14.1.a).



Al aplicar un campo eléctrico exterior, la nube electrónica de cada átomo o molécula se deforma, desplazándose ligeramente en sentido contrario al campo, de manera que se produce una separación de cargas positivas y negativas y la molécula adquiere un momento dipolar (Fig. 14.1.b).

La polarización por orientación se presenta en aquellos dieléctricos constituidos por moléculas polares, esto es, por moléculas con momento dipolar permanente ( $H_2O$ ,  $CH_3Cl$ , por ejemplo). En ausencia de un campo eléctrico exterior (Fig. 14.2.a), los momentos dipolares asociados a las moléculas están orientados al azar, de forma que el momento dipolar de cualquier elemento de volumen es nulo.



Al aplicar un campo eléctrico exterior, las moléculas tienen una tendencia a orientarse en la dirección del campo, adquiriendo cada elemento de volumen un momento dipolar no nulo (Fig. 14.2.b).

Hay que señalar que el grado de orientación de los dipolos está limitado por la agitación térmica: a medida que aumenta la temperatura disminuye la polarización.

Finalmente, la polarización iónica tiene lugar en los cristales iónicos ( $Cl$   $Na$ , por ejemplo). Tales sustancias están constituidas por iones positivos y negativos que ocupan posiciones más o menos fijas en el espacio. En ausencia de campo eléctrico exterior, cada elemento de volumen, además de no poseer carga neta, tiene su

momento dipolar nulo. La aplicación de un campo eléctrico provoca una ligera deformación de la red cristalina, formando los iones de cada elemento de volumen una distribución dipolar.

### ***14.2. Vector polarización. Cargas de polarización***

Una vez expuestos los distintos mecanismos de polarización de un dieléctrico nos centramos en el estudio macroscópico de los mismos, es decir, en los fenómenos eléctricos asociados a los dieléctricos prescindiendo de su constitución y estructura.

Desde este punto de vista, un dieléctrico se define como un medio continuo, sin cargas libres, en el cual todo elemento de volumen,  $dv$ , es susceptible de adquirir, bajo la acción de un campo eléctrico exterior, un momento dipolar  $d\vec{p}$ .

El grado de polarización del dieléctrico se cuantifica mediante el **vector polarización**  $\vec{P}$ , que se define como el momento dipolar por unidad de volumen

$$\vec{P} = \frac{d\vec{p}}{dv} \quad (14.1)$$

Las dimensiones de la polarización son las de una densidad superficial de carga. En el S.I. se mide en  $C / m^2$ .

La relación existente entre la polarización  $\vec{P}$  y el campo eléctrico  $\vec{E}$  en cada punto, depende del tipo de dieléctrico. Al objeto de simplificar el estudio de los dieléctricos nos referimos, de ahora en adelante, a los denominados **dieléctricos perfectos** que son aquellos que además de homogéneos, isótropos y lineales, no tienen ninguna carga libre. En estas condiciones, la relación entre el campo eléctrico y la polarización es lineal.

$$\vec{P} = K\vec{E} \quad (14.2)$$

donde  $K$  es una constante positiva, característica del medio, que tiene las mismas dimensiones que la permitividad del vacío. Por razones de cálculo es conveniente sustituir la constante  $K$  por

$$K = \epsilon_0 \chi \quad (14.3)$$

siendo  $\epsilon_0$  la permitividad del vacío, y  $\chi$  una constante adimensional, característica del medio que se denomina susceptibilidad eléctrica del dieléctrico. Evidentemente,  $\chi$  vale cero en el vacío (la polarización es nula) y toma valores positivos en los dieléctricos perfectos.

En definitiva

$$\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E} \tag{14.4}$$

Hay que señalar que el campo eléctrico que aparece en la ecuación (14.4) es el campo total, es decir el campo creado por todas las cargas presentes, tanto las

cargas libres, que existirían en ausencia del dieléctrico, como por las cargas ligadas que aparecen como consecuencia de la polarización del dieléctrico.

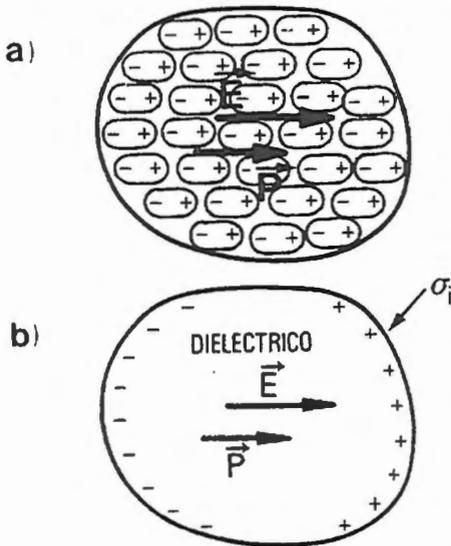


Fig. 14.3

próximos a la superficie que tienen una orientación semejante. Evaluemos el valor de  $\sigma_i$ .

Para clarificar esta cuestión, consideremos la situación mostrada en la figura 14.3: una porción de dieléctrico polarizado situada en el interior de un campo eléctrico. Si el dieléctrico no contiene ninguna carga libre, las cargas ligadas de polarización se manifiestan únicamente sobre su superficie, apareciendo una densidad superficial de carga ligada  $\sigma_i$ . La justificación de dicha densidad de carga inducida resulta clara a partir de la figura 14.3, en la que se ve que esta carga aparece por los dipolos

Para ello, consideremos un punto A en el interior del dieléctrico, infinitamente próximo a su superficie figura 14.4. Sea  $\vec{P}$  el valor de la polarización en dicho punto. Tomemos un elemento de volumen como el de la figura, un cilindro oblicuo cuya generatriz es paralela a  $\vec{P}$  y cuyas bases son paralelas a la superficie del dieléctrico en A.

El momento dipolar de dicho elemento de volumen es, según la definición de polarización

$$d\vec{p} = \vec{P} dv = \vec{P} dS dl \cos \alpha \quad (14.5)$$

Por otra parte,  $d\vec{p}$  puede calcularse a partir de  $\sigma_i$ , ya que las caras de  $dv$  tienen una carga  $\pm\sigma_i dS$ , separadas una distancia  $dl$ , es decir

$$dp = (\sigma_i dS) dl \quad (14.6)$$

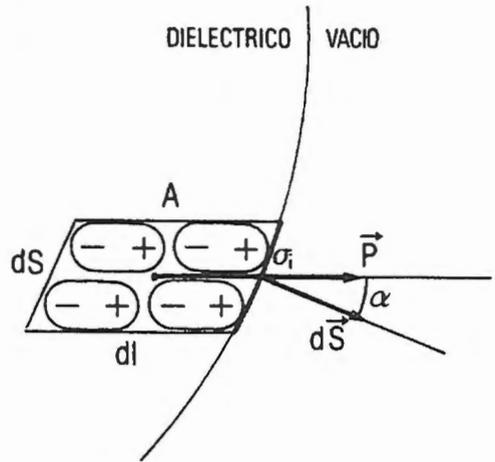


Fig. 14.4

Igualando (14.5) y (14.6) resulta

$$\sigma_i = P \cos \alpha = \vec{P} \cdot \vec{u}_n \quad (14.7)$$

siendo  $\vec{u}_n$  el versor normal de la superficie. En definitiva la componente del vector polarización según la dirección normal a la superficie del dieléctrico es igual a la densidad superficial de carga inducida por polarización.

El campo eléctrico en un punto cualquiera, dentro o fuera del dieléctrico, podría calcularse como la suma de los campos creados por las cargas libres más el creado por las cargas inducidas, representadas por  $\sigma_i$ . Ahora bien, la determinación de  $\sigma_i$  implica conocer el valor de  $\vec{P}$  que, a su vez, depende de  $\vec{E}$ . Para resolver esta indeterminación es preciso definir una nueva magnitud, el desplazamiento eléctrico, que será tratada en la siguiente sección.

### 14.3. Desplazamiento eléctrico

Se define el desplazamiento eléctrico  $\vec{D}$ , en un punto cualquiera como

$$\vec{D} = \vec{P} + \epsilon_0 \vec{E} \quad (14.8)$$

Evidentemente,  $\vec{D}$  tiene las mismas dimensiones que la polarización y su unidad, en el S.I., es  $C/m^2$ .

En el caso de dieléctricos perfectos, existe una relación muy simple entre el desplazamiento y el campo eléctrico. En efecto, teniendo en cuenta (14.4) y sustituyendo en (14.8) resulta

$$\vec{D} = \epsilon_0 \chi \vec{E} + \epsilon_0 \vec{E} = \epsilon_0 (\chi + 1) \vec{E} \quad (14.9)$$

y, llamando  $\epsilon$  a

$$\epsilon = \epsilon_0 (\chi + 1) \quad (14.10)$$

resulta

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}$$

es decir, el desplazamiento eléctrico es un vector con la misma dirección y sentido que el campo. (En el vacío  $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$ ). La constante  $\epsilon$  tiene las mismas dimensiones que la permitividad de vacío (recuérdese que  $\chi$  es adimensional) y su valor depende del medio. Por razones obvias se denomina permitividad del dieléctrico.

En muchas ocasiones resulta conveniente trabajar con la denominada permitividad relativa, definida como la relación entre la permitividad del medio y la del vacío.

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon}{\epsilon_0} = \chi + 1 \quad (14.11)$$

de donde se deduce que  $\epsilon_r = 1$  para el vacío y  $\epsilon_r > 1$  en un dieléctrico perfecto.

El desplazamiento eléctrico es una magnitud que juega un papel fundamental en los problemas en los que intervienen dieléctricos. Así, mientras el campo eléctrico está relacionado, a través del teorema de Gauss, con todas las cargas eléctricas (libres o de polarización), el desplazamiento lo está, únicamente, con las cargas libres. Para profundizar en este aspecto, consideremos un conductor cargado en el

interior de un medio dieléctrico infinito, de permitividad  $\epsilon$ , y evaluemos los valores de  $\vec{E}$  y  $\vec{D}$  en las proximidades de dicho conductor (Fig. 14.5).

Puesto que la superficie del conductor es equipotencial, el campo eléctrico en sus proximidades es perpendicular a dicha superficie. Teniendo en cuenta (14.4) y (14.10), también  $\vec{D}$  y  $\vec{P}$  son perpendiculares a la superficie. Denominaremos  $\vec{u}_n$  al correspondiente versor.

Sea  $\sigma$  la densidad superficial de carga libre del conductor. Además de esta carga, sobre la superficie del dieléctrico aparece una densidad superficial de carga ligada  $\sigma_i$ , de signo contrario a  $\sigma$  y cuyo valor viene dado por (14.7).

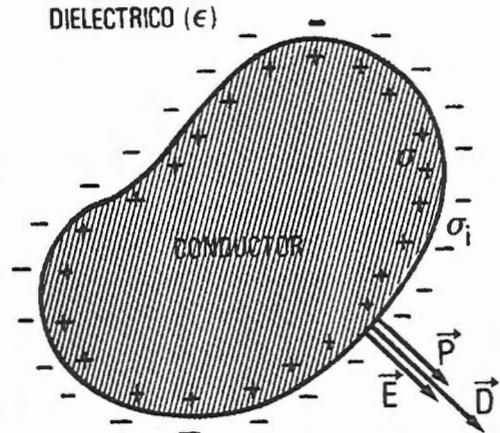


Fig. 14.5

En definitiva, puede considerarse que el sistema de la figura equivale a una distribución superficial de carga, con densidad  $\sigma' = \sigma + \sigma_i$ . El valor de  $\vec{E}$  es, teniendo en cuenta el teorema de Coulomb

$$\vec{E} = \frac{\sigma'}{\epsilon_0} \vec{u}_n = \frac{\sigma + \sigma_i}{\epsilon_0} \vec{u}_n \quad (14.12)$$

o bien

$$\epsilon_0 \vec{E} = (\sigma + \sigma_i) \vec{u}_n$$

y, teniendo en cuenta que  $\sigma_i \vec{u}_n = -\vec{P}$ , resulta

$$\epsilon_0 \vec{E} + \vec{P} = \sigma \vec{u}_n \quad (14.13)$$

por lo que, a partir de la definición del desplazamiento, se tiene que

$$\vec{D} = \sigma \vec{u}_n \quad (14.14)$$

es decir, el desplazamiento eléctrico en las proximidades de un conductor cargado es un vector perpendicular a la superficie del conductor y su módulo es igual a la densidad superficial de carga libre.

Queda, pues, patente la relación existente entre cada tipo de carga y los tres vectores eléctricos: el desplazamiento está relacionado con las cargas libres, la polarización con las cargas ligadas y el campo eléctrico con todas las cargas.

Las expresiones (14.12) y (14.14) permiten establecer la relación existente entre las densidades superficiales de carga libre y ligada en la frontera de un conductor cargado y un dieléctrico. En efecto

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{\sigma + \sigma_i}{\epsilon_0} = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

por tanto, despejando  $\sigma_i$ , se obtiene

$$\sigma_i = -\sigma_0 \left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) \quad (14.15)$$

Es decir, la densidad superficial de carga inducida es de signo contrario a la densidad de carga libre y menor que ésta, en valor absoluto, ya que

$$\left( 1 - \frac{1}{\epsilon_r} \right) < 1$$

### 14.4. Teorema de Gauss en presencia de dieléctricos

Una vez definidos los tres vectores eléctricos, estudiemos la expresión del teorema de Gauss en presencia de dieléctricos.

Para ello consideremos el sistema de la figura 14.6, constituido por un conjunto de conductores cargados en el seno de un medio dieléctrico perfecto e infinito. La carga libre de cada conductor está repartida sobre su superficie, con densidad  $\sigma$ .

Por otra parte, en la frontera entre el dieléctrico y los conductores aparece, por polarización, una densidad superficial de carga inducida,  $\sigma_i$ .

Sea  $S$  una superficie cerrada que rodea al sistema de conductores. El flujo de  $\vec{E}$  a través de  $S$  es

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q'}{\epsilon_0} \quad (14.16)$$

donde  $Q'$  es la carga total encerrada en  $S$ , suma de las cargas libres más las inducidas:

$$Q' = Q + Q_i = \iint_{S_1+S_2} (\sigma + \sigma_i) dS$$

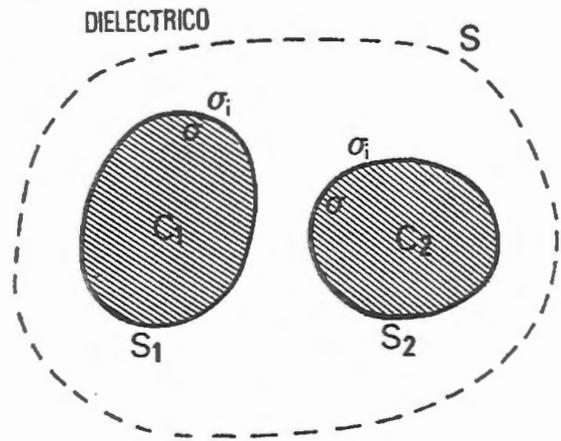


Fig. 14.6

pero, a partir de (14.15), resulta inmediato que

$$\sigma + \sigma_i = \frac{\sigma}{\epsilon_r}$$

por tanto

$$Q' = \iint_{S_1+S_2} \frac{\sigma dS}{\epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon_r} \quad (14.17)$$

es decir, la carga total encerrada en  $S$  es igual a la carga libre dividida por la permitividad relativa.

Sustituyendo (14.17) en (14.16) resulta

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0 \epsilon_r} = \frac{Q}{\epsilon} \quad (14.18)$$

de donde se deduce que la expresión que se obtiene para el teorema de Gauss es idéntica a la que se dedujo para el vacío, pero sustituyendo la permitividad del vacío por la del medio.

Si se multiplican ambos miembros de la ecuación (14.18) por  $\epsilon$  se obtiene

$$\iint_S \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = Q \quad (14.19)$$

expresión que constituye una generalización del teorema de Gauss: "El flujo del vector desplazamiento eléctrico a través de una superficie cerrada es igual a la carga libre encerrada por la superficie".

De lo visto hasta ahora se deduce que, para resolver problemas en los que intervienen dieléctricos perfectos se puede seguir un procedimiento similar al estudiado en el caso de cargas o sistemas de conductores en el vacío, pero trabajando con el desplazamiento en lugar de con el campo eléctrico. Así, a partir del teorema de Gauss (en forma integral o diferencial) se puede calcular  $\vec{D}$ . Una vez conocido  $\vec{D}$  se obtiene  $\vec{E}$  directamente, empleando la relación  $\vec{E} = \vec{D} / \epsilon$  y  $\vec{P}$  a partir de la ecuación  $\vec{P} = \epsilon_0 \chi \vec{E}$ . Una vez establecido  $\vec{E}$  resulta inmediato el cálculo de diferencias de potencial o de otras magnitudes que dependen de  $\vec{E}$ .

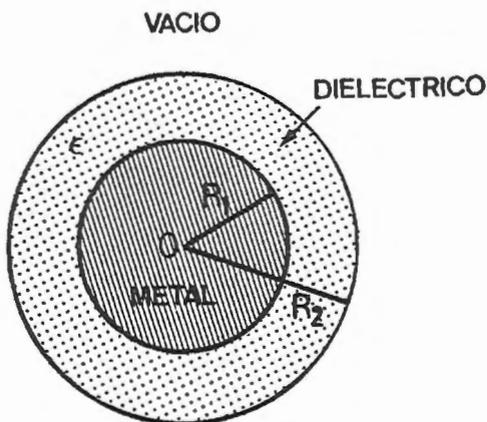


Fig. 14.7

### Ejemplo 14.1

Una esfera metálica de radio  $R_1$  se encuentra rodeada por una capa de dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y radio  $R_2$  figura 14.7. Sabiendo que la carga total de la esfera conductora es  $Q$ , calcular:

- $\vec{D}$ ,  $\vec{E}$  y  $\vec{P}$ .
- Cargas inducidas en el dieléctrico.
- Potencial del conductor.
- $E(r)$  y  $V(r)$  cuando  $R_2$  tiende a infinito.

**Solución:**

Por razones de simetría, los tres vectores eléctricos serán radiales

$$D = D(r) \qquad E = E(r) \qquad P = P(r)$$

y la carga  $Q$  se distribuye sobre la superficie del conductor con densidad

$$\sigma = \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

- a) Aplicando el teorema de Gauss al cálculo del flujo  $\vec{D}$  a través de una superficie esférica de radio  $r$  y centro en  $0$  se obtiene

$$D = 0 \qquad \text{si} \qquad r < R_1$$

$$D = \frac{Q}{4\pi r^2} \qquad \text{si} \qquad r > R_1$$

obsérvese de  $D(r)$  no cambia de forma al pasar del dieléctrico al vacío.

Una vez calculado  $D(r)$ , el campo eléctrico es

$$E = 0 \qquad \text{si} \qquad r < R_1$$

$$E = \frac{D}{\epsilon} = \frac{Q}{4\pi \epsilon r^2} \qquad \text{si} \qquad R_1 < r < R_2$$

$$E = \frac{D}{\epsilon_0} = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} \qquad \text{si} \qquad R_2 < r$$

En el caso del campo eléctrico aparecen dos discontinuidades, una en la frontera metal-dieléctrico y otra en la frontera dieléctrico-vacío.

Finalmente, la polarización en el dieléctrico viene dada por

$$P = \epsilon_0 \chi E = (\epsilon - \epsilon_0) E = \left( \frac{\epsilon - \epsilon_0}{\epsilon} \right) \frac{Q}{4\pi r^2}$$

para

$$R_1 < r < R_2$$

- b) La carga inducida en el dieléctrico está localizada sobre sus superficies, siendo la densidad de carga

$$\sigma_i(R_1) = \vec{P} \cdot \vec{u}_{n1} = -P(R_1) = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_1^2}$$

$$\sigma_i(R_2) = \vec{P} \cdot \vec{u}_{n2} = -P(R_2) = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \frac{Q}{4\pi R_2^2}$$

La carga total del dieléctrico, sin embargo es nula

$$Q_i = \sigma_i(R_1) 4\pi R_1^2 + \sigma_i(R_2) 4\pi R_2^2 = 0$$

- c) El potencial del conductor viene dado por la expresión:

$$V = \int_{R_1}^{\infty} E dr = \int_{R_1}^{R_2} \frac{Q}{4\pi \epsilon_r r^2} dr + \int_{R_2}^{\infty} \frac{Q}{4\pi \epsilon_0 r^2} dr$$

$$V = \frac{Q}{4\pi} \left[ \frac{1}{\epsilon} \left( \frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) + \frac{1}{\epsilon_0 R_2} \right] = \frac{Q}{4\pi \epsilon_0} \left( \frac{R_2 + R_1(\epsilon_r - 1)}{R_1 R_2 \epsilon_r} \right) =$$

$$= \frac{Q}{4\pi \epsilon} \left( \frac{R_2 + R_1(\epsilon_r - 1)}{R_1 R_2} \right)$$

- d) Si  $R_2$  tiende a  $\infty$ , entonces el dieléctrico ocupa todo el espacio. La expresión del desplazamiento no se vería afectada y la del campo sería

$$E = 0 \quad r < R_1$$

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r^2} \quad r > R_1$$

El potencial electrostático se calcula como

$$V = \int_r^\infty E dr = \frac{1}{4\pi\epsilon} \frac{Q}{r} \quad (r > R_1)$$

Obsérvese que, al sustituir el vacío por un medio dieléctrico perfecto, se han obtenido expresiones iguales a las correspondientes al vacío, en las que sólo se ha cambiado la permitividad

### 14.5. Condensador plano con varias capas de dieléctrico

Sea un condensador plano cuyas armaduras están cargadas con una densidad superficial  $\pm\sigma$ , y en el que se han introducido dos capas de dieléctrico, una de espesor  $d_1$  y permitividad  $\epsilon_1$  y otra de espesor  $d_2$  y permitividad  $\epsilon_2$ .

Las dos placas de dieléctrico se encuentran polarizadas, de manera que sobre sus superficies aparecen densidades de carga inducidas,  $\pm\sigma_{i1}$  y  $\pm\sigma_{i2}$ , respectivamente (Fig. 14.8).

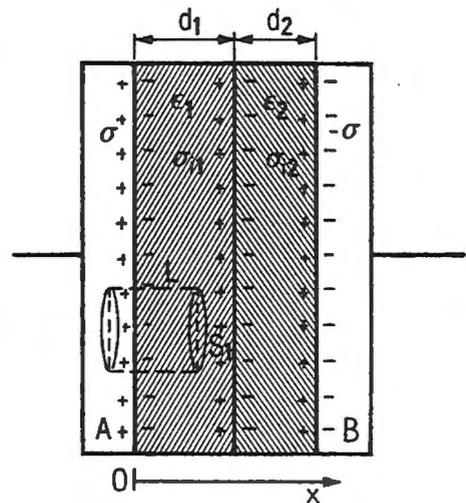


Fig. 14.8

Dada la geometría del problema, los tres vectores eléctricos tienen la dirección del eje OX:

$$\vec{D} = D(x)\vec{i}; \quad \vec{E} = E(x)\vec{i}; \quad \vec{P} = P(x)\vec{i}$$

Calculemos el valor del desplazamiento eléctrico. Para ello consideremos una superficie cerrada como la de la figura: un cilindro recto cuyas bases, de área  $S_1$ ,

son paralelas a las armaduras; una de las bases está dentro de una de las armaduras y la otra en uno de los dieléctricos, el flujo de  $\vec{D}$  a través de dicha superficie es

$$\phi = D(x)S_1 = \sigma S_1 \quad (14.20)$$

luego

$$D(x) = \sigma \quad (14.21)$$

es decir, el desplazamiento es un vector dirigido en la dirección y sentido del eje OX y su módulo es constante e igual a la densidad superficial de carga libre de las armaduras. Obsérvese que el valor de  $D$  no cambia al pasar al otro dieléctrico, ya que las cargas que aparecen en la superficie de separación de ambos dieléctricos no son libres, sino ligadas.

El campo eléctrico en cada uno de los dieléctricos es

$$E_1 = \frac{D}{\epsilon_1} = \frac{\sigma}{\epsilon_1} \quad (14.22)$$

$$E_2 = \frac{D}{\epsilon_2} = \frac{\sigma}{\epsilon_2} \quad (14.23)$$

y la polarización

$$P_1 = \epsilon_0 \chi_1 E_1 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r1}}\right) \sigma \quad (14.24)$$

$$P_2 = \epsilon_0 \chi_2 E_2 = \left(1 - \frac{1}{\epsilon_{r2}}\right) \sigma \quad (14.25)$$

La diferencia de potencial entre las armaduras es

$$V_A - V_B = \int_A^B E dx = E_1 d_1 + E_2 d_2 = \sigma \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right)$$

y la capacidad del condensador

$$C = \frac{Q}{V_A - V_B} = \sigma S / \left[ \sigma \left( \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right) \right] = S / \left[ \frac{d_1}{\epsilon_1} + \frac{d_2}{\epsilon_2} \right] \quad (14.26)$$

expresión que puede escribirse en la forma

$$C = \epsilon_0 S / \left[ \frac{d_1}{\epsilon_{r1}} + \frac{d_2}{\epsilon_{r2}} \right] \quad (14.27)$$

donde  $\epsilon_{r1}$  y  $\epsilon_{r2}$  son las permitividades relativas.

En general, si el condensador tiene  $n$  capas dieléctrico, su capacidad es

$$C = \epsilon_0 S / \left[ \sum_{j=1}^n \frac{d_j}{\epsilon_{rj}} \right] \quad (14.28)$$

Un caso particular, en el que merece la pena insistir, ya que suele ser el más frecuente, es el de un condensador con una única capa de dieléctrico (Fig. 14.9).

Aplicando los resultados anteriores resulta,

$$E = \frac{\sigma}{\epsilon}$$

$$V_A - V_B = \frac{\sigma d}{\epsilon}$$

$$C = \frac{\epsilon S}{d}$$

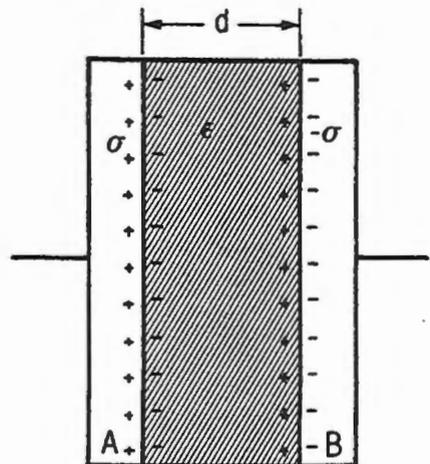


Fig. 14.9

es decir, las expresiones del campo eléctrico, potencial y capacidad son idénticas a las que se obtuvieron en el capítulo 13, pero sustituyendo la permitividad del vacío por la del medio. Obsérvese que la capacidad del condensador es  $\epsilon_r$  veces mayor que la de uno de igual geometría pero sin dieléctrico. Así, rellenando un

condensador con un dieléctrico de permitividad elevada puede aumentarse su capacidad.

### 14.6. Densidad de energía electrostática en un dieléctrico

En la sección 13.4 se dedujo el valor de la densidad de energía electrostática, a partir del caso particular de un condensador plano.

Siguiendo un razonamiento similar para un condensador plano relleno con dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  se llegaría a la expresión

$$w = \frac{1}{2} \epsilon E^2 \quad (14.29)$$

ecuación que puede escribirse, con toda generalidad, como

$$w = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D} \quad (14.30)$$

#### **Nota complementaria 14.1. Dieléctrico con densidad volumétrica de carga.**

En los apartados anteriores se ha descrito el comportamiento de los dieléctricos aceptando una serie de hipótesis simplificativas: los dieléctricos estudiados son lineales, isótropos, homogéneos y **no contienen ninguna carga libre**, entendiendo por cargas libres aquellas distintas de las que aparecen por la polarización (cargas sobre los conductores, cargas puntuales o distribuciones volumétricas de carga en el interior del dieléctrico).

Bajo estas condiciones, el efecto de la polarización del dieléctrico se manifiesta únicamente por la aparición sobre su superficie de una distribución de carga inducida. Si el dieléctrico no está polarizado, no existe ninguna distribución de carga, ni superficial ni volumétrica (Fig. 14.10.a).

Ahora bien, si el dieléctrico no es homogéneo o si en su interior existe una carga distribuida espacialmente, con densidad  $\rho$ , la polarización implicará dos consecuencias:

- a) Aparición de cargas superficiales inducidas, ya consideradas y cuyo valor viene dado por la ecuación (14.7).
- b) Aparición de una distribución volumétrica de carga inducida, de densidad  $\rho_i$  que se superpone a la distribución de carga libre de densidad  $\rho$ . (Fig. 14.10.b).

Para calcular el valor de  $\rho_i$  partiremos de la base de que la expresión del teorema de Gauss dada por (14.9) sigue siendo válida. Escribiendo dicho teorema en forma diferencial se llegaría a

$$\operatorname{div} \vec{D} = \rho \quad (14.29)$$

Por otra parte, la divergencia del campo eléctrico es igual, según (11.38), a

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\rho + \rho_i}{\epsilon_0} \quad (14.30)$$

ya que deben tenerse en cuenta todas las cargas presentes.

Por otra parte, a partir de la definición de desplazamiento se tiene que

$$-\vec{P} = \epsilon_0 \vec{E} - \vec{D} \quad (14.31)$$

por lo que

$$-\operatorname{div} \vec{P} = \epsilon_0 \operatorname{div} \vec{E} - \operatorname{div} \vec{D} = \rho + \rho_i - \rho$$

Es decir, si la divergencia de la polarización es distinta de cero, en el seno del dieléctrico aparece una densidad volumétrica de carga inducida cuyo valor es

$$\rho_i = -\operatorname{div} \vec{P} \quad (14.32)$$

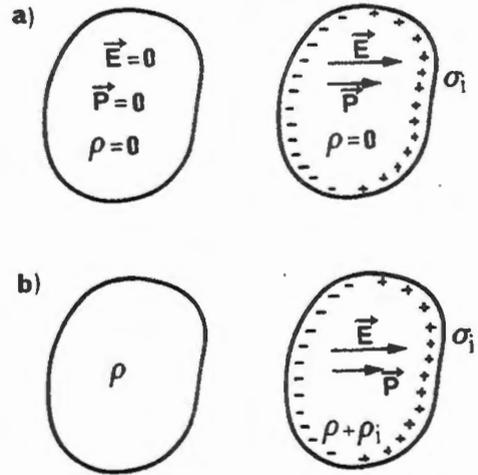


Fig. 14.10

Si el dieléctrico es homogéneo,  $\rho_i$  será distinto de cero, sólo si lo es  $\rho$ . En efecto, si  $\rho = 0$ , entonces  $\text{div } \bar{D} = 0$  y, puesto que

$$\bar{E} = \frac{\bar{D}}{\epsilon}$$

$$\text{div } \bar{E} = \frac{1}{\epsilon} \text{div } \bar{D} = 0$$

Por tanto

$$\text{div } \bar{P} = \epsilon_0 \chi \text{div } \bar{E} = 0$$

Si el dieléctrico no es homogéneo, puede aparecer  $\rho_i$  aún cuando  $\rho$  sea nulo, ya que en este caso  $\text{div } \bar{D} = 0$  no implica que  $\text{div } \bar{E}$  sea nula.

Centrándonos en el caso de **dieléctricos homogéneos y lineales**, pasemos a calcular la relación existente entre  $\rho_i$  y  $\rho$ . Teniendo en cuenta (14.32) y (14.4) resulta.

$$\rho_i = -\text{div } \bar{P} = -\chi \epsilon_0 \text{div } \bar{E} = -\chi(\rho + \rho_i) \quad (14.33)$$

y, despejando  $\rho_i$  es

$$\rho_i = -\frac{\chi \rho}{\chi + 1} = -\left(1 - \frac{1}{\epsilon_r}\right) \rho$$

expresión similar a la (14.15).

La densidad de carga total es, por tanto

$$\rho' = \rho + \rho_i = \frac{\rho}{\epsilon_r} \quad (14.34)$$

Por lo que la expresión diferencial del teorema de Gauss es

$$\operatorname{div} \bar{\mathbf{E}} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (14.35)$$

idéntica a la correspondiente al vacío, pero sustituyendo  $\epsilon_0$  por la permitividad del medio.

Finalmente, las ecuaciones de Poisson y Laplace son

$$\Delta V = 0 \quad (14.36)$$

en regiones en las que  $\rho = 0$ , y

$$\Delta V = \frac{-\rho}{\epsilon} \quad (14.37)$$

en regiones con densidad de carga espacial.



## PROBLEMAS

P.14.1. Una placa dieléctrica de espesor  $d$ , permitividad relativa  $\epsilon_{r1}$  y dimensiones infinitas está en el interior de un medio dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon_{r2}$ . En el medio existe un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}_2$ , perpendicular a la placa. Calcular:

a)  $E_1$

b)  $P_1$  y  $P_2$

c) Densidad superficial de carga en el plano de separación de dos dieléctricos.

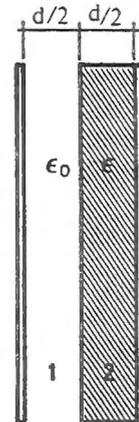
### SOLUCIÓN

a)  $E_1 = E_2 \epsilon_{r2} / \epsilon_{r1}$

b)  $P_2 = \epsilon_0 (\epsilon_{r2} - 1) E_2$ ;  $P_1 = \epsilon_0 \epsilon_{r2} (\epsilon_{r1} - 1) E / \epsilon_{r1}$

c)  $\sigma_i = \epsilon_0 (\epsilon_{r1} - \epsilon_{r2}) E_2 / \epsilon_{r1}$

P.14.2. El espacio entre las armaduras de un condensador plano está inicialmente lleno de aire (permitividad  $\epsilon_0$ ), siendo el campo eléctrico  $E_0$ . A continuación se rellena la mitad con un dieléctrico perfecto de permitividad relativa  $\epsilon_r$ , como se muestra en la figura. Calcular los valores de  $E$  y  $D$  en el dieléctrico y en el aire suponiendo que la placa de dieléctrico se introduce:



P.14.2

- a) Manteniendo constante la carga de las armaduras (condensador aislado).
- b) Manteniendo constante la ddp entre las armaduras (condensador conectado a la fuente).

### SOLUCIÓN

- a)  $D_1 = D_2 = \epsilon_0 E_0$ ;  $E_1 = E_0$ ;  $E_2 = E_0 / \epsilon_r$
- b)  $D_1 = D_2 = 2 \epsilon_0 \epsilon_r E_0 / (\epsilon_r + 1)$ ;  
 $E_1 = 2 E_0 \epsilon_r / (\epsilon_r + 1)$ ;  
 $E_2 = 2 E_0 / (\epsilon_r + 1)$

P.14.3. Sea un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie  $S$  y están separadas una distancia  $d$ . Entre las armaduras se coloca una placa de dieléctrico de permitividad relativa  $\epsilon$  y espesor  $d/2$ .

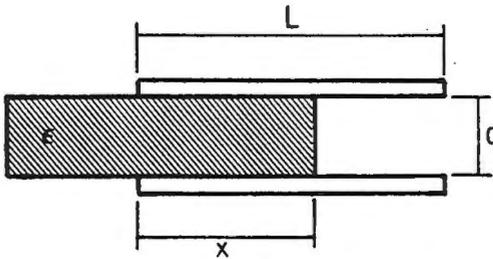
- a) ¿Cuál es la capacidad del condensador?.
- b) ¿Cuánto deberían separarse las armaduras del condensador para que su capacidad, después de introducir el dieléctrico fuese igual a la que tenía antes?.

### SOLUCIÓN

- a)  $C = 2 \epsilon_0 \epsilon_r S / d(\epsilon_r + 1)$
- b)  $\Delta d = d(\epsilon_r - 1) / 2 \epsilon_r$

P.14.4. Sea un condensador plano cuyas armaduras tienen una superficie  $S$  y están separadas una distancia  $d$ . El condensador es cargado con una carga  $Q$  y aislado.

Entre las armaduras se introduce parcialmente una placa de dieléctrico de espesor  $d$  y dimensiones iguales a la de las armaduras, tal y como se muestra en la figura. Calcular:



P.14.4

- Capacidad del condensador en función de  $x$ .
- Energía del condensador.
- Fuerza que actúa sobre el dieléctrico.

**SOLUCIÓN**

- $C = S[\epsilon x + \epsilon_0(L - x)] / Ld$
- $W = Q^2 Ld / 2S[x(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 L]$
- $f = Q^2 Ld (\epsilon - \epsilon_0) / 2S[x(\epsilon - \epsilon_0) + \epsilon_0 L]^2$

P.14.5. Un condensador esférico está formado por dos superficies esféricas conductoras, de radios  $R_1$  y  $R_3$  ( $R_3 > R_1$ ). Entre  $R_1$  y  $R_2$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ) existe un dieléctrico perfecto de permitividad  $\epsilon_1$  y entre  $R_2$  y  $R_3$  hay otro dieléctrico de permitividad  $\epsilon_2$ . Calcular la capacidad de condensador.

**SOLUCIÓN**

$$C = \frac{4\pi\epsilon_1\epsilon_2 R_1 R_2 R_3}{R_3(R_2\epsilon_2 + \epsilon_1 R_1) - R_1(R_3\epsilon_2 + \epsilon_1 R_2)}$$

P.14.6. Calcular la capacidad de un condensador cilíndrico de longitud  $L$  y radios  $R_1$  y  $R_3$  ( $R_3 > R_1$ ), sabiendo que entre las armaduras hay dos capas de dieléctrico permitividad  $\epsilon_1$  y  $\epsilon_2$ , respectivamente. La superficie de separación entre los dieléctricos está en  $r = R_2$  ( $R_1 < R_2 < R_3$ ).

**SOLUCIÓN**

$$C = 2\pi L / \left[ \frac{1}{\epsilon_1} \ln \left( \frac{R_2}{R_1} \right) + \frac{1}{\epsilon_2} \ln \left( \frac{R_3}{R_2} \right) \right]$$

P.14.7. En el interior de una esfera de dieléctrico perfecto de permitividad  $\epsilon$  existe un campo eléctrico uniforme  $\vec{E}$ . Sabiendo que el radio de la esfera es  $R$ , calcular:

- a) Valor máximo de la densidad superficial de carga inducida.
- b) Carga inducida total del mismo signo.

**SOLUCIÓN**

- a)  $\sigma_{\text{imax}} = (\epsilon - \epsilon_0) E$
- b)  $Q_i^+ = \pi R^2 (\epsilon - \epsilon_0) E$

# CAPÍTULO 15

## CORRIENTE CONTINUA

### *15.1. Corriente eléctrica*

En su sentido más amplio, se denomina corriente eléctrica a todo desplazamiento de cargas en un medio cualquiera.

Según que tal movimiento de cargas implique o no, una transferencia de masa, se pueden distinguir dos tipos de corrientes eléctricas: corrientes de convección y corrientes de conducción.

Las corrientes de conducción se producen por el movimiento de cargas eléctricas en el interior de un medio material: electrones libres en un metal, iones positivos y negativos en un electrolito de electrones y huecos en un semiconductor.

Las corrientes de convección tienen su origen en el desplazamiento masivo de un medio cargado: hay un transporte de materia además de un transporte de carga. Como ejemplos de corrientes de convección se puede citar el desplazamiento de masas de aire cargado en la atmósfera, o el movimiento de partículas cargadas en el vacío (electrones en un tubo de rayos catódicos, por ejemplo).

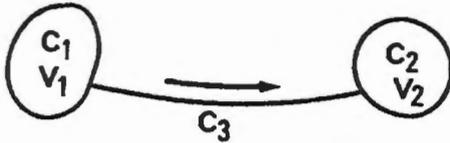
En esta lección, y en las siguientes, nos limitaremos al estudio de las corrientes de conducción en conductores metálicos. Posteriormente, en la última parte del libro, se estudiarán las corrientes eléctricas en los semiconductores.

En la lección 12 se estableció un modelo de metal que será el utilizado aquí para el estudio de las corrientes eléctricas. Asimismo, se analizaron los mecanismos de redistribución de cargas libres en un metal cuando éste se introduce en un campo eléctrico  $\vec{E}$ : los electrones libres se desplazan hasta que se crea, en todo el volumen ocupado por el conductor, un campo eléctrico igual y opuesto a  $\vec{E}$ . Cuando

esto se consigue, cesa el movimiento de electrones y el conductor se encuentra en un estado de equilibrio.

Ahora bien, desde que se aplica el campo  $\vec{E}$  hasta que se alcanza el nuevo estado de equilibrio tiene lugar un movimiento de cargas y, por tanto, se produce una corriente eléctrica. En definitiva, para producir una **corriente eléctrica** en un metal es necesario que exista en su interior un campo eléctrico no nulo o, lo que es igual, que exista un gradiente de potencial.

Consideremos ahora dos conductores  $C_1$  y  $C_2$  cargados y aislados (Fig. 15.1). Supóngase que  $V_1 > V_2$ . Si dichos conductores se unen mediante un hilo



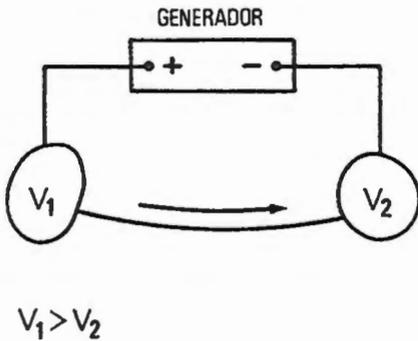
*Fig. 15.1*

conductor  $C_3$ , se produce una corriente eléctrica a través de  $C_3$  hasta que el conjunto  $C_1$ ,  $C_2$  y  $C_3$  alcanza el mismo potencial. Este desplazamiento de cargas se debe, únicamente, al movimiento de electrones libres desde  $C_2$  hasta  $C_1$ . No obstante la transferencia de una carga  $-Q$  desde  $C_2$  hasta  $C_1$

es equivalente a la transferencia de una carga  $+Q$  desde  $C_1$  hasta  $C_2$ . **Por convenio, se adopta como sentido de la corriente el del movimiento de las cargas positivas.**

Los ejemplos descritos hasta ahora se refieren a **corrientes transitorias**, ya que

no se mantienen más que por un tiempo muy breve, hasta que se igualan los potenciales de todos los conductores.



*Fig.. 15.2*

Para obtener una corriente eléctrica “permanente” es preciso mantener una ddp constante entre los conductores  $C_1$  y  $C_2$ , unidos por el hilo  $C_3$ , del ejemplo precedente. Esto puede conseguirse si  $C_1$  y  $C_2$  se conectan a los bornes de un dispositivo denominado **generador** (Fig. 15.2).

La función del generador es mantener un estado de desequilibrio permanente entre  $C_1$  y  $C_2$  de forma que el campo eléctrico en el hilo que los une sea estacionario, circulando por él una corriente continua.

El régimen así establecido es estacionario, es decir, es un régimen en el cual todas las magnitudes asociadas al desplazamiento de las cargas son independientes del tiempo. Así, los valores en cada punto del campo eléctrico, potencial, velocidad media de las cargas o densidad volumétrica de portadores de carga son constantes (aunque pueden cambiar de un punto a otro).

Obsérvese que para mantener una corriente continua es preciso una sucesión ininterrumpida de conductores que constituyen un circuito eléctrico. La corriente circula en este circuito desde  $C_1$  hasta  $C_2$  a través del hilo, y desde  $C_2$  hasta  $C_1$  a través del generador.

En definitiva, un generador puede definirse como un dispositivo capaz de mantener un ddp permanente entre dos puntos de un conductor. El punto que se encuentra a mayor potencial (conductor  $C_1$  en el ejemplo anterior) se denomina polo positivo. El conductor  $C_2$  sería el polo negativo. En la figura 15.3 se muestra el esquema convencional utilizado para representar un generador.

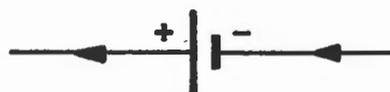


Fig. 15.3

## 15.2. Densidad e intensidad de corriente

Sea una porción de un conductor por el que circula una corriente continua (Fig. 15.4). Siguiendo el convenio anteriormente establecido, admitiremos que el transporte de cargas se debe al desplazamiento de las cargas positivas.

Denotaremos por  $\bar{v}$  a la velocidad media de las cargas positivas en cada punto. Dicha velocidad recibe el nombre de velocidad de arrastre o de deriva. Evidentemente, en el régimen estacionario  $\bar{v}$  es una función de punto independiente del tiempo.

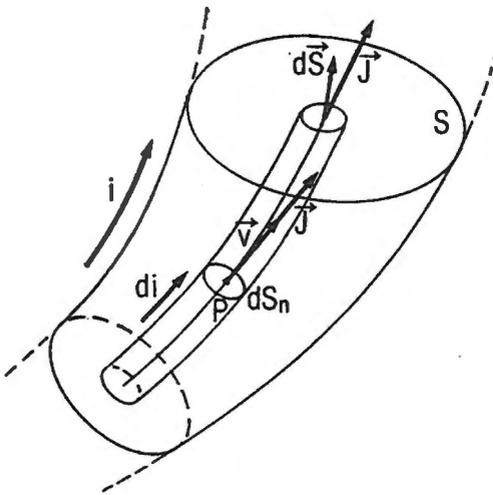


Fig. 15.4

Las líneas del campo de velocidades de arrastre se denominan líneas de corrientes, y coinciden con las trayectorias de los portadores de carga. Se llama tubo de corriente al conjunto de líneas de corriente que atraviesan un elemento de superficie situado en el interior del conductor.

Se denomina intensidad de corriente eléctrica a la cantidad de carga que atraviesa, en la unidad de tiempo, una sección transversal cualquiera del conductor

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (15.1)$$

Evidentemente, dicha magnitud no depende, en régimen estacionario, de cual sea la sección transversal considerada; lo contrario implicaría una variación, con el tiempo, de la densidad de portadores de carga.

En el S.I. de unidades la intensidad es una magnitud fundamental. Su unidad es el **amperio**, cuya definición se realizará posteriormente a partir de las propiedades magnéticas de las corrientes eléctricas.

La intensidad de corriente cuantifica el flujo total de carga a través de una sección del conductor, pero no ofrece ninguna información sobre la distribución puntual de este flujo de portadores de carga.

El estado de movimiento de las cargas puede ser descrito a través del campo vectorial de velocidades de arrastre, o bien mediante un nuevo campo, el campo de densidades de corriente, que se define a continuación.

Consideremos un punto cualquiera,  $P$ , del conductor. Sea  $\vec{v}$  la velocidad de arrastre en  $P$  y  $\vec{u}$  el versor correspondiente (Fig. 15.4). Llamaremos  $dS_n$  a un elemento de superficie, centrado en  $P$  y perpendicular a  $\vec{u}$ . La intensidad que atraviesa  $dS_n$  es  $di$ . Se define el vector densidad de corriente,  $\vec{J}$ , como

$$\vec{J} = \frac{di}{dS_n} \vec{u} \quad (15.2)$$

es decir, la densidad de corriente es un vector cuya dirección y sentido son los de la velocidad de arrastre en cada punto y cuyo módulo es la carga que atraviesa, en la unidad de tiempo, una unidad de superficie normal a  $\vec{v}$ .

Las dimensiones de la densidad de corriente son las de una intensidad por unidad de superficie ( $IL^{-2}$ ) y se mide en  $Am^{-2}$ .

La intensidad  $di$ , que circula por el tubo de corriente que se apoya en  $dS_n$  es, según (15.2) (Fig. 15.5).

$$di = J dS_n \quad (15.3)$$

o bien, si se considera una sección transversal cualquiera de dicho tubo

$$di = J dS \cos \alpha = \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (15.4)$$

es decir, la intensidad a través de un elemento de superficie es igual al flujo de la densidad de corriente a través de dicho elemento. Por tanto, la intensidad que circula a través de una sección transversal cualquiera del conductor,  $S$ , es

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} \quad (15.5)$$

o sea, la intensidad es el flujo de la densidad de corriente a través de una sección transversal.

Finalmente, estableceremos la relación que liga a los campos de las velocidades de arrastre y de densidades de corriente.

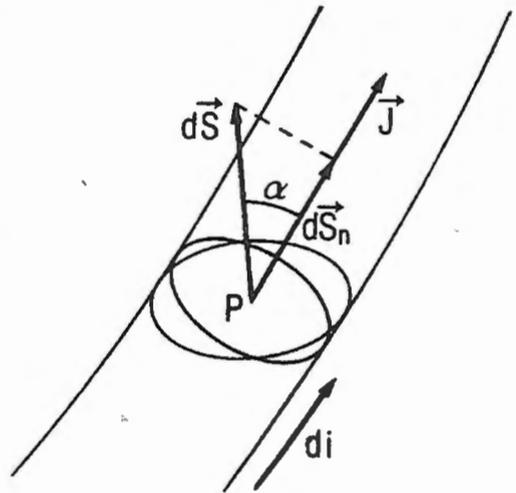


Fig. 15.5

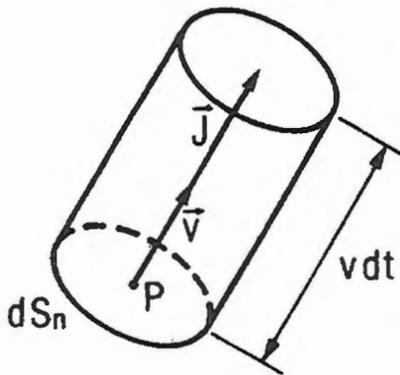


Fig. 15.6

Para ello supongamos que en el conductor hay un sólo tipo de cargas libres, siendo  $q$  la carga de cada una. Llamaremos  $n$  al número de cargas libres por unidad de volumen. Consideremos, en un punto  $P$ , un elemento de superficie  $dS_n$  normal a  $\vec{J}$ . Sea  $\vec{v}$  la velocidad de arrastre en  $P$ . Todas las cargas que atraviesan  $dS_n$  durante el intervalo de tiempo  $dt$  se encuentran en el interior de un cilindro recto de base  $dS_n$  y de altura  $v dt$  (Fig. 15.6). La carga total contenida en dicho cilindro es

$$dQ = \vec{v} \cdot d\vec{S}_n q n dt$$

Pero, por otra parte  $dQ$  puede calcularse como

$$dQ = di dt = \vec{J} \cdot d\vec{S}_n dt$$

Igualando ambas expresiones se obtiene

$$\vec{J} = \vec{v} q n \tag{15.6}$$

### 15.3. Ley de Ohm. Resistencia

#### 15.3.1. Ley de Ohm

Tal como se ha indicado en las secciones precedentes, la corriente eléctrica se establece en un conductor bajo la acción de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Salvo que se indique lo contrario, admitiremos que dicho campo eléctrico es del mismo tipo que el descrito en la electrostática: deriva de potencial y obedece a la ecuación de Poisson.

En numerosos conductores (metales a temperatura constante, por ejemplo) se puede establecer una relación local muy simple entre el campo eléctrico  $\vec{E}$  y la densidad de corriente que produce,  $\vec{J}$ . Esta relación recibe el nombre de ley de Ohm.

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \tag{15.7}$$

Es decir, la densidad de corriente y el campo eléctrico son proporcionales. La constante  $\sigma$  es una característica del conductor y de la temperatura, independientemente de  $\vec{J}$  y de  $\vec{E}$ . Se denomina **conductividad**. La inversa de la conductividad se llama resistividad  $\rho$ .

$$\rho = \frac{1}{\sigma} \tag{15.8}$$

Hay que señalar que la ley de Ohm no constituye una ley general de la electricidad sino que se trata de una propiedad de cierto tipo de conductores. Los conductores que verifican la ley de Ohm se denominan óhmicos o lineales.

### 15.3.2. Resistencia

Sea un tramo de conductor comprendido entre dos superficies equipotenciales  $S_1$  y  $S_2$ , de potenciales  $V_1$  y  $V_2$ , respectivamente (Fig. 15.7). La intensidad que circula por dicho conductor es  $i$ . Se define como resistencia del conductor entre las secciones  $S_1$  y  $S_2$  a la relación

$$R = \frac{V_1 - V_2}{i} \tag{15.9}$$

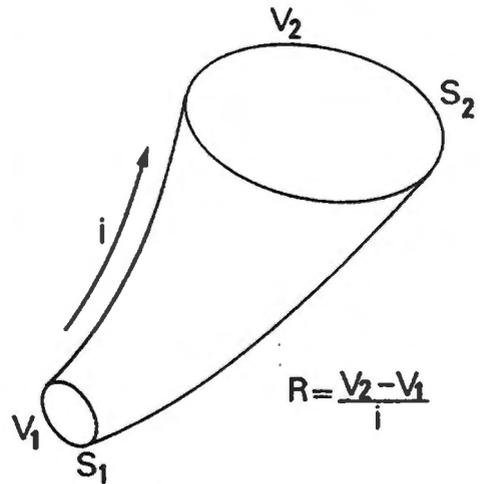


Fig. 15.7

Hay que señalar que, si el conductor es óhmico y el flujo de cargas se debe únicamente a la existencia de un campo de tipo electrostático (no hay fuerzas electromotrices), la relación (15.9) es una constante independiente de  $V_1 - V_2$  y de  $i$ . Para demostrarlo basta considerar que si se multiplican por un escalar  $\lambda$  los potenciales  $V_1$  y  $V_2$ , el campo eléctrico en cada punto también se ve aumentado por el factor  $\lambda$ , así como las densidades de corriente  $\vec{J}$ . En definitiva, al multiplicar por  $\lambda$  a  $V_1$  y  $V_2$ , entonces la intensidad  $i$  a través  $S_1$  o  $S_2$  es multiplicada por el mismo factor, con lo cual la relación (15.9) no cambia.

En estas condiciones, el producto  $Ri = V_1 - V_2$  se llama caída de tensión óhmica entre  $S_1$  y  $S_2$ .

El cálculo de la resistencia de un conductor de forma cualquiera es un problema complejo. A continuación estudiaremos algunos casos particulares sencillos.

a) Resistencia de un conductor cilíndrico y homogéneo (Fig. 15.8).

Consideremos un conductor cilíndrico y homogéneo de longitud  $L$  y sección recta  $S$ . Sean  $V_1$  y  $V_2$  los potenciales de las secciones extremas e  $i$  la intensidad que circula por el conductor.

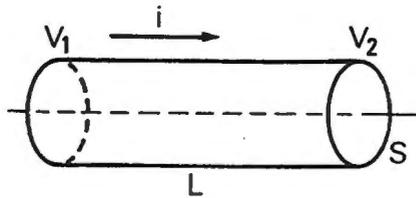


Fig. 15.8

Por razones de simetría, las líneas de corriente son rectas paralelas al eje del cilindro. Por otra parte, la densidad de corriente toma el mismo valor en todos los puntos de una sección recta, es decir

$$i = J \cdot S$$

Por tanto

$$J = \frac{i}{S} = \sigma E$$

La ddp entre las secciones extremas es, en definitiva

$$V_1 - V_2 = E \cdot L = \frac{\rho i}{S} L$$

de donde se deduce que

$$R = \frac{V_1 - V_2}{i} = \frac{\rho L}{S} \quad (15.10)$$

- b) Resistencia de un conductor filiforme de sección variable (Fig. 15.9).

Sea un conductor filiforme de sección lentamente variable. Admitiremos que las secciones rectas son superficies equipotenciales. En estas condiciones, el hilo puede ser descompuesto en elementos de sección  $S$  y longitud  $dL$ . La resistencia de tal elemento es según (15.10)

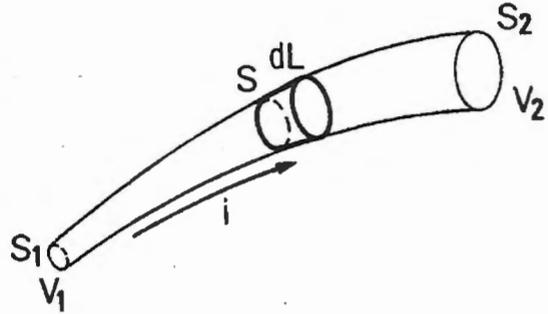


Fig. 15.9

$$dR = \frac{\rho dL}{S}$$

por lo que la resistencia del hilo es

$$R = \int_1^2 \frac{\rho dL}{S} \quad (15.11)$$

- c) Resistencia de un conductor situado entre las armaduras de un condensador (Fig. 15.10).

Supongamos un conductor que rellena el espacio entre las armaduras de un condensador. Admitiendo que la resistividad de las armaduras es despreciable frente a la del conductor, entonces dichas armaduras constituyen superficies equipotenciales. Por tanto, las líneas del campo eléctrico, así como las líneas de corriente son normales a las armaduras. Sean  $V_1$  y  $V_2$  (con  $V_1 > V_2$ ) los potenciales constantes de las mismas.

Consideremos una superficie cerrada  $S$  que rodea a la armadura 1. La intensidad que circula a través de  $S$  es

$$i = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \sigma \iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} \quad (15.12)$$

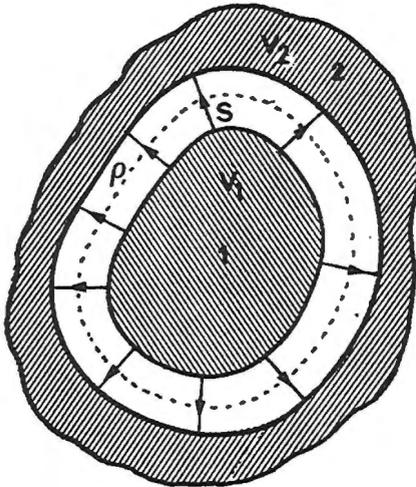


Fig. 15.10

Para calcular la integral que aparece en (15.12) consideremos un sistema similar al de la figura 15.10 pero en la que se ha eliminado el conductor, existiendo vacío entre las armaduras. Las armaduras son mantenidas a los potenciales \$V\_1\$ y \$V\_2\$.

Evidentemente, la distribución de potenciales es la misma en los dos sistemas, ya que en ambos casos \$V\$ debe verificar la misma ecuación (ecuación de Laplace) y las condiciones de contorno son idénticas. Por tanto, el campo eléctrico también es idéntico en los dos sistemas. Teniendo en cuenta el segundo sistema, es obvio que

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} = \frac{C_0(V_1 - V_2)}{\epsilon_0} \quad (15.13)$$

donde \$C\_0\$ es la capacidad de dicho sistema. Sustituyendo (15.13) en (15.12) se llega a

$$i = \sigma \frac{C_0(V_1 - V_2)}{\epsilon_0}$$

de donde se deduce que

$$R = \frac{(V_1 - V_2)}{i} = \frac{\epsilon_0}{\sigma C_0} \quad (15.14)$$

### 15.3.3. Dimensiones y unidades

Teniendo en cuenta (15.9) se deduce que la ecuación de dimensiones de la resistencia es

$$[R] = \frac{[V]}{[i]} = \frac{ML^2 T^{-2} I^{-1} T^{-1}}{I} = ML^2 T^{-2} I^{-2}$$

La unidad de resistencia es el ohmio ( $\Omega$ ) que se define como la resistencia que existe entre dos puntos de un conductor cuando al aplicar entre dichos puntos una ddp de 1 voltio circula una intensidad de 1 amperio.

La relación dimensional entre la resistividad y la resistencia que queda reflejada en la expresión (15.10)

$$[\rho] = [R]L$$

Por tanto, en el S.I., la unidad de resistividad es el  $\Omega \cdot m$ . La conductividad se mide en  $\Omega^{-1} m^{-1}$ .

El símbolo utilizado para representar una resistencia en un circuito eléctrico es  Aquellos conductores con resistencia despreciable se representan mediante líneas rectas.

#### 15.3.4. Asociación de resistencias

##### a) Asociación en serie.

La figura 15.11, - muestra un conjunto de  $n$  resistencias asociadas en serie. En este tipo de asociación, la corriente  $i$  que circula por todos los elementos de la misma.

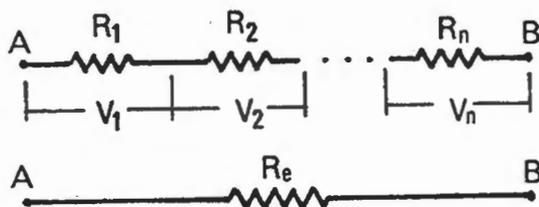


Fig. 15.11

Aplicando la ecuación (15.9) a cada resistencia y teniendo en cuenta que

$$V_A - V_B = \sum_j \Delta V_j$$

resulta que

$$V_A - V_B = \sum_j R_j i = i \sum_j R_j = i R_{eq}$$

Por tanto, la resistencia equivalente del sistema es

$$R_{eq} = \sum_{j=1}^n R_j \tag{15.15}$$

b) Asociación en paralelo.

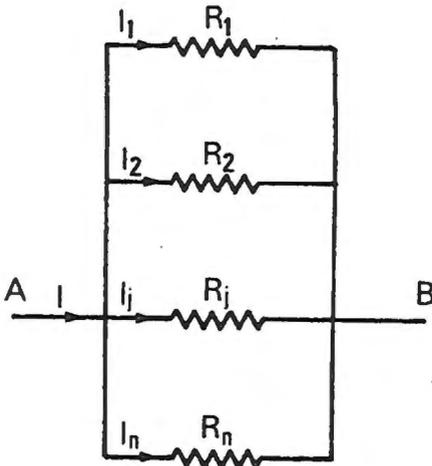


Fig. 15.12

La figura 15.12 muestra un conjunto de  $n$  resistencias asociadas en paralelo. En este caso, la intensidad que circula por cada resistencia es distinta, pero la caída de tensión es la misma en todas.

Aplicando la ecuación (15.9) a la resistencia  $j$ -ésima resulta

$$i_j = \frac{V_A - V_B}{R_j}$$

y, teniendo en cuenta que

$$i = \sum_j i_j$$

resulta

$$i = \sum_j \frac{V_A - V_B}{R_j} = (V_A - V_B) \sum_j \frac{1}{R_j}$$

En definitiva, el conjunto de resistencias en paralelo se puede sustituir por una resistencia única cuyo valor viene dado por la expresión

$$\frac{1}{R_{eq}} = \sum_{j=1}^n \frac{1}{R_j} \quad (15.16)$$

### 15.4. Ley de Joule

Supongamos un conductor de forma cualquiera, limitado por dos secciones equipotenciales  $V_1$  y  $V_2$  (Fig. 15.7), en el que se ha establecido un régimen estacionario caracterizado por una densidad de corriente  $\vec{J}$  o una intensidad  $i$ . Analicemos la variación de la energía de los portadores de carga al pasar desde la sección  $S_1$  a la sección  $S_2$ .

En cada posición, la energía total de un portador de carga es la suma de sus energías cinética ( $T = 1/2 m v^2$ ) y potencial ( $U = q V$ ). Ahora bien, teniendo en cuenta que la masa de los electrones es muy pequeña y que las velocidades de arrastre son muy débiles (ver problema 15.1) es posible despreciar las variaciones de la energía cinética de los portadores y considerar únicamente su energía potencial.

Así, durante un intervalo de tiempo  $dt$ , por la sección  $S_1$  entra una carga  $i dt$ , cuya energía potencial es

$$dU_1 = V_1 i dt$$

mientras que, por la sección  $S_2$  sale la misma carga pero con una energía potencial menor

$$dU_2 = V_2 i dt$$

por tanto, durante este intervalo de tiempo los electrones pierden una energía potencial

$$dW = (V_1 - V_2) i dt \quad (15.17)$$

o bien, teniendo en cuenta la definición de resistencia

$$dW = i^2 R dt \quad (15.18)$$

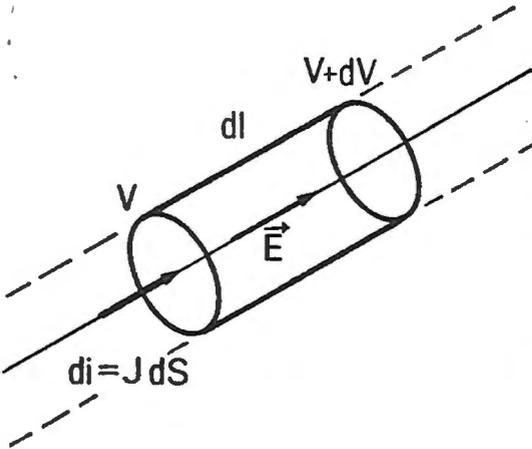
Esta energía eléctrica se transforma en calor, lo que constituye el denominado efecto Joule.

La potencia disipada es, a partir de (15.18)

$$P = \frac{dW}{dt} = i^2 R = (V_1 - V_2) i \quad (15.19)$$

La expresión (15.19) lleva a la definición del voltio, a partir del vatio y del amperio, como la diferencia de potencial existente entre dos puntos de un conductor cuando, al circular por éste una intensidad de 1 amperio, la potencia disipada entre dichos puntos es de un vatio.

Hay que señalar que la noción de resistencia está ligada al efecto Joule; así, una resistencia pura queda caracterizada por el hecho de que toda la energía que consume se transforma en calor (a diferencia de otros elementos como autoinducciones o motores, que pueden transformar energía eléctrica en otros tipo de energía).



**Fig. 15.13**

tensión es

$$dV = E dl = \rho J dl$$

Calculemos a continuación la potencia disipada, por unidad de volumen en cada punto del conductor. Para ello consideremos una porción de un tubo de corriente, de sección recta  $dS$  y longitud  $dl$  (Fig. 15.13).

La carga que entra y que sale en dicho elemento de volumen en el intervalo de tiempo  $dt$  es

$$dq = J dS dt$$

Por otra parte, la caída de

Por tanto, la pérdida de energía potencial es

$$d^2W = \rho J^2 dS dl dt$$

y la potencia disipada

$$dP = \rho J^2 dS dl = \rho J^2 d\tau$$

En definitiva, la potencia disipada por unidad de volumen,  $P$ , es

$$P = \frac{dP}{d\tau} = \rho J^2 = \sigma E^2 \quad (15.20)$$

expresión que constituye la forma local de la ley de Joule.



## PROBLEMAS

P.15.1 Un hilo de cobre de 2.5 mm. de diámetro transporta una corriente de 10 A. Suponiendo que en el cobre hay un electrón libre por cada átomo, calcular la velocidad de arrastre de los electrones. Datos:

- Peso atómico del cobre = 63.5 g / mol .
- Densidad =  $8.9 \cdot 10^3$  kg / m<sup>3</sup>.
- Número de Avogadro =  $6.02 \cdot 10^{23}$  átomos / mol.

### SOLUCIÓN

$$V = 1.5 \cdot 10^{-4} \text{ m/s}$$

P.15.2. Sea un conductor cilíndrico muy largo, de sección circular y radio  $r_0$ . La resistividad del conductor varía según la relación  $\rho = \alpha / r^2$ , donde  $r$  es la distancia del punto considerado al eje del cilindro. Calcular:

- a) Resistencia de una longitud  $L$  de dicho hilo.
- b) Campo eléctrico en el conductor para una intensidad de corriente  $i$ .

### SOLUCIÓN

a)  $R = 2\alpha L / (\pi r_0^4)$

b)  $E = 2\alpha i / (\pi r_0^4)$

P.15.3. Dos electrodos esféricos y concéntricos, de radios  $r_1$  y  $r_2$  ( $r_2 > r_1$ ) están conectados a un generador, de forma que sus potenciales son  $V_1$  y  $V_2$  respectivamente. Entre dichos electrodos se encuentra un conductor cuya conductividad,  $\sigma$ , es despreciable frente a la de los electrodos. Calcular la resistencia entre los electrodos.

### SOLUCIÓN

$$R = \frac{r_2 - r_1}{4\pi\sigma r_1 r_2}$$

P.15.4. Un conductor cilíndrico de sección  $S$  y longitud  $L$  es recorrido por una corriente  $i$ . La resistividad de dicho conductor varía según la relación

$$\rho = \rho_0 + \alpha x$$

donde  $x$  es la distancia de una sección recta cualquiera a uno de los extremos del hilo. Calcular:

- Resistencia del hilo.
- Potencia disipada en el hilo por efecto Joule.

### SOLUCIÓN

$$a) \quad R = L \left( \rho_0 + \frac{\alpha L}{2} \right) / S$$

$$b) \quad P = \frac{i^2 L}{S} \left( \rho_0 + \frac{\alpha L}{2} \right)$$

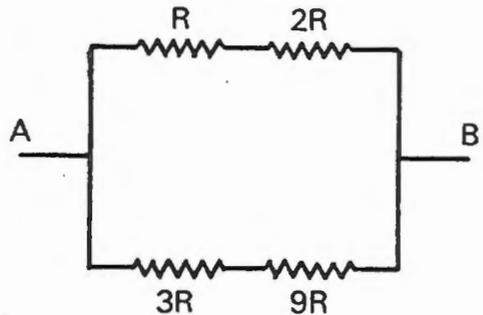
P.15.5. Un condensador plano tiene entre sus armaduras un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$  y conductividad  $\sigma$ . El condensador se carga con una carga inicial  $q_0$ .

a) Demostrar que el condensador se descarga a través del dieléctrico según la ley exponencial.

$$q(t) = q_0 \exp(-\sigma t / \epsilon)$$

b) Demostrar que la energía disipada en el dieléctrico por efecto Joule durante la descarga es igual a la energía electrostática almacenada inicialmente en el condensador.

P.15.6. Dada la asociación de resistencias de la figura, indicar cuál de ellas consume más potencia al aplicar entre A y B una ddp V.



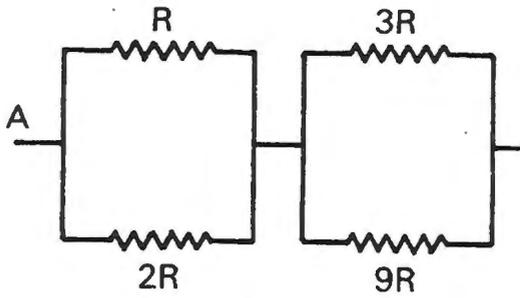
P. 15.6

**SOLUCIÓN**

La resistencia  $2R$ , que consume una

$$P = \frac{2}{9} \frac{V^2}{R}$$

P.15.7. Dada la asociación de resistencia de la figura, indicar cual de ellas consume más potencia al aplicar entre A y B una ddp V.



P. 15.7

**SOLUCIÓN**

La resistencia  $3 R$ , que consume

$$P = 0'198 \frac{V^2}{R}$$

# CAPÍTULO 16

## CIRCUITOS DE CORRIENTE CONTINUA

### *16.1. Generadores. Fuerza electromotriz*

Tal como se ha visto en el capítulo anterior, la existencia de una corriente continua a través de los conductores que constituyen un circuito eléctrico implica una disipación de energía en forma de calor por efecto de Joule. Por otra parte, en un circuito pueden aparecer otros dispositivos que transformen energía eléctrica en otras formas de energía (motores, acumuladores, etc.).

En definitiva, en todo circuito eléctrico existen elementos pasivos (que consumen energía), por lo cual, para mantener una corriente continua, son necesarios otros elementos que aporten energía eléctrica al circuito. Ésta es la función de los generadores, que son dispositivos capaces de transformar algún tipo de energía (mecánica, química, luminosa, térmica, etc.) en energía eléctrica.

Se denomina fuerza electromotriz (f.e.m.),  $\mathcal{E}$ , de un generador a la cantidad de energía eléctrica que desarrolla este por unidad de carga que pasa entre sus bornes.

$$\mathcal{E} = \frac{dW}{dq} \quad (16.1)$$

Evidentemente, la f.e.m. tiene dimensiones de potencial y su unidad, en el S.I., es el voltio.

La potencia desarrollada por el generador es, a partir de (16.1),

$$P = \frac{dW}{dt} = \frac{dW}{dq} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E} i \quad (16.2)$$

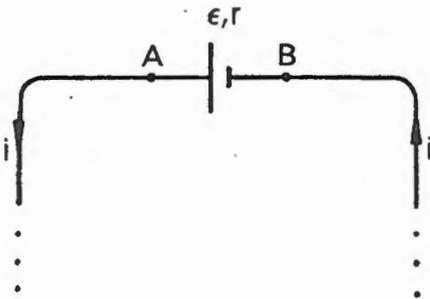


Fig. 16.1

Hay que señalar que no toda la potencia desarrollada por el generador queda disponible para ser consumida en el resto del circuito: una parte de dicha potencia es disipada en el mismo generador por efecto Joule.

Para precisar esta cuestión consideremos un generador, de f.e.m.  $\mathcal{E}$ , que forma parte de un circuito. Sea  $i$  la intensidad de corriente en dicho circuito, y  $V_A$  y  $V_B$  los potenciales en bornes del generador ( $V_A > V_B$ ), tal como se muestra en la figura 16.1.

Los portadores de carga salen desde el punto A, con una energía  $qV_A$ , recorren el circuito y llegan a B con una energía menor,  $qV_B$ . La potencia consumida en el tramo AB (no dibujado en la figura) es, por tanto,

$$P_1 = i(V_A - V_B) \tag{16.3}$$

Si  $P_1 = P$ , entonces el generador se llama ideal y, comparando (16.2) y (16.3) se deduce que

$$\mathcal{E} = V_A - V_B \tag{16.4}$$

Es decir, en un generador ideal la diferencia de potencial entre sus bornes es igual a la f.e.m., independientemente de la intensidad que circule por él.

En los generadores reales, por el contrario, la potencia desarrollada es superior a la consumida por el resto del circuito,  $P > P_1$ , por lo que

$$\mathcal{E} > V_A - V_B$$

Esta diferencia de potencias puede explicarse si se tiene en cuenta que en el generador se disipa, por efecto Joule, una potencia igual a

$$P_2 = i^2 r \tag{16.5}$$

donde  $r$  es la resistencia interna del generador.

La potencia desarrollada  $P$  es, en definitiva, la suma de las potencias  $P_1$  y  $P_2$ , consumidas fuera y dentro del generador respectivamente:

$$P = P_1 + P_2$$

o bien

$$\mathcal{E}i = (V_A - V_B)i + i^2 r \quad (16.6)$$

y, dividiendo por  $i$ ;

$$\mathcal{E} = (V_A - V_B) + ir \quad (16.7)$$

Finalmente despejando  $V_A - V_B$ , resulta

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - ir \quad (16.8)$$

es decir, la ddp entre los bornes de un generador es igual a f.e.m. menos la caída de tensión óhmica debida a su resistencia interna.

Si el circuito está abierto ( $i = 0$ ), entonces  $V_A - V_B = \mathcal{E}$ , por lo que f.e.m. puede obtenerse como la ddp entre los bornes del generador en circuito abierto.

De ahora en adelante se supondrá que tanto la f.e.m. como la resistencia interna del generador son valores constantes, independientes de la intensidad de corriente. Los generadores que cumplen esta condición se llaman generadores lineales, ya que la curva que representa la variación  $V$  en función de  $i$  es una línea recta. Dicha curva recibe el nombre de característica tensión-corriente del generador.

En la figura 16.2, se representan las características tensión-corriente de un generador ideal y de uno lineal. En ambos casos, la f.e.m. es la ordenada en el origen. La pendiente de la recta, cambiada de signo, representa la resistencia interna del generador.

Finalmente, definiremos el rendimiento del generador como el cociente entre la potencia que suministra el circuito y la potencia total que desarrolla:

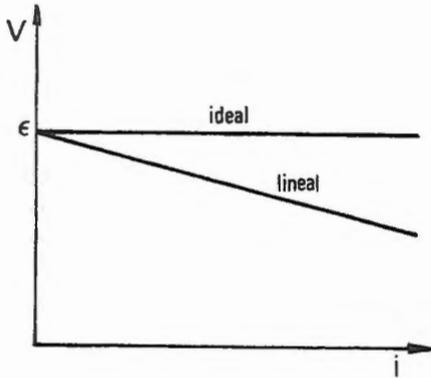


Fig. 16.2

$$\eta = \frac{P_1}{P} = \frac{V}{\epsilon} = \frac{\epsilon - ir}{\epsilon} = 1 - \frac{ir}{\epsilon} \quad (16.9)$$

de donde se deduce que el rendimiento aumenta al disminuir la resistencia interna. En un generador ideal el rendimiento es la unidad.

### 16.2., Receptores. Fuerza contraelectromotriz

Se denomina receptor a un dispositivo que transforma una parte de la energía eléctrica que recibe del circuito en otra forma de energía distinta de la calorífica producida por efecto Joule. Como ejemplo de receptores podemos señalar los motores o las cubas electrolíticas, que transforman la energía eléctrica en energía mecánica y química, respectivamente. El esquema convencional para representar un receptor es



Consideremos un receptor conectado a un circuito eléctrico por el que circula una corriente  $i$ . Denotaremos por  $dW'$  la energía eléctrica que, durante un intervalo de tiempo  $dt$ , es transformada en otra forma de energía distinta de la calorífica. Durante dicho intervalo de tiempo, por el receptor pasa una carga  $dq$ . Se define la fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.) del generador,  $\epsilon'$ , como

$$\epsilon' = \frac{dW'}{dq} \quad (16.10)$$

es decir, la f.c.e.m. es la energía (no calorífica) que desarrolla el receptor por unidad de carga que pasa entre sus bornes. Evidentemente la f.c.e.m. tiene las mismas dimensiones y unidades que la f.e.m.

La potencia no calorífica que desarrolla el receptor es, teniendo en cuenta (16.10)

$$P' = \frac{dW'}{dt} = \frac{dW'}{dq} \frac{dq}{dt} = \mathcal{E}' i \quad (16.11)$$

De forma similar a lo visto en el caso de los generadores, la transformación de energía eléctrica en energía mecánica o química no es completa. Así, en los receptores reales una parte de la energía eléctrica que reciben del circuito se disipa en forma de calor por efecto Joule.

En efecto, teniendo en cuenta la situación mostrada en la figura 16.3, la potencia total que el receptor toma del circuito es

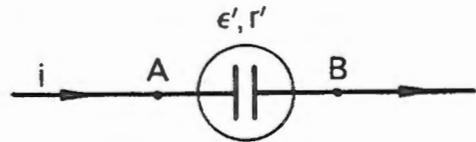


Fig. 16.3

$$P = (V_A - V_B) i$$

La potencia que se disipa por el efecto Joule es

$$P_1 = i^2 r'$$

donde  $r'$  es la resistencia interna del receptor.

Finalmente, la potencia no calorífica que desarrolla el receptor es

$$P_2 = \mathcal{E}' i$$

Teniendo en cuenta el principio de conservación de la energía, puede escribirse que

$$(V_A - V_B) i = i^2 r' + \mathcal{E}' i \quad (16.12)$$

y, dividiendo por  $i$ , resulta

$$V_A - V_B = i r' + \mathcal{E}' \quad (16.13)$$

Es decir, la ddp en bornes de un receptor es igual a su f.c.e.m. más la caída de tensión óhmica que aparece en el mismo como consecuencia de su resistencia interna.

En el caso más general, la f.c.e.m.  $\mathcal{E}'$  es una función de la intensidad que circula por el receptor, de forma que la característica tensión corriente no es una recta. No obstante, en algunos casos es posible considerar que tanto  $\mathcal{E}'$  como  $r'$  son independientes de  $i$ , al menos para un cierto intervalo de intensidades. En estas condiciones, se dice que el receptor es lineal.

### 16.3. Aparatos polarizados y no polarizados

Existen aparatos que pueden funcionar, bien como generadores, bien como receptores. Así, un acumulador puede comportarse como un generador si la corriente pasa a través de él desde el polo - hacia el polo +; si la corriente circula en sentido contrario el acumulador funciona como receptor. Estos dispositivos reciben el nombre de aparatos polarizados. El símbolo utilizado para representarlos en los circuitos es el mismo que se emplea para los generadores.

Si la f.e.m. y la f.c.e.m. de un aparato polarizado son iguales, entonces se dice que este es reversible.

Por el contrario, hay otros dispositivos que funcionan siempre como receptores, consumiendo energía eléctrica independientemente del sentido de la corriente. Tal es el caso de los motores y de ciertas cubas electrolíticas. Estos aparatos reciben el nombre de no polarizados.

### 16.4. Tensión entre dos puntos de un circuito

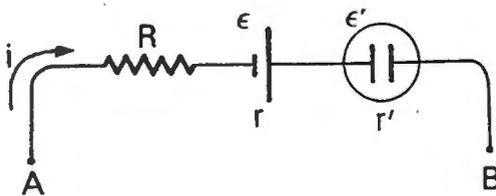


Fig. 16.4

Consideremos un tramo AB de un circuito, en el que hay conectados en serie una resistencia  $R$ , un generador de f.e.m.  $\mathcal{E}$  y resistencia interna  $r$ , y un receptor de f.c.e.m.  $\mathcal{E}'$  y resistencia interna  $r'$  (Fig. 16.4).

Efectuemos un balance de potencias en dicho tramo:

La potencia suministrada por el resto del circuito es

$$P_1 = (V_A - V_B) i$$

Por otra parte, la potencia suministrada por el generador es

$$P_2 = \mathcal{E} i$$

Finalmente, en el tramo AB se consume una potencia igual a la suma de las potencias consumidas en cada resistencia, más la potencia consumida en el receptor. En definitiva, la potencia total consumida es

$$P_3 = i^2 (R + r + r') + \mathcal{E}' i$$

Aplicando la conservación de la energía, se deduce que

$$P_1 + P_2 = P_3$$

es decir

$$(V_A - V_B) i + \mathcal{E} i = i^2 (R + r + r') + \mathcal{E}' i \quad (16.14)$$

y, despejando  $V_A - V_B$ , resulta

$$V_A - V_B = i(R + r + r') - \mathcal{E} + \mathcal{E}' \quad (16.15)$$

o, escrito en forma genral

$$V_A - V_B = i \sum R - \sum \mathcal{E} \quad (16.16)$$

donde  $\sum R$  es la suma de todas las resistencias y  $\sum \mathcal{E}$  es la suma de las f.e.m. (consideradas como positivas) y de las f.c.e.m. (negativas).

En definitiva, la ddp entre dos puntos A y B, de un circuito es igual a la caída de tensión óhmica menos la suma de f.e.m. (las f.c.e.m. se consideran como f.e.m. negativas).

La expresión (16.16) recibe el nombre de ley de Ohm generalizada.

### 16.5. Ecuación del circuito

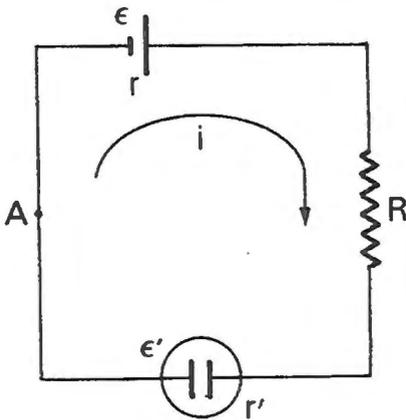


Fig. 16.5

Sea un circuito cerrado como el mostrado en la figura 16.5. Para obtener una relación entre las magnitudes eléctricas de todos los elementos que forman parte del mismo, basta con aplicar la relación (16.15) cuando los dos puntos A y B coinciden. Entonces,  $V_A - V_A = 0$  y, despejando  $i$  resulta

$$i = \frac{\epsilon - \epsilon'}{R + r + r'} \quad (16.17)$$

o, de forma más general

$$i = \frac{\sum \epsilon}{\sum R} \quad (16.18)$$

es decir, la intensidad que circula por un circuito viene dada por el cociente entre la suma algebraica de todas las f.e.m. del mismo y la suma de todas las resistencias del mismo.

### 16.6. Asociación de generadores

El caso general de asociación de generadores de características distintas se calcula a partir de métodos específicos de análisis de circuitos que serán explicados en un capítulo posterior. Por tanto, en este apartado nos ceñiremos al estudio de la asociación de generadores de idénticas características.

a) Asociación en serie (Fig. 16.6.a).

Consideremos un conjunto de  $n$  generadores idénticos de f.e.m.  $\epsilon$  y resistencia interna  $r$ .

Si dicha asociación se conecta a una resistencia  $R$ , la ecuación del circuito resulta de

$$i = \frac{n\mathcal{E}}{R + nr} \quad (16.19)$$

de donde se deduce que el conjunto de generadores equivale a uno sólo, cuya f.e.m. y resistencia interna son

$$\mathcal{E}_{eq} = n\mathcal{E}$$

$$r_{eq} = nr$$

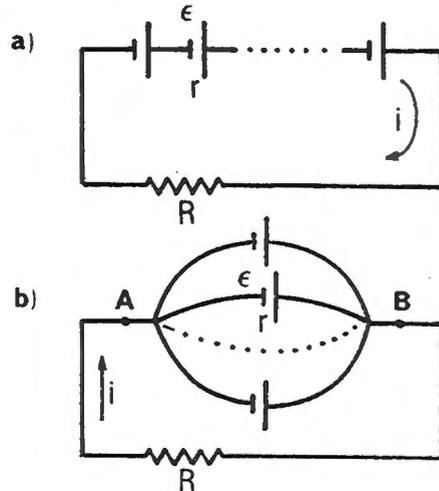


Fig. 16.6

b) Asociación en paralelo.

Si los  $n$  generadores se asocian en paralelo (Fig. 16.6.b), por cada uno de ellos pasa la intensidad  $i/n$ , y la ddp entre A y B es, de acuerdo con (16.16)

$$V_A - V_B = \mathcal{E} - \frac{ir}{n} = Ri$$

despejando  $i$ , resulta

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R + r/n} \quad (16.20)$$

De donde se deduce que el generador equivalente a la asociación tiene como f.e.m. y como resistencia interna los valores

$$\mathcal{E}_{eq} = \mathcal{E}$$

$$r_{eq} = \frac{r}{n}$$

**Nota complementaria 16.1. Campo electromotor. Circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de un circuito cerrado.**

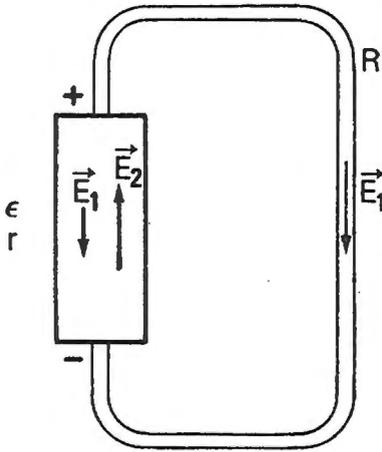


Fig. 16.7

Consideremos un circuito como el mostrado en la figura 16.7, constituido por un conductor filiforme y óhmico y un generador de f.e.m.  $\epsilon$  y resistencia interna  $r$ .

Denominaremos  $\vec{E}$  al campo eléctrico en una sección cualquiera del circuito. Veamos cual es la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de todo el circuito. Así, teniendo en cuenta la ley de Ohm resulta

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \oint \rho \vec{J} \cdot d\vec{l}$$

pero

$$\vec{J} \cdot d\vec{l} = \frac{idl}{S}$$

en un circuito filiforme, por tanto

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = i \oint \frac{\rho dl}{S} = i(R + r) \tag{16.21}$$

donde  $R$  es la resistencia del conductor. Obsérvese que en (16.21) aparece también la resistencia interna del generador ya que la integral se extiende a lo largo de todo el circuito.

Por otra parte, según la ecuación del circuito, (16.21) se transforma en

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \epsilon \tag{16.22}$$

es decir, la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de un circuito es igual a la f.e.m. del mismo. Esta expresión constituye otra forma de definir la f.e.m. de un generador. Comentemos brevemente las consecuencias de esta ecuación.

En la lección 11 se definió el campo electrostático y se establecieron algunas de sus propiedades fundamentales. Una de ellas es que dicho campo deriva de potencial por lo cual su circulación a lo largo de cualquier camino cerrado debe ser nula.

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$$

Ahora bien, en la ecuación (16.22) hemos llegado al resultado de una circulación no nula. Ello implica que el campo  $\vec{E}$  que aparece en ella no es electrostático en todos los puntos del circuito.

En efecto, si admitimos que la f.e.m. del circuito está concentrada en el generador (el resto del circuito es puramente resistivo), las cargas eléctricas salen del polo positivo y se desplazan a lo largo del conductor R por acción de un campo electrostático  $\vec{E}_1$ . Sin embargo, al llegar al polo  $-$ , las cargas pasan de un potencial  $V_B$  a otro mayor  $V_A$ . Evidentemente, la fuerza que eleva la energía potencial de las cargas en su paso por el generador no es naturaleza electrostática. Esto puede explicarse si se admite que en el interior del generador existe, además del campo  $\vec{E}_1$  (dirigido en el sentido de los potenciales decrecientes) otro campo, denominado campo electromotor  $\vec{E}_2$ , que no deriva de potencial y que va dirigido en el sentido de los potenciales crecientes. La naturaleza de este campo electromotor depende del tipo de generador. En la lección 19 estudiaremos como puede generarse a partir de un campo magnético variable.

La relación existente entre el campo electromotor y la f.e.m. puede obtenerse si se tiene en cuenta que

$$\oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} = 0$$

ya que  $\vec{E}_1$  sí deriva de potencial.

Por tanto

$$\begin{aligned} \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} &= \int_{AB} \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{BA} (\vec{E}_1 + \vec{E}_2) \cdot d\vec{l} = \oint \vec{E}_1 \cdot d\vec{l} + \int_{BA} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \\ &= \int_{BA} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} \end{aligned}$$

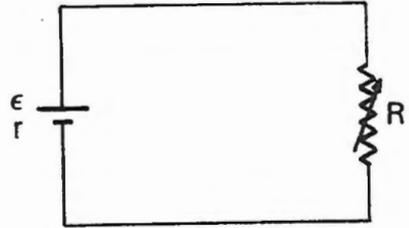
En definitiva

$$\int_{BA} \vec{E}_2 \cdot d\vec{l} = \mathcal{E}$$

es decir, la f.e.m. es igual a la circulación del campo electromotor a lo largo del generador.

## PROBLEMAS

- P.16.1 Dado el circuito de la figura, calcular el valor de la resistencia  $R$  para que la potencia consumida por ella sea máxima.



**SOLUCIÓN**

$$R = r$$

P. 16.1

- P.16.2. Dado el circuito de la figura, calcular la ddp entre A y B

Datos:

$$R_1 = 10\Omega;$$

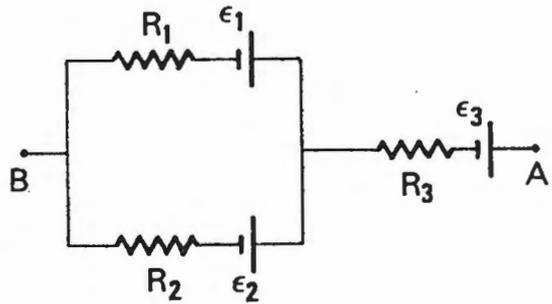
$$R_2 = 20\Omega;$$

$$R_3 = 30\Omega$$

$$\mathcal{E}_1 = 20\text{V};$$

$$\mathcal{E}_2 = 5\text{V};$$

$$\mathcal{E}_3 = 30\text{V}$$



P. 16.2

**SOLUCIÓN**

$$V_{AB} = 45\text{V}$$

## Electromagnetismo y semiconductores

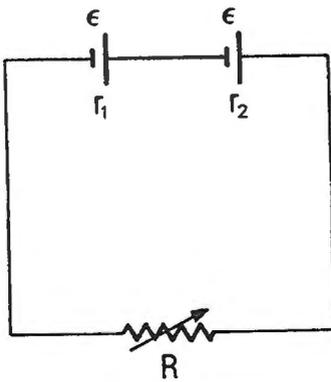
---

P.16.3. Un conjunto de  $n$  generadores idénticos, con f.e.m.  $\epsilon$  y resistencia interna  $r$  cada uno, se asocian en serie, cerrando el circuito mediante un hilo sin resistencia.

- Calcular la intensidad que circula por el circuito.
- Calcular la ddp entre dos puntos cualesquiera del circuito.

### SOLUCIÓN

- $i = \epsilon / r$
- $V = 0$



P.16.4

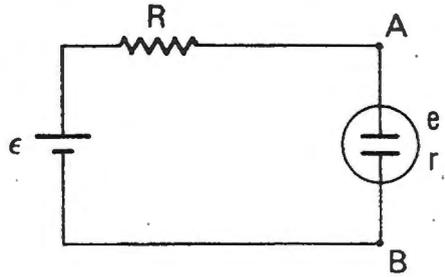
P.16.4. Dado el circuito de la figura, donde  $r_1 > r_2$ , calcular el valor de  $R$  para que se anule la ddp en bornes de uno de los generadores. Indicar en cuál de ellos.

### SOLUCIÓN

Se anula la ddp en bornes del generador con  $r_1$  si  $R = r_1 - r_2$

P.16.5. Demostrar que la potencia suministrada por un generador a un circuito es máxima cuando por él circula una intensidad igual a la mitad de la correspondiente al circuito.

P.16.6. Sea el circuito de la figura, constituido por un generador de f.e.m.  $\mathcal{E}$  y resistencia interna despreciable, una línea de resistencia total  $R$  y un motor de resistencia interna  $r$  y f.c.e.m. variable,  $e$ .



P.16.6

- Calcular  $e$  para que la potencia mecánica desarrollada por el motor sea máxima.
- Calcular la máxima potencia desarrollada por el motor.
- Definiendo el rendimiento del motor como el cociente entre la potencia desarrollada por el mismo y la potencia consumida ( $\eta = \varepsilon i / V_{AB} i$ ), calcular dicho rendimiento para el valor de  $e$  obtenido en el apartado a).

### SOLUCIÓN

$$\text{a) } e = \frac{\mathcal{E}}{2}$$

$$\text{b) } P_{\max} = \frac{\mathcal{E}^2}{4(R+r)}$$

$$\text{c) } \eta = \frac{R+r}{R+2r}$$



# CAPÍTULO 17

## ACCIONES MAGNÉTICAS SOBRE CARGAS EN MOVIMIENTO

### 17.1. Introducción

En los capítulos 11 al 13 se estudiaron las interacciones entre cargas eléctricas en reposo. Así, a partir de la ley de Coulomb y del principio de superposición se obtuvieron las expresiones para el cálculo del campo eléctrico  $\vec{E}$ , que cuantifica la acción que una distribución de cargas en reposo ejerce sobre una carga de prueba  $q$ , también en reposo. En este capítulo y el siguiente se dedican al estudio de las interacciones entre cargas eléctricas en movimiento.

Para ello es preciso introducir el concepto de inducción o campo magnético que se cuantifica mediante un campo vectorial cuya definición se introducirá en el apartado próximo.

### 17.2. Campo magnético

Sea un conjunto de cargas  $q_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) animadas de velocidades  $\vec{v}_i$ . La fuerza que este sistema ejerce sobre una carga de prueba  $q$  situada en  $P$  y con velocidad  $\vec{v}$  se puede expresar como la suma de dos términos:

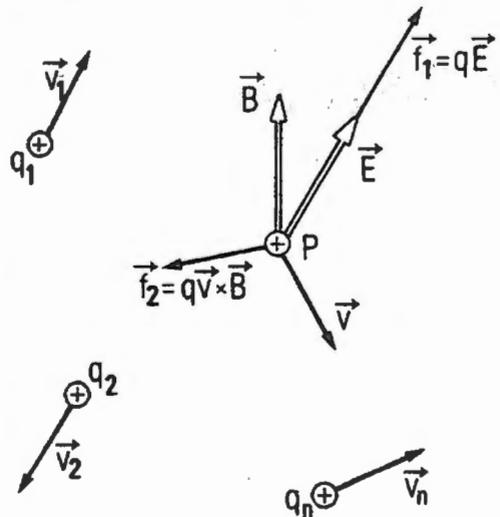


Fig. 17.1

- El primero, independiente de la velocidad  $\vec{v}$  de  $q$ , al que se denomina fuerza eléctrica y que se expresa por  $\vec{f}_1 = q\vec{E}$  donde  $\vec{E}$  es el campo eléctrico (que coincidiría con el campo electrostático definido en el capítulo 11 si las cargas  $q_i$  se encontraran en reposo).
- Un segundo término, denominado fuerza magnética, ( $\vec{f}_2$  en la figura), que viene dado por la expresión  $\vec{f}_2 = q\vec{v} \times \vec{B}$ , donde  $\vec{B}$  es el nuevo campo vectorial al que se ha denominado campo magnético.

La fuerza total ejercida por el sistema de cargas  $q_i$  sobre la carga  $q$  es, por tanto

$$\vec{f} = \vec{f}_1 + \vec{f}_2 = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}] \quad (17.1)$$

expresión que recibe el nombre de fuerza de Lorentz.

Puesto que  $\vec{B}$  está definido a partir de un producto vectorial, su sentido depende de la orientación del sistema de referencia (es un vector axial). En adelante, se supondrá a  $\vec{B}$  referido a un sistema dextrógiro.

La ecuación de dimensiones de el campo magnético puede establecerse a partir de (17.1).

$$[B] = \frac{[f]}{[q][v]} = \frac{MLT^{-2}}{ITLT^{-1}} = MT^{-2}I^{-1}$$

La unidad en el S.I. es el Tesla (T), que es el campo magnético que produce la fuerza de un newton sobre una carga de un culombio que se mueve normalmente al campo con una velocidad de un metro por segundo.

Algunas manifestaciones de las interacciones magnéticas (fuerza entre imanes, por ejemplo) fueron conocidas y estudiadas desde hace mucho tiempo. Sin embargo, el origen de estos fenómenos y su relación con el movimiento de las cargas no empezaron a ser comprendidos hasta principios del siglo pasado, cuando Oersted comprobó los efectos magnéticos asociados a las corrientes eléctricas. Posteriormente, los trabajos de Henry, Faraday y, sobre todo, Maxwell permitieron

establecer las leyes fundamentales del magnetismo y la estrecha relación existente entre los campos eléctrico y magnético como manifestaciones distintas de un mismo tipo de interacción: la interacción electromagnética.

El problema de calcular las fuerzas magnéticas ejercidas entre cargas móviles presenta dos aspectos diferenciados. El primero consiste en determinar el campo magnético creado por un sistema de cargas en movimiento; en el segundo, se trata de calcular la fuerza que actúa sobre una carga que se mueve en el interior de un campo dado. Por razones pedagógicas, comenzaremos por estudiar este segundo aspecto, es decir, consideraremos conocido el campo magnético, creado por cargas móviles o por corrientes eléctricas, y analizaremos la influencia que éste ejerce sobre otras cargas o corrientes situadas en su interior.

En el capítulo siguiente se estudiarán los campos creados por corrientes eléctricas.

### ***17.3. Movimiento de una partícula cargada en un campo magnético uniforme***

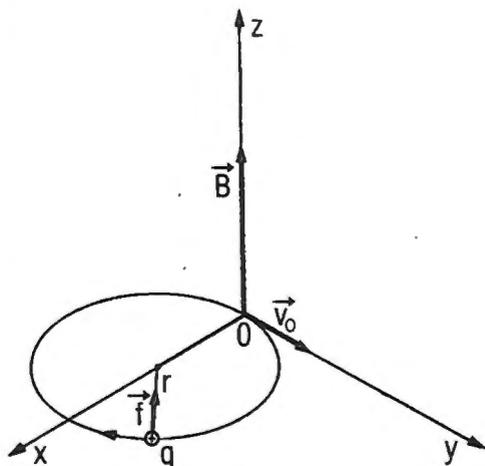
Tal como se indicó en la sección anterior, la fuerza que actúa sobre una carga en movimiento viene dada por la expresión

$$\vec{f} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}) \quad (17.1)$$

Si en la región del espacio considerada sólo existe campo magnético ( $\vec{E} = 0$ ), entonces la ecuación se transforma en

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} \quad (17.2)$$

Observese que la fuerza dada por la (17.2) es perpendicular a la velocidad de la carga ( $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ ), de modo que la fuerza magnética no efectúa trabajo sobre la misma. Por tanto, la energía cinética



*Fig. 17.2*

de una partícula cargada que se mueve bajo la única acción de una fuerza magnética permanece constante: el efecto del campo magnético es el de cambiar la dirección de  $\vec{v}$ , pero no su módulo.

Estudiemos el movimiento de una partícula cargada en el interior de un campo magnético uniforme. Para ello adoptemos un sistema de referencia como el de la figura 17.2, de forma que le eje  $OZ$  tenga la dirección y sentido del campo  $\vec{B}$ . Supondremos que la partícula se encuentra inicialmente en  $O$  y, para simplificar el problema, consideraremos, por ahora, que la velocidad inicial es  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{j}$ , esto es perpendicular a  $\vec{B}$ .

Evidentemente, el movimiento de la partícula es plano, ya que fuerza  $\vec{f}$ , que actúa sobre ella, es paralela al plano  $z = 0$  (perpendicular a  $\vec{B}$ ) y, puesto que la partícula se encuentra inicialmente en dicho plano y la velocidad  $\vec{v}_0$  también está contenida en el mismo, la partícula describirá una trayectoria sobre el plano  $z = 0$ .

Por tanto, el módulo de la fuerza ejercida sobre  $q$  es

$$f = q v B \sin 90^\circ = q v B$$

La aceleración de la partícula es  $\vec{a} = \vec{f} / m$ , y su módulo

$$a = \frac{q v B}{m} = a_N$$

valor que corresponde a la aceleración normal, ya que la aceleración tangencial es nula al ser  $\vec{f} \cdot \vec{v} = 0$ . Teniendo en cuenta que  $a_N = v^2 / \rho$ , el radio de curvatura es

$$\rho = \frac{mv}{qB} = \frac{mv_0}{qB} = R \quad (17.3)$$

ya que  $v = |\vec{v}| = v_0 = cte$ , por las razones antes expuestas.

En definitiva, la partícula describe un movimiento circular uniforme cuyo radio viene dado por la ecuación (17.3).

En la figura 17.2 se muestra la órbita correspondiente a una carga positiva. Una carga negativa describiría una trayectoria similar pero simétrica con respecto al plano  $x = 0$ .

La velocidad angular de este movimiento circular es

$$w = v / R = q B / m \quad (17.4)$$

o, en forma vectorial

$$\vec{w} = \frac{-q}{m} \vec{B} \quad (17.5)$$

Obsérvese que la velocidad angular es independiente de la velocidad inicial de la partícula y sólo depende de sus características (carga y masa) y del valor de  $\vec{B}$ . Así, partículas idénticas lanzadas con distintas velocidades en el mismo campo magnético, describirán movimientos circulares de radios distintos (el radio sí depende de  $v_0$ ) pero con la misma velocidad angular y, por tanto, con el mismo período.

Si la velocidad inicial de la partícula no es normal al campo  $\vec{B}$  (Fig. 17.3), podemos descomponerla en dos, una en la dirección del campo  $\vec{v}_{0B}$  y otra según la normal  $\vec{v}_{0N}$ . Puesto que  $\vec{f}$  siempre es perpendicular a  $\vec{B}$ , la aceleración en la dirección del campo es nula, y la proyección del movimiento sobre la dirección OZ es un movimiento rectilíneo uniforme de velocidad  $\vec{v}_{0B}$ . La proyección del movimiento sobre un plano normal  $\vec{B}$  es un movimiento circular de radio

$$R = \frac{m v_{0N}}{q B}$$

y velocidad angular

$$w = q B / m$$

La composición de ambos movimientos da como trayectoria una hélice cilíndrica cuyo eje es paralelo a  $\vec{B}$  y cuyo paso  $P$ , es

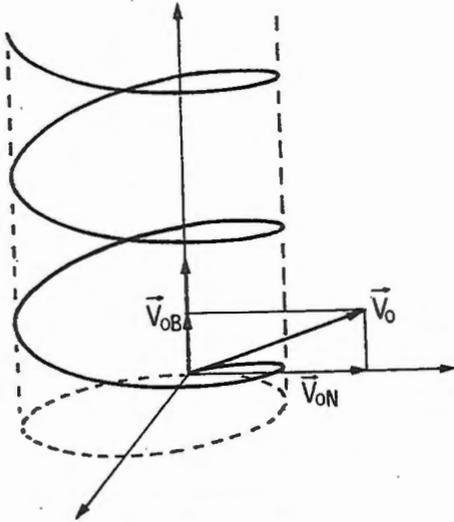


Fig. 17.3

partícula se encuentra en O y su velocidad inicial es  $\vec{v}_0 = v_{0N} \vec{j} + v_{0B} \vec{k}$ . Obtener las ecuaciones del movimiento.

**Solución:**

La fuerza que actúa sobre la partícula es

$$\vec{f} = q\vec{v} \times \vec{B} = q \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dot{x} & \dot{y} & \dot{z} \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix} = q(\dot{y}B\vec{i} - \dot{x}B\vec{j})$$

Por tanto, las ecuaciones diferenciales del movimiento son

$$\vec{f} = m\vec{a} \rightarrow q(\dot{y}B\vec{i} - \dot{x}B\vec{j}) = m(\ddot{x}\vec{i} + \ddot{y}\vec{j} + \ddot{z}\vec{k})$$

o bien

- a)  $q\dot{y}B = m\ddot{x}$
- b)  $-q\dot{x}B = m\ddot{y}$
- c)  $0 = m\ddot{z}$

$$P = v_{0B} \frac{2\pi}{w} = \frac{2\pi v_{0B} m}{qB}$$

Este caso general de movimiento de una partícula cargada en un campo uniforme  $\vec{B}$  se analiza con más detalle en el ejemplo 17.1.

**Ejemplo 17.1**

Una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  se mueve en el interior de un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\vec{k}$ . En el instante  $t = 0$ , la

de la ecuación c) se deduce directamente que

$$z = v_{oB} t \quad (1)$$

La ecuación a) puede escribirse como

$$q \frac{dy}{dt} B = m \frac{d\dot{x}}{dt}$$

luego

$$d\dot{x} = \frac{qB}{m} dy$$

que integrada da

$$\dot{x} = \frac{qB}{m} y + C$$

donde  $C$  es una constante de integración de valor nulo ya que en  $t = 0$ ,  $\dot{x} = 0$  e  $y = 0$ .

Sustituyendo  $\dot{x}$  en b), resulta

$$\frac{-(qB)^2}{m} y = m \ddot{y}$$

o bien

$$\ddot{y} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 y = 0$$

ecuación que tiene como integral

$$y = A_2 \text{sen}(w t + \varphi_2) \quad (2)$$

donde  $w = q B/m$

Siguiendo un razonamiento similar para el caso de la ecuación b), podría obtenerse la reacción  $\dot{y}(x)$  :

$$\dot{y} = -\frac{qB}{m}x + v_{oN}$$

ecuación que sustituida en la a) da lugar a

$$\ddot{x} + \left(\frac{qB}{m}\right)^2 x - \frac{qB}{m}v_{oN} = 0$$

Cuya integración resulta

$$x = \frac{m v_{oN}}{q B} + A_1 \operatorname{sen}(w t + \varphi_1) \quad (3)$$

donde  $w = q B/m$

Las constantes de integración  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  de las ecuaciones (2) y (3) se calculan teniendo en cuenta las condiciones iniciales del movimiento. Dichas constantes toman los valores

$$\varphi_1 = \frac{\pi}{2}; \quad \varphi_2 = 0; \quad A_1 = -\frac{m v_{oN}}{q B}; \quad A_2 = \frac{v_{oN}}{w} = \frac{m v_{oN}}{q B}$$

En definitiva, las ecuaciones del movimiento son

$$x = \frac{m v_{oN}}{q B} (1 - \cos wt)$$

$$y = \frac{m v_{oN}}{q B} \operatorname{sen} wt$$

$$z = v_{oB} t$$

La trayectoria es, pues, una hélice cilíndrica cuyo eje es una recta vertical que pasa por el punto

$$\left( \frac{m v_{oN}}{q B}, 0, 0 \right)$$

El radio de la proyección de la hélice sobre el plano  $z = 0$  es

$$R = \frac{m v_{oN}}{q B}$$

### 17.4. Fuerzas magnéticas sobre conductores que transportan corrientes

Supongamos un conductor que transporta una corriente eléctrica  $i$ , situado en reposo en el interior de un campo magnético  $\vec{B}(x, y, z)$ . Evidentemente el campo  $\vec{B}$  ejerce una fuerza sobre los portadores de carga del conductor, de forma que éste está sometido a una fuerza  $\vec{f}$  que se pretende calcular.

Para ello, considerando un elemento de volumen  $d\tau$  alrededor de un punto cualquiera  $P$  del conductor (Fig. 17.4) y siendo  $\vec{J}$  y  $\vec{v}$  la densidad de corriente y velocidad de arrastre, respectivamente, en  $P$ , la carga móvil contenida en  $d\tau$  es

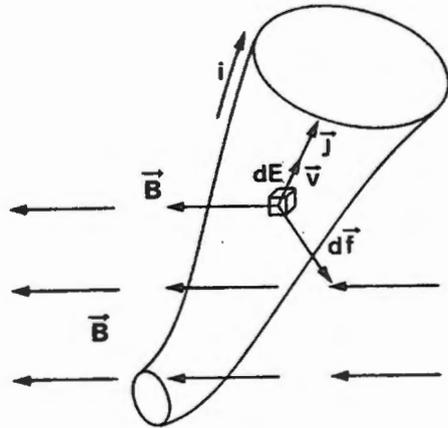


Fig. 17.4

$$dq = qn d\tau$$

donde  $n$  representa la densidad de portadores de carga. Por tanto, la fuerza magnética ejercida sobre  $d\tau$  es

$$d\vec{f} = qn \vec{v} \times \vec{B} d\tau \tag{17.6}$$

Y, teniendo en cuenta la relación (15.6), existente entre  $\vec{v}$  y  $\vec{J}$ , resulta

$$d\vec{f} = \vec{J} \times \vec{B} d\tau \tag{17.7}$$

La resultante de las fuerzas que actúan sobre el conductor, es por tanto

$$\vec{f} = \iiint_{\tau} \vec{J} \times \vec{B} d\tau$$

donde  $\tau$  es el volumen ocupado por el conductor. Esta expresión constituye la denominada ley de Laplace.

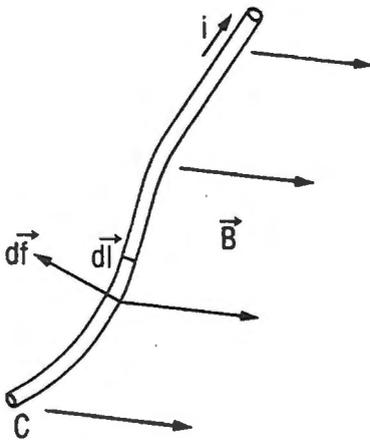


Fig. 17.5

Si se particulariza la expresión (17.7) al caso de un conductor filiforme recorrido por una corriente  $i$  figura 17.5 el vector  $\vec{J} d\tau$  puede expresarse como

$$\vec{J} d\tau = \frac{i}{S} d\vec{l} S = i d\vec{l}$$

donde  $d\vec{l}$  es un elemento de longitud del conductor, con el mismo sentido de la corriente eléctrica, con lo cual la ley de Laplace se expresa como

$$d\vec{f} = i d\vec{l} \times \vec{B} \tag{17.8}$$

y la resultante de las fuerzas que actúan sobre el conductor es, en este caso,

$$\vec{f} = i \int_C d\vec{l} \times \vec{B} \tag{17.9}$$

donde  $C$  es la curva que representa al conductor.

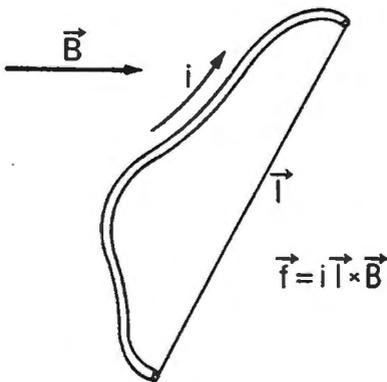


Fig. 17.6

Si este conductor filiforme se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme, la expresión (17.9) se puede simplificar como

$$\vec{f} = i \left( \int_C d\vec{l} \right) \times \vec{B} = i \vec{l} \times \vec{B} \quad (17.10)$$

donde  $\vec{l}$  es un vector que tiene su origen en el inicio del conductor y su afijo en el otro extremo (Fig. 17.6). Evidentemente, la resultante de las fuerzas que un campo  $\vec{B}$ , uniforme ejerce sobre un circuito cerrado es nula ( $\vec{l} = \vec{0}$ ).

### 17.5. Acción de un campo magnético sobre un circuito plano. Momento magnético

Sea un circuito plano, recorrido por una intensidad  $i$ , que está situado en el interior de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ . Para mayor sencillez, supondremos que dicho circuito es una espira rectangular, de lados  $a$  y  $b$  (Fig. 17.7).

Las fuerzas que el campo ejerce sobre cada uno de los lados son, a partir de (17.10)

$$\begin{aligned} \vec{f}_1 &= -i \vec{a} \times \vec{B} \\ \vec{f}_2 &= -i \vec{b} \times \vec{B} \\ \vec{f}_3 &= i \vec{a} \times \vec{B} \\ \vec{f}_4 &= i \vec{b} \times \vec{B} \end{aligned}$$

cuya resultante es nula, al tratarse de un circuito cerrado.

No obstante el momento resultante de dicho sistema de fuerzas no es nulo. En efecto, tomando momentos respecto del punto  $O$ , es

$$\vec{M}_1 = -i \frac{\vec{b}}{2} \times (\vec{a} \times \vec{B})$$

$$\vec{M}_2 = i \frac{\vec{a}}{2} \times (\vec{b} \times \vec{B})$$

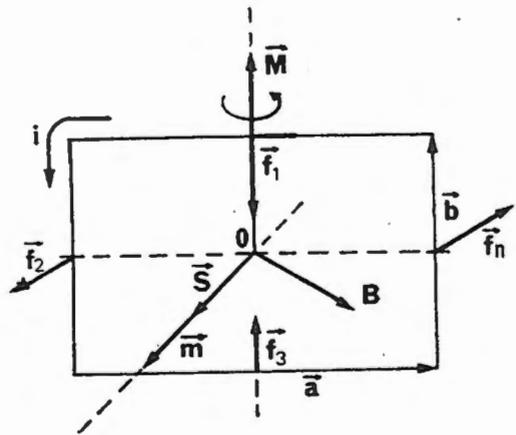


Fig. 17.7

$$\vec{M}_3 = -i \frac{\vec{b}}{2} \times (\vec{a} \times \vec{B})$$

$$\vec{M}_4 = i \frac{\vec{a}}{2} \times (\vec{b} \times \vec{B})$$

y en consecuencia el momento resultante viene dado por

$$\vec{M} = \sum_{i=1}^4 \vec{M}_i = i \left[ \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{B}) - \vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{B}) \right]$$

Ahora bien, teniendo en cuenta que los dobles productos vectoriales de esta expresión son

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{B}) = (\vec{a} \cdot \vec{B}) \vec{b}$$

$$\vec{b} \times (\vec{a} \times \vec{B}) = (\vec{b} \cdot \vec{B}) \vec{a}$$

resulta que

$$\vec{M} = i \left[ (\vec{a} \cdot \vec{B}) \vec{b} - (\vec{b} \cdot \vec{B}) \vec{a} \right] = i \vec{B} \times (\vec{b} \times \vec{a}) = i (\vec{a} \times \vec{b}) \times \vec{B} \quad (17.11)$$

o bien recordando que  $(\vec{a} \times \vec{b})$  representa la superficie delimitada por la espira

$$\vec{M} = i \vec{S} \times \vec{B} \quad (17.12)$$

y, denominando momento magnético del circuito  $\vec{m}$ , a

$$\vec{m} = i \vec{S}$$

se obtiene la expresión definitiva,

$$\vec{M} = \vec{m} \times \vec{B} \quad (17.13)$$

La ecuación de dimensiones del momento magnético es  $[\vec{m}] = IL^2$  y su unidad en el S.I. es el  $A \cdot m^2$ .

Si bien en la deducción seguida para la obtención de la expresión (17.13) se ha utilizado una espira rectangular, dicha expresión es de validez general, independientemente de la forma del circuito.

Así, para una espira circular, el momento magnético es (Fig. 17.8)

$$\vec{m} = i\vec{S} = i\pi r^2 \vec{u}_n$$

donde  $\vec{u}_n$  es un versor normal al plano de la espira cuyo sentido viene dado por la regla de la mano derecha (Fig. 17.8).

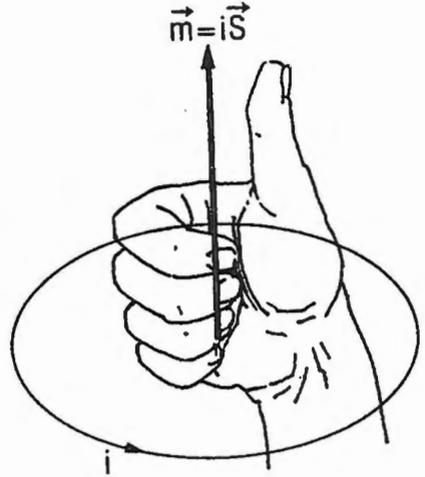


Fig. 17.8

Si el circuito está compuesto por  $N$  espiras superpuestas, el momento magnético es

$$\vec{m} = ni\vec{S} \tag{17.14}$$

Obsérvese que el momento que  $\vec{B}$  ejerce sobre el circuito cerrado es nulo si  $\vec{m}$  y  $\vec{B}$  son paralelos. Por tanto existen dos posiciones de equilibrio; cuando  $\vec{m}$  y  $\vec{B}$  formen un ángulo de  $0$  ó  $\pi$  radianes.

La primera posición es de equilibrio estable (Fig. 17.1.a), mientras que la segunda es de equilibrio inestable (Fig. 17.9.b).

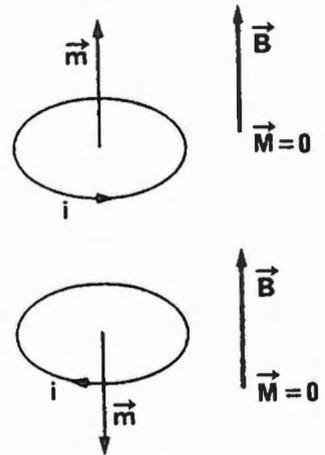
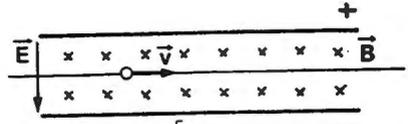


Fig. 17.9



## PROBLEMAS

- P.17.1 Un haz de electrones se lanza entre las armaduras de un condensador cargado a potencial  $V$ . Entre las armaduras existe un campo magnético uniforme, perpendicular al campo eléctrico. Sabiendo que las armaduras están separadas una distancia  $d$ , calcular la velocidad de los electrones que no se desvían al pasar por el condensador.



P. 17.1

### SOLUCIÓN

$$v = V / B d$$

- P.17.2. Una partícula de carga  $q$  y masa  $m$  se deja en reposo en el punto  $(0,0,0)$ . Dicha partícula está sometida a la acción del campo eléctrico  $\vec{E} = E \vec{j}$  y del campo magnético  $\vec{B} = B \vec{k}$ .

Obtener las ecuaciones del movimiento.

### SOLUCIÓN

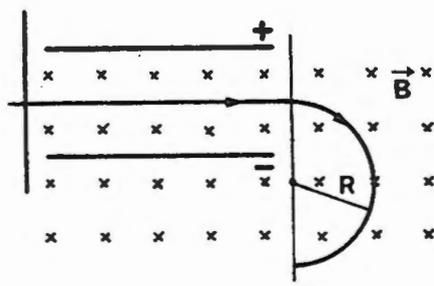
$$x = \frac{E}{B} \left[ t - \frac{1}{\omega} \text{sen } \omega t \right]$$

$$y = \frac{E}{B\omega} [1 - \cos \omega t]$$

con

$$w = \frac{qB}{m}$$

$$z = 0$$



P. 17.3

P.17.3. Una haz de partículas cargadas pasan sin desviarse entre las armaduras de un condensador plano cargado a potencial  $V$  en el que, además existe un campo magnético perpendicular al campo eléctrico. Una vez que salen del condensador, las partículas describen una órbita circular de radio  $R$ .

a) Calcular la velocidad de las partículas.

b) Calcular la relación  $|q|/m$ .

**SOLUCIÓN**

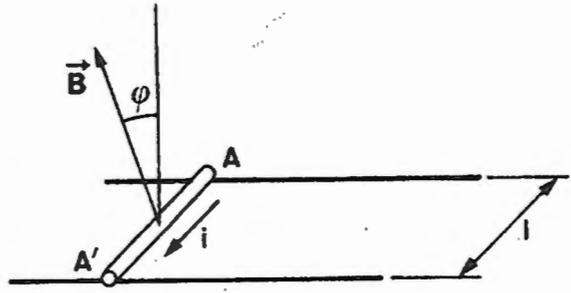
a) 
$$v = \frac{V}{qB}$$

b) 
$$\frac{|q|}{m} = \frac{V}{dRB^2}$$

P.17.4 Una barra metálica  $AA'$  descansa sobre dos raíles paralelos y horizontales, como se muestra en la figura.

Por la barra circula una corriente continua de intensidad  $i$ .

Sabiendo que el peso de la barra es  $P$  y que entre la barra y los raíles existe un rozamiento seco, de coeficiente  $\mu$ , calcular el mínimo campo magnético capaz de mover la barra, indicando el ángulo que debe formar con la vertical.



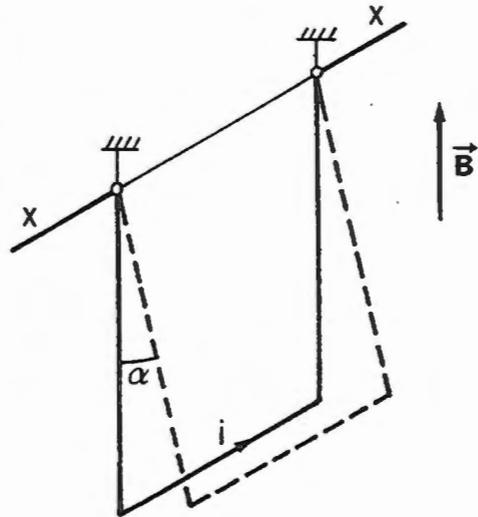
P. 17.4

la vertical.

**SOLUCIÓN**

$$B = \frac{P \operatorname{sen} \varphi}{i l} \quad \text{con} \quad \operatorname{tg} \varphi = \mu$$

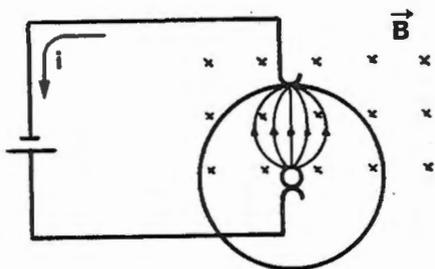
P.17.5. Un hilo metálico, de sección  $S$  y densidad  $\rho$ , forma tres lados de un cuadrado de lado  $l$ , puede girar alrededor del eje horizontal  $XX'$ , tal como se muestra en la figura. El hilo está colocado en un campo magnético uniforme y vertical. Calcular el valor de dicho campo sabiendo que el hilo se aparta de la vertical un ángulo  $\alpha$  cuando la corriente que pasa por el hilo es  $i$ .



P. 17.5

**SOLUCIÓN**

$$B = \frac{2 \rho g S}{i} \operatorname{tg} \alpha$$



P. 17.6

P.17.6. Un disco metálico de radio  $R$  puede girar al rededor de su eje  $O$ . El disco se encuentra en el interior de un campo magnético uniforme  $\vec{B}$ , perpendicular al mismo. Entre el centro del disco y su periferia se establece una diferencia de potencial, circulando una corriente  $i$ , como se muestra en la figura. Calcular el momento resultante, con respecto a  $O$ , de las fuerzas magnéticas que actúan sobre el disco.

**SOLUCIÓN**

$$\vec{M} = -\frac{R^2 i}{2} \vec{B}$$

P.17.7. Una espira circular de radio  $R$  se encuentra sobre el plano  $z = 0$ , de forma que su centro coincide con el origen de coordenadas. En esa región del espacio existe un campo magnético  $\vec{B} = C \vec{K}$ , donde  $C$  es una constante. Sabiendo que por la espira circula una intensidad  $I$ , calcular la resultante de las fuerzas magnéticas que se ejercen sobre la misma.

**SOLUCIÓN**

$$\vec{f} = CR^2 \pi I \vec{j}$$

# CAPÍTULO 18

## CAMPOS MAGNÉTICOS INDEPENDIENTES DEL TIEMPO

### *18.1. Introducción*

En el capítulo precedente se estableció la expresión que determina la fuerza que actúa sobre una carga en movimiento:

$$\vec{f} = q[\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B}]$$

que es de validez general cualquiera que sea el tipo de movimiento del sistema de cargas considerado.

Ahora bien, para que el problema de la acción entre cargas en movimiento quede completamente resuelto, es preciso determinar los campos eléctrico y magnético creados por dicho conjunto de cargas.

La solución general de este problema se sale de los objetivos del presente texto, por lo que nos limitaremos al estudio de un problema particular, pero de gran importancia por sus aplicaciones; se trata del campo magnético creado por un circuito en reposo, situado en el vacío (o en el aire) y recorrido por una corriente continua.

En estas condiciones,  $\vec{B}$  es independiente del tiempo. Por tanto, y salvo que se indique lo contrario, las expresiones y teoremas que se desarrollaran en este capítulo son aplicables, únicamente, a los campos magnéticos estacionarios. Posteriormente se ampliarán algunos de los resultados aquí obtenidos al caso de campos magnéticos asociados a regímenes variables.

### 18.2. Campo magnético producido por una corriente continua

Sea un circuito de forma cualquiera, cerrado y recorrido por una corriente continua  $i$ . Experimentalmente, se comprueba que el campo magnético  $\vec{B}$  creado por dicha corriente en un punto cualquiera  $P$  viene dado por la expresión.

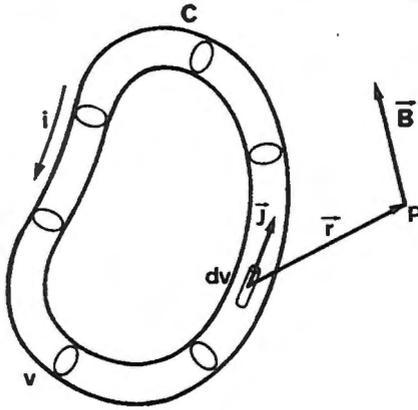


Fig. 18.1

$$\vec{B} = k \iiint_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (18.1)$$

donde  $V$  es el volumen ocupado por el circuito.  $\vec{J}$  es la densidad de corriente y  $\vec{r}$  es el vector de posición del punto con respecto al elemento de volumen considerado (Fig. 18.1).  $K$  es una constante cuyo valor depende del sistema de unidades utilizado. En el S.I.,  $K$  vale  $10^{-7} \text{ mkg s}^{-2} \text{ A}^{-2}$ , por razones de comodidad en los calculos, se conviene dar a  $K$  el valor

$$K = \frac{\mu_0}{4\pi} \quad (18.2)$$

donde  $\mu_0$  es una nueva constante, denominada permeabilidad magnética del vacío, cuyo valor es  $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ NA}^{-2}$ . Sustituyendo (18.2) en (18.1) resulta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \iiint_V \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (18.3)$$

expresión que recibe el nombre de ley de Ampere-Laplace.

Obsérvese que el campo  $\vec{B}$  dado por (18.3) es el mismo que el que se obtendría suponiendo que cada elemento de corriente  $\vec{J} dV$  crea en  $P$  un campo elemental

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{\vec{J} \times \vec{r}}{r^3} dV \quad (18.4)$$

El concepto de campo diferencial creado por un elemento de corriente es útil como instrumento de cálculo. Sin embargo no hay que olvidar las hipótesis de partida bajo las cuales se verifica la ley de Ampere-Laplace: el campo  $\vec{B}$  es creado por **todo** el circuito y no tiene sentido intentar calcular el campo que crearía una porción aislada del mismo ya que los elementos de corriente no son entidades físicas separables del conjunto.

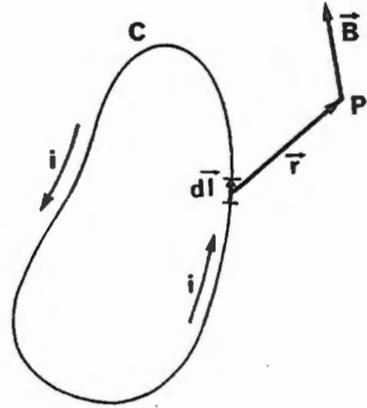


Fig. 18.2

Las expresiones (18.3) y (18.4) son aplicables a un circuito cerrado de una geometría cualquiera. No obstante, en la práctica, los problemas que se presentan se refieren a circuitos filiformes (Fig. 18.2).

En este caso, el elemento de corriente  $\vec{J} dV$  puede expresarse como

$$\vec{J} dV = i d\vec{l} \tag{18.5}$$

donde  $i$  es la intensidad de corriente que circula por el circuito. Con ello, (18.4) se transforma en

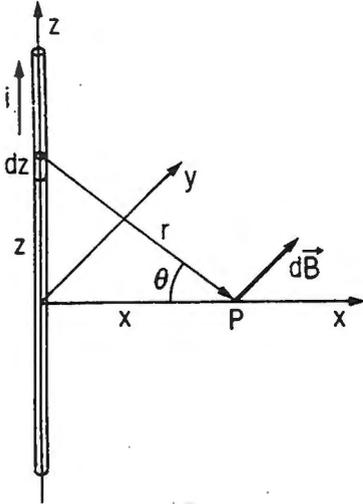
$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{18.6}$$

y (18.3) en

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int_C \frac{d\vec{l} \times \vec{r}}{r^3} \tag{18.7}$$

Ecuación que constituye la expresión de la ley de Ampere-Laplace para circuitos filiformes.

**Ejemplo 18.1. Campo creado por un hilo rectilíneo, de longitud infinita y recorrido por una corriente  $i$**



**Fig. 18.3**

Para su resolución se toma un sistema de referencia como el de la figura 18.3 de forma que el eje OZ coincide con el hilo y que el punto P se encuentra sobre el eje OX. El campo creado por un elemento de corriente viene dado por (18.6), donde

$$d\vec{l} = dz \vec{k}$$

$$\vec{r} = x \vec{i} - z \vec{k}$$

Por tanto,

$$d\vec{l} \times \vec{r} = x dz \vec{j}$$

y

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{x dz}{r^3} \vec{j}$$

Expresando todas las variables de la ecuación anterior en función del ángulo  $\theta$  y de la distancia  $x$  del punto P al hilo, resulta

$$z = x \operatorname{tg} \theta \rightarrow dz = \frac{x}{\cos^2 \theta} d\theta$$

$$r = \frac{x}{\cos \theta}$$

Con lo que se obtiene

$$d\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{1}{x} \cos \theta d\theta \vec{j}$$

que integrada entre  $-\pi/2$  y  $+\pi/2$ , que son los valores de  $\theta$  correspondientes a  $z = \pm\infty$ , resulta

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2\pi x} \vec{j} \quad (18.8)$$

Es decir, el campo magnético creado por una corriente rectilínea e indefinida está en el plano normal al hilo que pasa por el punto P. Las líneas del campo son circunferencias cuyo centro está sobre el hilo. La expresión (18.8) recibe el nombre de ley de Biot y Savart.

### Ejemplo 18.2. Campo creado por una espira circular en un punto de su eje

Sea una espira circular de radio R, recorrida por una corriente i.

El campo creado por un elemento de corriente en un punto, P, de su eje viene dado por (18.6), y como en este caso  $d\vec{l}$  y  $\vec{r}$  son perpendiculares, el módulo de  $d\vec{B}$  es

$$dB = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{dl}{r^2}$$

y su dirección es normal al plano determinado por  $\vec{r}$  y  $d\vec{l}$ . La componente de  $d\vec{B}$  sobre la normal al eje se anula con la componente, también sobre la normal al eje, del vector  $d\vec{B}'$  creado por un elemento de corriente  $d\vec{l}'$  simétrico del  $d\vec{l}$ . Por tanto, el campo en P tiene la dirección del eje y su valor es

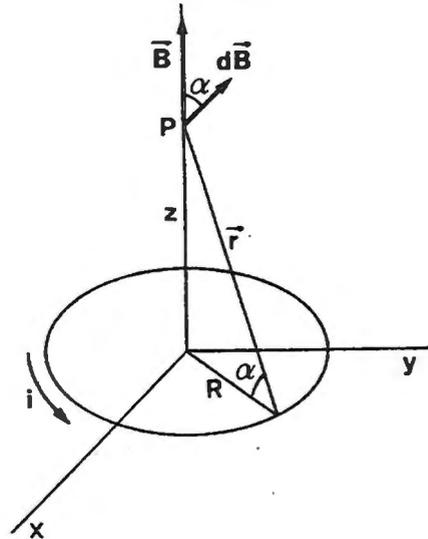


Fig. 18.4

$$B = \int dB_2 = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{\cos \alpha dl}{r^2}$$

y, teniendo en cuenta que  $\cos \alpha = R / r$ , resulta

$$B = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \int \frac{R dl}{r^3} = \frac{\mu_0 i}{4\pi} \frac{R}{r^3} 2\pi R = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{r^3}$$

expresión que puede escribirse en función de la distancia  $z$  del punto  $P$  al centro de la espira, ya que  $r^2 = R^2 + z^2$

$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} \tag{18.9}$$

Finalmente recordando que el momento magnético de la espira vale  $m = i\pi R^2$  y que su dirección y sentido son los de  $\vec{B}$ , éste se puede expresar como

$$\vec{B} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{\vec{m}}{(R^2 + z^2)^{3/2}}$$

### Ejemplo 18.3. Campo magnético creado por un solenoide

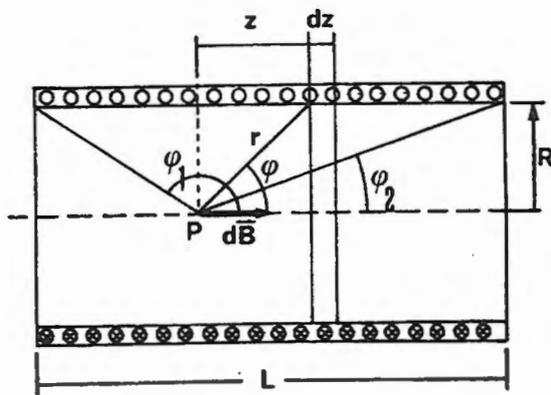


Fig. 18.5

Un solenoide es un hilo conductor enrollado helicoidalmente. Si el paso de dicha hélice es muy pequeño (las vueltas del conductor están muy próximas), el solenoide puede representarse como un conjunto de espiras circulares distribuidas uniformemente en planos perpendiculares a un eje longitudinal.

Sea un solenoide recto, de longitud  $L$  y radio  $R$ , y  $N$  espiras, con lo que el número de espiras por unidad de longitud es  $n = N/L$  y el contenido en

una rebanada de espesor  $dz$ ,  $n dz$ . Tal como se ha visto en el Ejemplo 18.2, el

campo magnético en un punto P del eje del solenoide lleva la dirección de dicho eje. A partir de la expresión (18.9), el campo creado por una rebanada de espesor  $dz$  en P es

$$dB = \frac{\mu_0}{2} ni \frac{R^2}{(R^2 + z^2)^{3/2}} dz$$

y, teniendo en cuenta que  $z = R \cot \varphi$  y que

$$(R^2 + z^2)^{3/2} = r^3 = \frac{R^3}{\text{sen}^3 \varphi}$$

resulta

$$dB = -\frac{\mu_0 ni}{2} \text{sen } \varphi \, d\varphi$$

El campo creado por todo el solenoide es, por tanto

$$B = \int dB = -\frac{\mu_0 ni}{2} \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} \text{sen } \varphi \, d\varphi = \frac{\mu_0 ni}{2} (\cos \varphi_2 - \cos \varphi_1) \quad (18.10)$$

Si el solenoide es muy largo y P se encuentra en su interior, entonces  $\varphi_2 = 0$  y  $\varphi_1 = \pi$  radianes, con lo cual el campo B vale

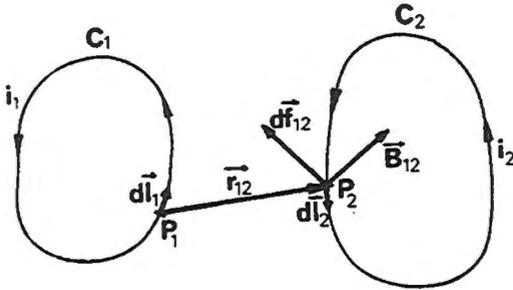
$$B = \mu_0 ni$$

Si el solenoide es largo y P se encuentra en uno de los extremos, entonces  $\varphi_1 = \pi/2$  y  $\varphi_2 = 0$ , luego

$$B = \frac{\mu_0 ni}{2}$$

es decir, en un solenoide largo, el campo magnético vale la mitad en uno de sus extremos que en un punto del interior.

### 18.3. Acciones mutuas entre dos corrientes. Definición de Amperio



Fig, 18.6

Sean dos circuitos cerrados,  $C_1$  y  $C_2$ , ambos en reposo y recorridos por corrientes continuas  $i_1$  e  $i_2$ , respectivamente.

El circuito  $C_1$  crea, en un punto cualquiera del circuito  $C_2$ ,  $P_2$ , un campo  $\vec{B}_{12}$  de valor

$$\vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 i_1}{4\pi} \int_{C_1} \frac{d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

donde  $\vec{r}_{12}$  es el vector de posición de  $P_2$  con respecto a un punto cualquiera de  $P_1$  de  $C_1$ .

Por tanto, el elemento de corriente  $i_2 d\vec{l}_2$  situado en  $P_2$  esta sometido a la fuerza

$$d\vec{f}_{12} = i_2 d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12}$$

En definitiva, la resultante de las fuerzas magnéticas ejercidas por el circuito  $C_1$  sobre  $C_2$  es

$$\vec{f}_{12} = i_2 \int_{C_2} d\vec{l}_2 \times \vec{B}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} \quad (18.11)$$

Expresión que permite calcular la interacción magnética entre dos circuitos.

La expresión (18.11) puede escribirse como (Ver nota complementaria 18.1)

$$\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^2} \quad (18.12)$$

de donde se deduce que  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ . Es decir la fuerza ejercida por el circuito 2 sobre la 1 es igual y opuesta a la que ejerce el 1 sobre el 2, verificándose, por tanto, la ley de acción y reacción.

Un caso particular de fuerza entre circuitos, de gran importancia por servir de base a la definición de amperio, es aquel en el que los circuitos  $C_1$  y  $C_2$  son dos hilos rectilíneos de longitud infinita, paralelos y separados una distancia  $d$ .

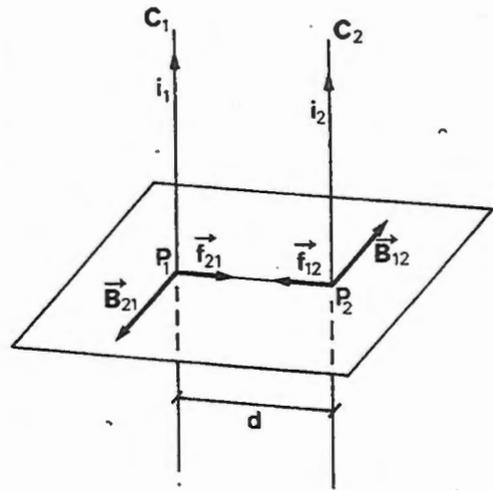


Fig. 18.7

El circuito  $C_1$  crea en un punto  $P_2$  de  $C_2$  un campo  $\vec{B}_{12}$ , cuya dirección y sentido se indica en la figura 18.7 y cuyo módulo viene dado por la expresión (18.8)

$$B_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1}{d}$$

Como consecuencia de este campo, la fuerza que, por unidad de longitud, actúa sobre el conductor  $C_2$  es

$$f_{12} = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{i_1 i_2}{d} \quad (18.13)$$

dicha fuerza lleva la dirección de la común perpendicular a los conductores y es atractiva (tal como se muestra en la figura).

Si la distancia  $d$  es de 1 m y las intensidades que circulan por los conductores son iguales y de 1 A. Entonces la fuerza que cada conductor ejerce sobre la unidad de longitud del otro es

$$f = 2 \cdot 10^{-7} \text{ N}$$

La relación (18.3) sirve para la definición del amperio como “intensidad de corriente que, circulando por dos conductores rectilíneos paralelos de longitud infinita y sección despreciable, situados con una separación de 1 m en el vacío, produce entre ellos una fuerza de  $2 \cdot 10^{-7}$  N por cada metro de longitud”.

**Nota complementaria de 18.1. Simetría de las acciones entre corrientes.**

Tal como se ha indicado en la sección anterior, la fuerza que un circuito  $C_1$ , recorrido por una corriente  $i_1$  ejerce sobre otro circuito  $C_2$ , por el que circula una corriente  $i_2$  es

$$f_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} d\vec{l}_2 \times \frac{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3}$$

La fuerza ejercida por el circuito 2 sobre el 1 sería

$$f_{21} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_1 \times (d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{21})}{r_{21}^3}$$

A partir de estas ecuaciones no resulta evidente que  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ , como debe cumplirse en virtud del principio de acción y reacción. Para demostrar que efectivamente dichas fuerzas son iguales y opuestas desarrollaremos el doble producto vectorial

$$d\vec{l}_2 \times (d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{21}) = (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12}$$

Por tanto

$$\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} d\vec{l}_1 - \frac{\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \frac{\vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

Ahora bien, el primer término del segundo miembro de esta ecuación es nulo ya que

$$\int_{C_1} \int_{C_2} \frac{(\vec{d}\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} d\vec{l}_1 = \int_{C_1} d\vec{l}_1 \int_{C_2} \frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3}$$

pero

$$\frac{d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}}{r_{12}^3} = \frac{dr_{12}}{r_{12}^2}$$

cuya integral a lo largo de una curva cerrada es, evidentemente, nula.

Por tanto,  $\vec{f}_{12}$  puede expresarse como

$$\vec{f}_{12} = \frac{-\mu_0 i_1 i_2}{4\pi} \int_{C_1} \int_{C_2} \frac{\vec{r}_{12} (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2)}{r_{12}^3}$$

expresión que resulta claramente simétrica ya que con ella queda patente que  $\vec{f}_{12} = -\vec{f}_{21}$ .

Hay que señalar que la ley de acción y reacción se cumple para las acciones entre circuitos completos, pero no para elementos de corriente. Así la fuerza que el elemento de corriente  $i_1 d\vec{l}_1$  ejercería sobre el elemento  $i_2 d\vec{l}_2$  es

$$d\vec{f}_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 d\vec{l}_2 \times \frac{(d\vec{l}_1 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = \frac{\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \left[ (d\vec{l}_2 \cdot \vec{r}_{12}) d\vec{l}_1 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12} \right]$$

mientras que la que el elemento 2 ejerce sobre el 1 es

$$\vec{f}_{21} = \frac{-\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 d\vec{l}_1 \times \frac{(d\vec{l}_2 \times \vec{r}_{12})}{r_{12}^3} = \frac{-\mu_0}{4\pi} i_1 i_2 \left[ (d\vec{l}_1 \cdot \vec{r}_{12}) d\vec{l}_2 - (d\vec{l}_1 \cdot d\vec{l}_2) \vec{r}_{12} \right]$$

Evidentemente  $d\vec{f}_{12} \neq -d\vec{f}_{21}$  ya que  $d\vec{l}_1$  y  $d\vec{l}_2$  no tienen por qué llevar la misma dirección. Queda, pues, claro que los elementos de corriente no son realidades físicas sino meros instrumentos de cálculo.

### 18.4. Flujo magnético. Divergencia de $\vec{B}$

El flujo del campo  $\vec{B}$  a través de una superficie cualquiera S es

$$\phi = \int_S \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

y se denomina flujo magnético.

Su ecuación de dimensiones es  $[\phi] = \text{MT}^{-2} \text{L}^2 \text{I}^{-1}$ . Su unidad en el S.I. es el Weber (Wb), dado por

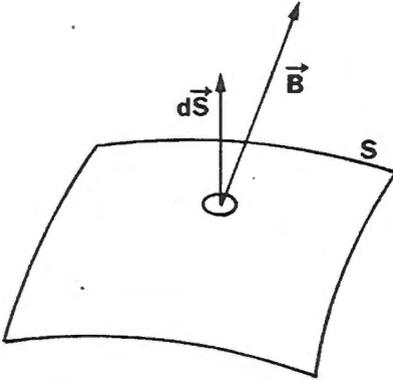


Fig. 18.8

$$1 \text{ Wb} = 1 \text{ T} \cdot \text{m}^2$$

Una propiedad muy importante del campo magnético es que su flujo a través de cualquier superficie cerrada es nulo

$$\int_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (18.14)$$

es decir, el campo magnético es un flujo conservativo.

De acuerdo con el teorema de la divergencia, la ecuación (18.4) puede escribirse en forma diferencial como

$$\text{div } \vec{B} = 0 \quad (18.15)$$

ecuación que constituye una de las leyes fundamentales del electromagnetismo.

Una forma de analizar el significado físico de la (18.15) es comparándola con su correspondiente del campo eléctrico que es

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

es decir, en un campo eléctrico existen sumideros o manantiales en aquellos puntos en los que hay carga eléctrica (negativa o positiva, respectivamente). Las líneas del campo eléctrico unen cargas positivas con negativas, de modo que el campo sale de las primeras y entra en las últimas.

Por el contrario, la ecuación (18.15) pone de manifiesto la imposibilidad de que exista algo parecido a una carga magnética (polos magnéticos aislados). Al ser nula la divergencia  $\vec{B}$ , no hay fuentes de campo magnético y sus líneas de campo son curvas cerradas.

La ecuación (18.15) puede comprobarse a partir de la ley de Ampère-Laplace. No obstante, dicha comprobación se sale de los objetivos de este texto, por lo que será omitida.

### *18.5. Rotación de $\vec{B}$ . Teorema de Ampère*

Si  $\vec{B}$  es un campo magnético estacionario producido por un campo de densidades de corriente  $\vec{J}$ , entre ambas magnitudes se cumple que

$$\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J} \quad (18.16)$$

es decir, el rotacional del campo magnético en un punto es igual a la densidad de corriente en dicho punto, multiplicada por  $\mu_0$ . Si el punto considerado se encuentra fuera de la corriente que da origen al campo, entonces  $\vec{J} = \vec{0}$  y, por tanto  $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$

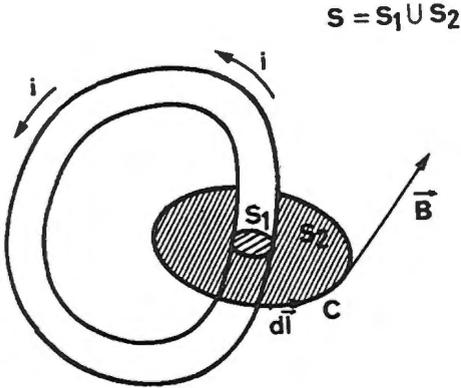
Evidentemente al ser no nulo el potencial  $\vec{B}$ , el campo magnético no deriva de un potencial escalar (como sucedía en el caso del campo electrostático).

Por tanto, la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de una curva cerrada no será nula, en general.

En efecto sea un circuito cerrado por el que circula una corriente continua  $i$ . Dicho circuito creará en todos los puntos del espacio un campo magnético cuyo valor viene dado por la ley de Ampère-Laplace.

La circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de una curva cerrada  $C$ , que rodea el circuito (Fig. 18.9), es

$$C = \int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} \quad (18.17)$$



donde  $d\vec{l}$  es un elemento de longitud tomado sobre  $C$ .

Ahora bien, según el teorema de Stokes, la ecuación (18.17) puede escribirse como

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}$$

donde  $S$  es una superficie cualquiera que tenga como contorno a la curva  $C$ .

Por otra parte, dicha superficie  $S$  puede considerarse formada por otra dos: la  $S_1$ , cuyo contorno es la intersección de  $S$  con el circuito, y la  $S_2$ , constituida por el resto de la superficie  $S$  y cuyos puntos están en el vacío. El flujo de  $\text{rot } \vec{B}$  a través de  $S$  es la suma de los flujos a través de  $S_1$  y  $S_2$ :

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \iint_{S_1} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}_1 + \iint_{S_2} \text{rot } \vec{B} \cdot d\vec{S}_2 \quad (18.18)$$

pero  $\text{rot } \vec{B} = \mu_0 \vec{J}$  en todos los puntos de  $S_1$  y  $\text{rot } \vec{B} = \vec{0}$  en los de  $S_2$ . Por tanto (18.18) puede escribirse como

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \iint_{S_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1 \quad (18.19)$$

La integral de superficie que aparece en (18.19) es el flujo de la densidad de corriente a través de una sección transversal del circuito, es decir, la intensidad que circula por él. En definitiva

$$\int_C \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i \quad (18.20)$$

expresión que constituye el denominado teorema de Ampère: “La circulación del campo magnético a lo largo de una curva cerrada  $C$  es  $\mu_0$  veces la corriente total,  $i$ , que atraviesa cualquier superficie limitada por la curva  $C$ ”.

Evidentemente, si la curva  $C$  no rodea al circuito ( $S_1 = 0$ ) entonces la circulación  $\vec{B}$  a través de  $C$  es nula (Fig. 18.10.a).

Si la curva  $C$  rodea a  $n$  circuitos, recorridos por corrientes  $i_1, i_2, \dots, i_n$ , la intensidad que aparece en (18.20) debe ser la suma algebraica de las corrientes de cada circuito (Fig. 18.10.b).

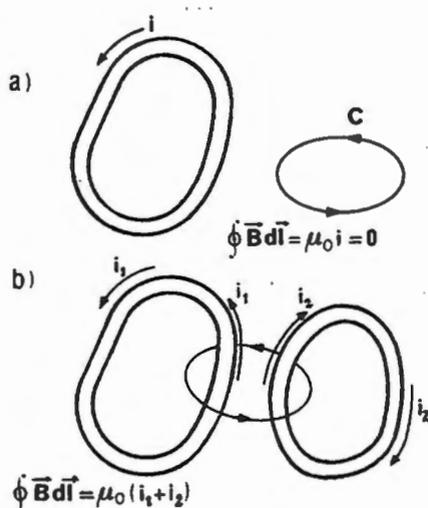


Fig. 18.10

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 \sum i$$

Como puede verse, el teorema de Ampère no es más que la expresión integral de la ecuación (18.16). Resulta de gran utilidad para el cálculo del campo magnético creado por distribuciones de corriente que tienen ciertas simetrías geométricas, como se muestra en los ejemplos que se resuelven a continuación.

### Ejemplo 18.4

Calcular el campo magnético creado por un hilo cilíndrico de radio  $R$  y longitud infinita, recorrido por una corriente  $i$ , uniformemente distribuida en su sección transversal.

#### Solución:

Por razones de simetría, resulta evidente que las líneas del campo magnético creado por esta distribución de corriente son circunferencias perpendiculares al eje del cilindro, cuyos centros están situados sobre dicho eje.

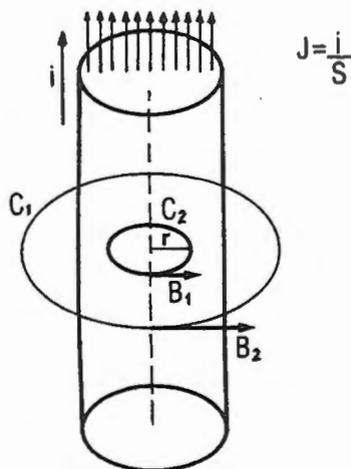


Fig. 18.11

Asimismo, el módulo de  $B$  depende tan sólo de la distancia del punto considerado al eje del cilindro. Por tanto, si se considera una circunferencia de radio  $r$  con centro sobre el eje del cilindro, la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de la misma es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \oint B dl = B \oint dl = B 2\pi r$$

Si  $r > R$ , toda corriente  $i$  del cilindro queda rodeada por la circunferencia.

Por tanto, según el teorema de Ampère se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i = B 2\pi r$$

luego

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi r} \quad (r > R)$$

expresión que coincide con la ecuación (18.8) para un hilo rectilíneo.

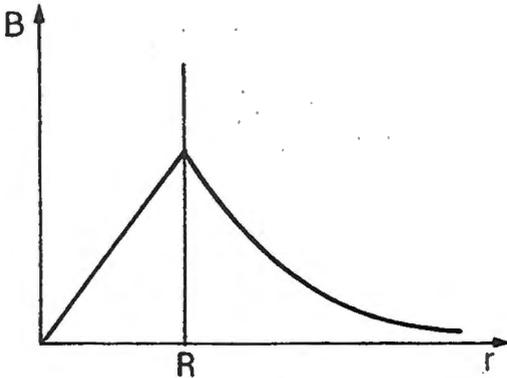


Fig. 18.12

Si  $r < R$ , la corriente que atraviesa la superficie delimitada por la circunferencia es

$$i' = J \pi r^2 = \frac{i}{\pi R^2} \pi r^2 = \frac{i r^2}{R^2}$$

Por tanto,

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i' = 2\pi r B = \mu_0 \frac{i r^2}{R^2}$$

y, despejando  $B$ , resulta

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi R^2} r \quad (r < R)$$

En la figura 18.12 se muestra la variación  $B(r)$ .

**Ejemplo. 18.5**

Calcular el campo magnético creado por un solenoide toroidal en un punto de su eje.

**Solución:**

Un solenoide toroidal es un solenoide cuyo eje es una circunferencia. Aplicando el teorema de Ampère para calcular la circunferencia de  $\vec{B}$  a lo largo de dicha circunferencia se tiene que

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i N$$

donde  $N$  es el número de espiras del solenoide.

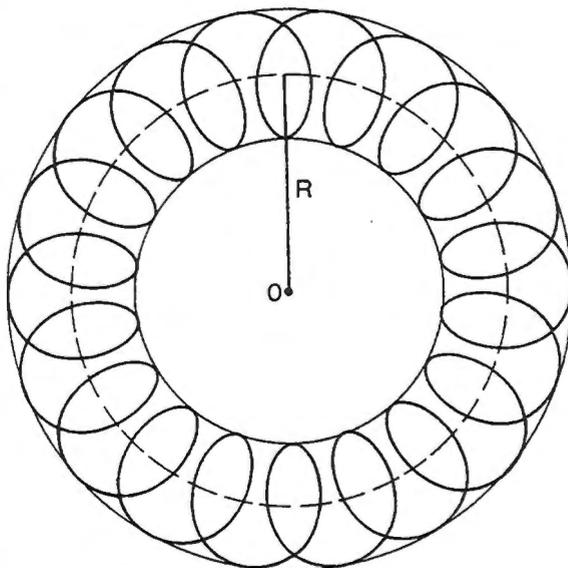
Por otra parte,  $\vec{B}$  y  $d\vec{l}$  son vectores paralelos, por lo cual.

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = 2\pi R B = \mu_0 i N$$

y despejando  $B$

$$B = \frac{\mu_0}{2\pi} \frac{Ni}{R}$$

Evidentemente, el campo magnético fuera del solenoide es nulo, ya que lo es la circulación a lo largo de cualquier línea fuera del mismo.



*Fig. 18.13*



**PROBLEMAS**

P.18.1. Calcular el campo magnético creado por una espira cuadrada, de lado  $a$ , en su centro.

**SOLUCIÓN**

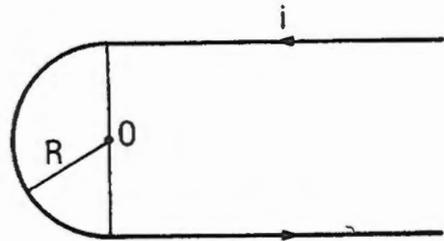
$$B = 2\sqrt{2} \mu_0 i / \pi a$$

P.18.2. Sea una espira circular de radio  $R$ , recorrida por una corriente  $i$ . Calcular explícitamente la circulación de  $B$  a lo largo de su eje.

**SOLUCIÓN**

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 i$$

P.18.3. Un hilo conductor muy largo se dobla como se muestra en la figura. Calcular  $B$  en el punto  $O$ .



**SOLUCIÓN**

$$B = \mu_0 i (2 + \pi) / 4\pi R$$

**P.18.3**

P.18.4. Sea una superficie semiesférica de radio  $R$ , cargada uniformemente con una densidad superficial de carga  $\sigma$ . La semiesfera gira al rededor de su eje de simetría con una velocidad angular  $\bar{\omega}$ . Calcular  $\bar{B}$  en el centro de dicha superficie.

**SOLUCIÓN**

$$\bar{B} = \mu_0 \sigma R \bar{\omega} / 3$$

P.18.5. Sea un conductor cilíndrico de radio  $R$ , recorrido por una corriente continua de densidad  $\bar{J}$ . Demostrar que  $\bar{B}$  en su interior puede expresarse como  $\bar{B} = (\mu_0 / 2) \bar{J} \times \bar{r}$  donde  $\bar{r}$  es el vector de posición del punto considerado con respecto al eje del cilindro.

P.18.6. Un cable coaxial está formado por un conductor cilíndrico macizo de  $R_1$  rodeado por otro conductor también cilíndrico, coaxial, de radios interior y exterior  $R_1$  y  $R_2$ , respectivamente. Por el conductor interior circula una corriente  $i$  que regresa por el exterior. Calcular  $B(r)$  suponiendo que la densidad de corriente es uniforme en cada conductor.

**SOLUCIÓN**

$$B = \mu_0 i r / 2\pi R_1^2 \quad (r < R_1)$$

$$B = \mu_0 i / 2\pi r \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$B = \mu_0 i (R_3^2 - r^2) / 2\pi r (R_3^2 - R_2^2) \quad (R_2 < r < R_3)$$

$$B = 0 \quad (r < R_2)$$

P.18.7. Un conductor cilíndrico de radio  $a$  es recorrido por una corriente continua de densidad  $\vec{J}$ . En el interior del conductor existe una cavidad cilíndrica, de radio  $b$  y longitud infinita cuyo eje, paralelo al del conductor, está separado de éste una distancia  $s$ . Demostrar que  $\vec{B}$  es uniforme en el interior de la cavidad y que su módulo vale  $B = \mu_0 J \cdot s / 2$ .

(Sugerencia): Calcular  $\vec{B}$  como la suma de dos campos:  $\vec{B}_1$  creado por todo el conductor, considerado como macizo y recorrido por una densidad de corriente  $\vec{J}$ , y  $\vec{B}_2$  creado por el hueco suponiendo que por él circulara una corriente de densidad  $-\vec{J}$ . Calcular  $\vec{B}_1$  y  $\vec{B}_2$  vectorialmente teniendo en cuenta el resultado del problema (18.5)

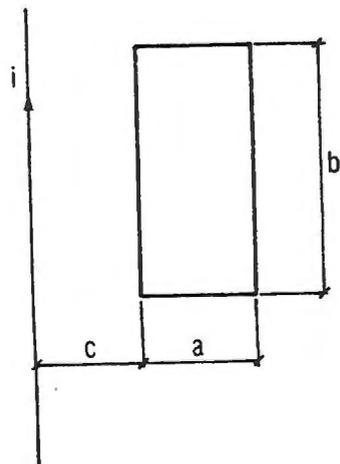
P.18.8. Una placa metálica, de espesor despreciable y extensión infinita está situada sobre el plano  $z = 0$ . Por dicha placa circula una corriente eléctrica uniformemente distribuida, en la dirección y sentido del eje  $OX$ , con una intensidad por unidad de anchura  $i$  (A/m). Calcular el campo  $\vec{B}$  creado por dicha distribución de corriente. (Nota: utilícese el T. de Ampère).

**SOLUCIÓN**

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i}{2} \vec{j} \quad \text{si } z > 0$$

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i}{2} \vec{j} \quad \text{si } z < 0$$

P.18.9. Un conductor rectilíneo, de longitud infinita y sección despreciable es recorrido por una corriente continua de intensidad  $i$ . Calcular el flujo magnético que atraviesa el rectángulo de la figura.



P.18.9

**SOLUCIÓN**

$$\phi = \frac{\mu_0 i b}{2\pi} \ln\left(\frac{c+a}{c}\right)$$

P.18.10. Una placa metálica de longitud infinita, anchura  $2a$  y espesor despreciable es recorrida longitudinalmente por una corriente  $I$ . Calcular el campo  $B$ :

- a) En un punto  $P$  situado en el plano de la banda y a una distancia  $b$  de su eje de simetría.
- b) En un punto  $Q$ , situado en el plano de simetría normal a la banda y a una distancia  $z$  de la misma.
- c) ¿Cuánto vale  $\vec{B}$  en el apartado anterior si  $z$  tiende a  $0$ ? Comparar este resultado con el del problema 18.8.

**SOLUCIÓN**

a) 
$$B = \frac{\mu_0 I}{4\pi a} \ln\left(\frac{b+a}{b-a}\right)$$

b) 
$$B = \frac{\mu_0 I}{2\pi a} \operatorname{arc\,tg}\left(\frac{a}{z}\right)$$

c) Si  $z \rightarrow 0$  
$$B = \frac{\mu_0 i}{2} \quad \text{donde} \quad i = \frac{I}{2a} \text{ (A / m)}$$

# CAPÍTULO 19

## INDUCCIÓN ELECTROMAGNÉTICA

### 19.1. Introducción

En el capítulo anterior se han estudiado los campos magnéticos producidos por corrientes continuas (campos magnéticos independientes del tiempo) estableciendo las leyes generales que los modelizan.

En el presente se consideran campos magnéticos variables y se estudia la relación existente entre éstos y los campos eléctricos no conservativos que producen.

Así, en el capítulo 11 se definió el campo eléctrico  $\vec{E}$ , creado por cargas eléctricas en reposo, a partir de la ley de Coulomb, llegándose a las dos ecuaciones fundamentales de la electrostática:

a) El campo electrostático deriva de potencial:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0 \quad (\text{rot } \vec{E} = \vec{0}, \text{ en forma diferencial})$$

b) Teorema de Gauss

$$\iint_S \vec{E} \cdot d\vec{S} = \frac{Q}{\epsilon_0} \quad (\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}, \text{ en forma diferencial})$$

El teorema de Gauss es de validez general con independencia del estado de movimiento de las cargas que producen el campo. Ahora bien, la ecuación a) sólo es aplicable a regímenes estacionarios; si los campos varían con el tiempo, dicha ecuación debe ser modificada, de forma que la circulación de  $\vec{E}$  a lo largo de una

curva cerrada no será nula en general. Ello nos obliga a cambiar nuestra definición de campo eléctrico a partir de la ley de Coulomb y suponer que  $\vec{E}$  representa, tal como indica la fuerza de Lorentz, la fuerza por unidad de carga situada, en reposo en un punto.

### 19.2. Fenómenos de inducción electromagnética

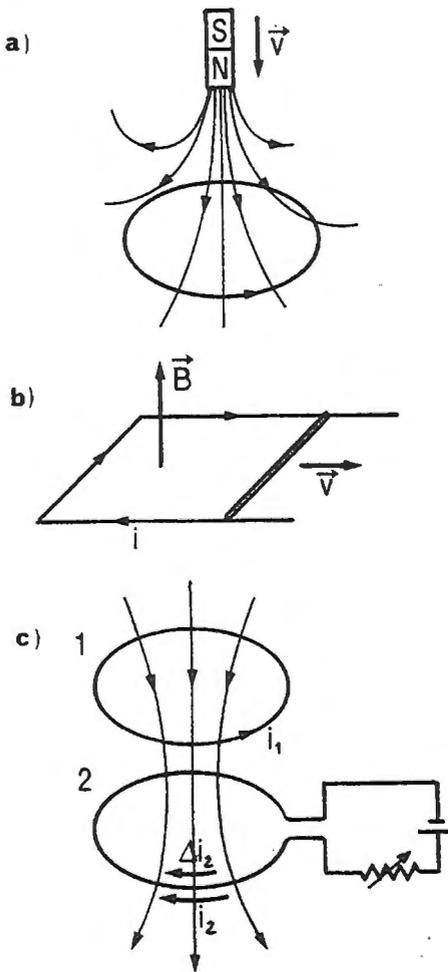


Fig. 19.1

Los fenómenos de inducción electromagnética fueron descritos simultáneamente por Faraday y Henry hacia 1830, y en la actualidad constituyen la bases del funcionamiento de numerosos dispositivos eléctricos (generadores, transformadores, hornos de inducción, etc.)

Sea la situación mostrada en la figura 19.1.a.: un imán se aproxima con velocidad  $v$  a una espira inmóvil. Experimentalmente se comprueba que, mientras exista movimiento del imán con respecto al circuito, aparece en éste una corriente eléctrica en el sentido mostrado en la figura.

Algo similar sucedería en el caso de la figura 19.1.b., en el que se muestra un circuito rectangular que se deforma por el desplazamiento de uno de sus lados. Si dicho circuito se encuentra en el interior de un campo magnético  $\vec{B}$ , aparecerá una corriente  $i$ , cuyo sentido depende del de la velocidad de desplazamiento de la barra móvil.

Finalmente, en la figura 19.1.c., se muestran dos espiras. Por la espira 2, que está conectada a un generador, circula una intensidad  $i_2$  que se puede modificar mediante un reostato. Si la intensidad  $i_2$  permanece constante, por la espira 1 no circula corriente. Ahora bien, si se modifica el valor de  $i_2$ , y mientras dure esta variación, en la espira 1 se induce una corriente cuyo sentido depende del sentido de  $\Delta i_2$ .

La característica común de estas tres experiencias es que en todos los casos aparece una corriente eléctrica asociada a la variación de flujo magnético que atraviesa al circuito. Así, en el primer caso dicha variación se produce moviendo la fuente que da origen al campo magnético; en el segundo, mediante la deformación de un circuito y en el tercer caso creando un campo magnético variable.

Además, según puede comprobarse en todos los casos, el sentido de la corriente inducida es tal que tiende a oponerse a la causa que la produce: si se produce por un aumento de flujo, el campo creado por la corriente inducida creará un flujo en sentido contrario.

Evidentemente, la aparición de corriente en los circuitos exige la existencia de una f.e.m., a la que se denomina f.e.m. inducida. En el siguiente apartado se establecerán las leyes cuantitativas que la relacionan con un campo magnético variable.

### ***19.3. Ley de Faraday***

Tal como se ha indicado anteriormente, si el flujo magnético que atraviesa un circuito se modifica, en este se induce una f.e.m. Experimentalmente se comprueba que el valor de dicha f.e.m. es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} \quad (19.1)$$

independientemente de cuál sea la causa que provoque la variación del flujo. La ecuación (19.1) constituye una expresión de la denominada ley de Faraday.

Teniendo en cuenta la definición de f.e.m. como circulación del campo a lo largo del circuito, la ecuación (19.1) puede expresarse como

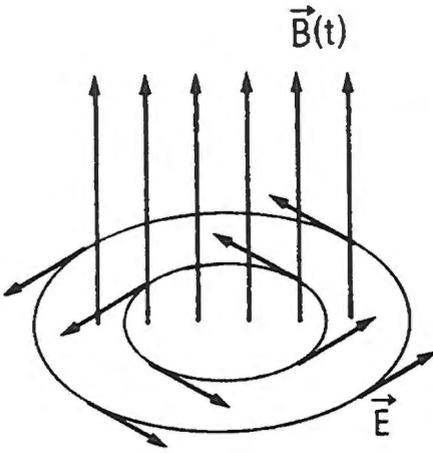


Fig. 19.2

cualquier campo magnético variable (Fig. 19.2) que se puede constatar sin más que comprobar que actúan fuerzas sobre cargas eléctricas, en reposo, situadas en la región en la que  $\vec{B}$  es variable.

Hay que señalar que la ley de Faraday constituye una ley experimental independiente que no puede, por tanto, ser deducida a partir de los principios vistos hasta ahora.

Si el camino de integración de la ecuación (19.3) está fijo en el espacio, el segundo miembro de dicha ecuación puede escribirse como

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

por tanto, en este caso,

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \tag{19.4}$$

y, teniendo en cuenta el teorema de Stokes

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S}$$

$$\varepsilon = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d\phi}{dt} \tag{19.2}$$

o bien

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \frac{-\partial}{\partial t} \iint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} \tag{19.3}$$

Donde  $S$  es una superficie cualquiera limitada por el camino de integración elegido para la integral curvilínea. Dicho camino no tiene por qué estar en un conductor metálico.

Como vemos, la ecuación (19.3) pone de manifiesto la existencia de un campo eléctrico no conservativo asociado a

por lo que (19.4) se transforma en

$$\iint_S \text{rot } \vec{E} \cdot d\vec{S} = - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (19.5)$$

y puesto que (19.5) debe cumplirse para cualquier superficie  $S$ , los integrandos de ambos miembros han de ser iguales. Es decir

$$\text{rot } \vec{E} = - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (19.6)$$

ecuación que constituye la expresión diferencial de la ley de Faraday. Obsérvese que si  $\vec{B} = \text{cte}$ , entonces  $\text{rot } \vec{E} = \vec{0}$ , resultado al que se llegó en la Electrostática y que, como vemos, no es más que un caso particular de la ecuación (19.6).

El signo menos que aparece en la ley de Faraday indica, como se ha expuesto anteriormente, el sentido de la f.e.m. inducida, que es tal que se opone a la causa que la produce. Esta regla recibe el nombre de **ley de Lenz**.

Como ejemplo de aplicación de la ley de Lenz, consideramos el caso mostrado en la figura 19.1.b, un circuito con una parte móvil en un campo magnético uniforme. El desplazamiento de la barra móvil en la dirección mostrada en la figura implica un aumento del flujo que atraviesa al circuito. Por tanto la corriente inducida deberá crear un campo magnético en sentido contrario a  $\vec{B}$ , por lo cual su sentido es el que se indica en la figura.

Obsérvese que la fuerza ejercida por  $\vec{B}$  sobre la barra móvil es  $i \vec{l} \times \vec{B}$ , y teniendo en cuenta el sentido de la corriente resulta que dicha fuerza se opone al desplazamiento de la barra móvil. En definitiva, la corriente inducida se opone a la causa que la produce.

### Ejemplo 19.1

Sea un hilo rectilíneo, de longitud infinita, recorrido por una corriente variable  $i(t)$ . Calcular la f.e.m. inducida en la espira rectangular de la figura 19.3.

**Solución:**

La corriente  $i$  en el hilo produce un campo magnético cuyo módulo es

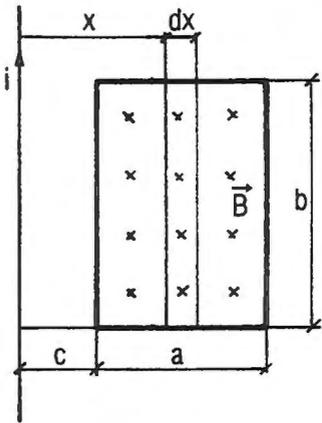


Fig. 19.3

$$B = \frac{\mu_0 i}{2\pi x}$$

donde  $x$  es la distancia del punto considerado al hilo. En los puntos de la espira dicho campo es perpendicular a su plano y hacia adentro. Por tanto el flujo a través de la espira es

$$\phi = \frac{\mu_0}{2\pi} i \int_c^{c+a} \frac{b dx}{x} = \frac{\mu_0 i}{2\pi} b \ln\left(\frac{c+a}{a}\right)$$

La f.e.m. inducida en la espira es

$$[\mathcal{E}] = -\frac{\partial \phi}{\partial t} = -\frac{\mu_0 b}{2\pi} \frac{di}{dt} \ln\left(\frac{c+a}{a}\right)$$

cuyo sentido viene dado por la ley de Lenz. Así, si  $di/dt$  es positivo, la f.e.m. inducida dará lugar a una corriente en sentido opuesto a las agujas del reloj.

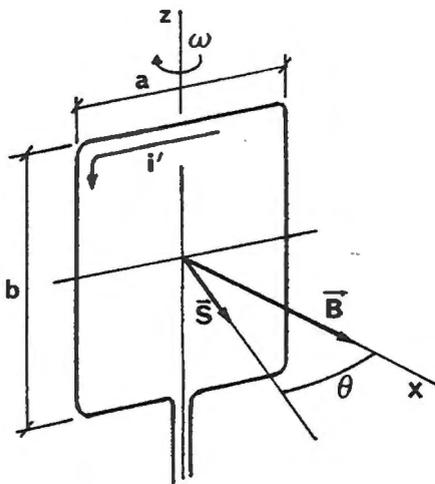


Fig. 19.4

**Ejemplo 19.2**

Sea una espira rectangular como la mostrada en la figura 19.4, que gira alrededor del eje  $z$  con una velocidad angular  $w$  en el interior de un campo magnético  $B$ , uniforme e independiente del tiempo, paralelo al eje  $x$ . Calcular la f.e.m. inducida en la espira.

**Solución:**

El flujo magnético que atraviesa a la espira es

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = B ab \cos \theta = ab B \cos wt$$

Por tanto, la f.e.m. inducida en la espira es

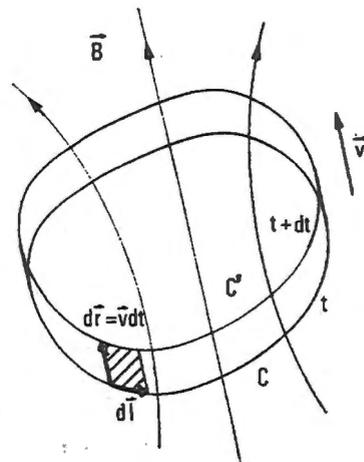
$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = ab B w \sin wt$$

Obsérvese que  $\mathcal{E}$  es nula cuando  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  son paralelos (flujo máximo o mínimo). El sentido de la f.e.m. cambia alternativamente. En la posición mostrada en la figura, la corriente inducida llevaría el sentido contrario a las agujas del reloj.

**Nota complementaria 19.1. Fuerza electromotriz inducida en un circuito en movimiento.**

La expresión integral de la ley de Faraday dada por la ec. (19.3) es válida para calcular la f.e.m. inducida en un circuito independiente de la causa que origina la variación del flujo magnético (campo magnético variable, circuito que se desplaza en un campo no uniforme, etc.).

Sin embargo, la expresión diferencial de dicha ley, reflejada en la ecuación (19.6), sólo es aplicable al caso de sistemas en reposo, ya que el camino de integración escogido se encontraba en una posición fija en el espacio. En esta sección se establece una expresión similar para el caso de sistema en movimiento.



**Fig. 19.5**

Para ello se considera un circuito cerrado que se mueve en el interior de un campo magnético que, por ahora, se supondrá constante. En el instante  $t$  el circuito

ocupa una posición dada por la curva  $C$ ; en el instante  $t+dt$  el circuito se ha desplazado hasta la posición  $C'$ . Sean  $\phi$  y  $\phi'$  los flujos a través del circuito en  $t$  y  $t+dt$ , respectivamente. Denominaremos  $\phi''$  al flujo magnético que sale a través de la superficie barrida por el circuito en su desplazamiento durante el intervalo  $[t, t + dt]$ . La variación de flujo en el desplazamiento del circuito y a través de la superficie limitada por el mismo, es

$$d\phi = \phi' - \phi$$

Esta variación de flujo puede calcularse sin más que tener en cuenta que el flujo de  $\vec{B}$  a través de una superficie cerrada es nulo. Por tanto

$$\phi' - \phi + \phi'' = 0$$

es decir

$$d\phi = -\phi'' = -\int_C \vec{B} \cdot (d\vec{l} \times d\vec{r}) \quad (19.7)$$

donde  $d\vec{r} = \vec{v} dt$

Operando, la ecuación (19.7) puede escribirse como

$$d\phi = -dt \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l}$$

Por tanto, la f.e.m. inducida es

$$\varepsilon = \frac{-d\phi}{dt} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} \quad (19.8)$$

Por otra parte, teniendo en cuenta la definición de f.e.m. resulta evidente que el campo eléctrico inducido en el interior del circuito móvil es

$$\vec{E} = \vec{v} \times \vec{B} \quad (19.9)$$

Es preciso puntualizar el significado de la ecuación (19.9).  $\vec{E}$  representa el campo eléctrico inducido, medido en un sistema de referencia que se mueve con

velocidad  $\vec{v}$  con respecto al sistema de referencia en que se expresa  $\vec{B}$ . Así, si  $\vec{B}$  es constante, el campo eléctrico inducido que se apreciaría en un sistema de referencia fijo es nulo; por el contrario, en un sistema de referencia móvil, aparecería un campo eléctrico (fuerzas por unidad de carga) dado por (19.9).

Si el campo  $\vec{B}$  es variable, la expresión diferencial de la ley de Faraday para un sistema que se desplaza con velocidad  $\vec{v}$  es

$$\text{rot } \vec{E} = \text{rot} (\vec{v} \times \vec{B}) - \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (19.10)$$

En forma integral, esta ecuación se escribe como

$$\varepsilon = \int \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_C (\vec{v} \times \vec{B}) \cdot d\vec{l} - \iint_S \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{S} \quad (19.11)$$

donde el primer término del segundo miembro representa la variación de flujo magnético, por unidad de tiempo, debido al desplazamiento del circuito, mientras que el segundo término cuantifica la variación de flujo como consecuencia de la dependencia de  $\vec{B}$  en función del tiempo.

### Nota complementaria 19.2. Corriente de Foucault.

Si una masa conductora se desplaza en el interior de un campo magnético aparecen en la misma corrientes inducidas, cuyo sentido se determina a partir de la ley de Lenz. Dichas corrientes reciben el nombre de corrientes de Foucault.

Como ejemplo se puede considerar la situación mostrada en la figura 19.6. Un disco metálico gira al rededor de su eje, de forma que una parte del disco está en el interior de un campo magnético. Al girar el disco, una zona del mismo se introduce en

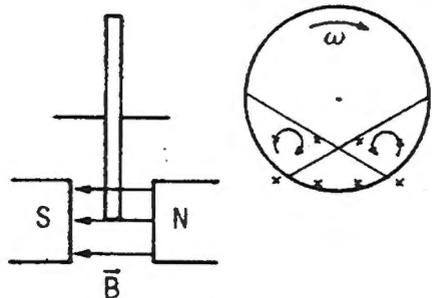
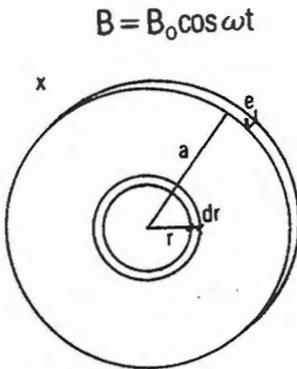


Fig. 19.6

el campo magnético (zona rayada de la derecha), Cualquier circuito cerrado que se considere en dicha zona será atravesado por un flujo creciente, por lo que se inducirá en él una corriente de Foucault que se opone a esta variación de flujo. El sentido de la corriente inducida es, por tanto, el contrario a las agujas del reloj. En la zona rayada de la izquierda, por el contrario, el flujo disminuye y las corrientes inducidas tienen el sentido de las agujas del reloj.

Las corrientes de Foucault producen dos efectos. Por un lado se produce un frenado magnético del disco. Por otro, se origina un calentamiento del mismo por efecto Joule.



**Fig.19.7**

Las corrientes de Foucault pueden originarse en un conductor en reposo si éste se encuentra en el interior de un campo magnético variable. Consideremos por ejemplo, el disco metálico de la figura 19.6, de radio  $a$ , espesor  $e$  y resistividad  $\rho$ , situado en el interior de un campo magnético  $B = B_0 \cos \omega t$ , perpendicular al disco.

Un anillo de radio  $r$ , y anchura  $dr$ , es atravesado por un flujo variable

$$\phi = \pi r^2 w B_0 \cos \omega t$$

por lo que se induce en él una f.e.m.

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = \pi r^2 w B_0 \sin \omega t$$

Llamando  $R$  a la resistencia del anillo, la corriente inducida en el mismo es

$$di = \frac{\mathcal{E}}{R} = \frac{\mathcal{E}}{2\pi r \rho / e dr} = \frac{\pi r^2 w B_0 \sin \omega t e dr}{2\pi r \rho}$$

La potencia disipada por efecto Joule en este circuito

$$dP = (di)^2 R = \frac{\pi e w^2 B_0^2 \text{sen}^2 wt}{2\rho} r^3 dr$$

y la potencia disipada por todo el disco

$$P = \frac{\pi e w^2 B_0^2 \text{sen}^2 wt}{2\rho} \int_0^a r^3 dr = \frac{a^4 \pi e w^2 B_0^2 \text{sen}^2 wt}{8\rho}$$

Obsérvese que  $P$  es proporcional al cuadrado de la pulsación  $w$  y a la cuarta potencia del radio del disco. La potencia disipada puede disminuirse notablemente si se sustituye el disco de radio "a" por un conjunto de discos de radio menor y con el mismo volumen total.

## 19.4. Coeficientes de inducción

### 19.4.1. Coeficiente de inducción mutua

Sean dos circuitos,  $C_1$  y  $C_2$ , rígidos y situados en el vacío.

Si el circuito  $C_1$  es recorrido por una intensidad  $i_1$ , dicha corriente crea un campo magnético  $\vec{B}_1$  cuyo flujo a través del circuito  $C_2$  denominaremos  $\phi_{21}$ .

Evidentemente  $\phi_{21}$  es proporcional a  $i_1$ , ya que el campo  $\vec{B}_1$  en cada punto es, según (18.7), proporcional a dicha corriente. En definitiva  $\phi_{21}$  puede escribirse como

$$\phi_{21} = M_{21} i_1 \tag{19.12}$$

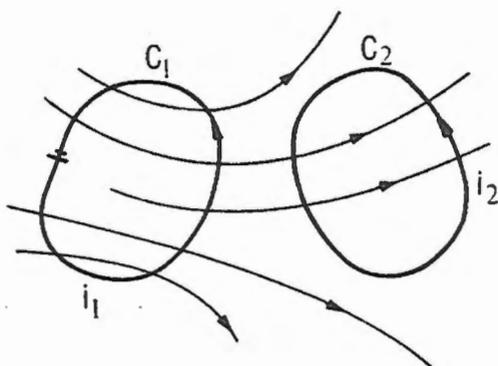


Fig. 19.8

La constante de proporcionalidad  $M_{21}$ , que depende únicamente de la geometría de los circuitos y de su posición relativa, recibe el nombre de coeficiente de inducción mutua.

De forma análoga, podría definirse  $M_{12}$  a partir de la expresión

$$\phi_{12} = M_{12} i_2 \quad (19.13)$$

donde  $\phi_{12}$  es el flujo a través de  $C_1$  del campo creado por una corriente  $i_2$  que circula por  $C_2$ . Una propiedad importante de los coeficientes  $M_{12}$  y  $M_{21}$ , cuya demostración omitiremos, es que

$$M_{12} = M_{21} = M$$

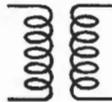
Si la corriente que circula por  $C_1$  es variable, el flujo  $\phi_{21}$  también lo será, por lo que se induce en éste una f.e.m. de valor

$$\mathcal{E}_2 = -\frac{d\phi_{21}}{dt} = -M \frac{di_1}{dt} \quad (19.14)$$

A partir de esta ecuación se define la unidad de inducción mutua, el henrio (H). Entre dos circuitos hay una inducción mutua de un henrio cuando, al variar la corriente en uno de los circuitos a razón de un amperio por segundo, se induce en el otro una f.e.m. de un voltio. La ecuación de dimensiones de  $M$  es, por tanto

$$[M] = [\mathcal{E}] T I^{-1} = M L^2 T^{-2} I^{-2}$$

El símbolo utilizado en los esquemas eléctricos para indicar la inducción entre dos circuitos es



### 19.4.2. Autoinducción

Sea un circuito cerrado recorrido por una corriente  $i$ . Siguiendo razonamientos similares a los del apartado anterior, el circuito es atravesado por un flujo propio que es proporcional a la corriente  $i$

$$\phi = Li \tag{19.15}$$

donde  $L$  es una corriente denominada **coeficiente de autoinducción**, cuyo valor depende únicamente de la geometría del circuito. Las dimensiones del coeficiente de autoinducción son las mismas que las del de inducción mutua y también se mide en henrios.

Si la corriente  $i$  es variable, en el circuito aparece una f.e.m. inducida

$$\varepsilon = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} \tag{19.16}$$

Dicha f.e.m. se opone al cambio de corriente, por lo que el coeficiente  $L$  es siempre positivo.

En los esquemas eléctrico, el símbolo utilizado para representar la autoinducción es

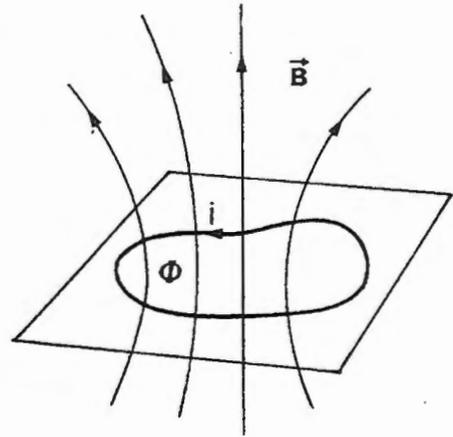


Fig.19.9

### 19.4.3. Coeficiente de acoplamiento

Consideremos los circuitos de la figura 19.8, recorridos por corrientes  $i_1$  e  $i_2$  respectivamente. El flujo magnético a través del circuito  $C_2$  es

$$\phi_2 = \phi_{22} + \phi_{21} = L_2 i_2 + M i_1 \tag{19.17}$$

donde  $\phi_{22}$  es el flujo propio y  $\phi_{21}$  es el flujo debido a la corriente que circula por  $C_1$ . Evidentemente,  $\phi_{21}$  es tan sólo una fracción de  $\phi_{11}$ , es decir

$$\phi_{21} = k_1 \phi_{11} \tag{19.18}$$

con  $k_1 \leq 1$ . Teniendo en cuenta el valor de  $\phi_{11}$  dado por (19.15), la ecuación (19.18) se transforma en

$$\phi_{21} = k_1 L_1 i_1 = M i_1$$

de donde se deduce que

$$M = k_1 L_1 \quad (k_1 \leq 1) \quad (19.19)$$

Repetiendo este razonamiento para el flujo  $\phi_{12}$ , se llegaría a la expresión

$$M = k_2 L_2 \quad (k_2 \leq 1) \quad (19.20)$$

y, multiplicando (19.19) por (19.20), resulta

$$M^2 = k_1 k_2 L_1 L_2 \quad (19.21)$$

o bien

$$M = \pm k \sqrt{L_1 L_2} \quad (19.22)$$

donde  $k$  es el coeficiente de acoplamiento entre los circuitos, cuyo valor puede variar entre  $-1$  y  $+1$ . Si los dos circuitos son iguales y están superpuestos, el valor absoluto de  $k$  es la unidad.

### Ejemplo 19.3

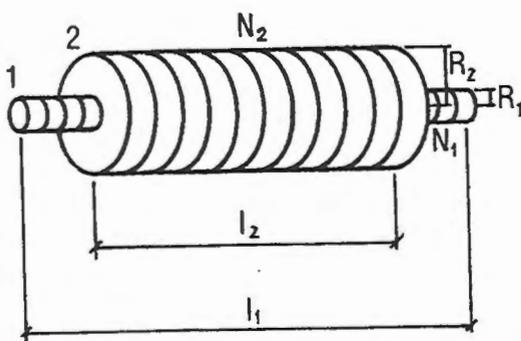


Fig. 19.10

Sean los solenoides coaxiales de la figura 19.10. Suponiendo que dichos solenoides son muy largos con respecto a sus radios, y despreciando el efecto de los bordes, calcular, los coeficientes de inducción y el de acoplamiento.

#### Solución:

Calcularemos en primer lugar los coeficientes de autoinducción. Así, suponiendo que por el solenoide 1 circula una corriente  $i_1$ , el flujo propio

a través de este circuito es

$$\phi_{11} = N_1 B_1 S_1 = N_1 \mu_0 \frac{N_1}{l_1} i_1 \pi R_1^2 = L_1 i_1$$

por tanto

$$L_1 = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1^2}{l_1}$$

Del mismo modo,

$$L_2 = \frac{\mu_0 \pi R_2^2 N_2^2}{l_2}$$

Para calcular el coeficiente de inducción mutua supondremos que por el circuito 1 pasa una corriente  $i_1$ . El flujo a través del solenoide 2 es

$$\phi_{21} = N_2 B_1 S_1$$

donde se ha tomado la sección del solenoide 1 ya que en el exterior del mismo el campo  $B_1$  es nulo (se ha supuesto que el solenoide es muy largo). Sustituyendo valores resulta

$$\phi_{21} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1} i_1$$

Por tanto,

$$M = \frac{\phi_{21}}{i_1} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1}$$

Finalmente, el coeficiente de acoplamiento se calcula según (19.22) como

$$R = \frac{M}{\sqrt{L_1 L_2}} = \frac{\mu_0 \pi R_1^2 N_1 N_2}{l_1} \frac{\sqrt{l_1 l_2}}{\mu_0 \pi R_1 R_2 N_1 N_2} = \frac{R_1}{R_2} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$$

cuyo valor es evidentemente menor que uno.

### 19.5. Energía almacenada en un campo magnético

En el capítulo 13 se puso de manifiesto, la necesidad de un aporte de energía para establecer cualquier campo eléctrico. Del mismo modo, y como consecuencia directa de la ley de Faraday, la creación de un campo magnético implica un gasto de una energía.

En efecto, sea un circuito como el mostrado en la figura 19.11, constituido por un hilo conductor de resistencia  $R$  y un generador de f.e.m.  $\mathcal{E}$  y resistencia interna despreciable. Sea  $L$  el coeficiente de autoinducción del circuito.

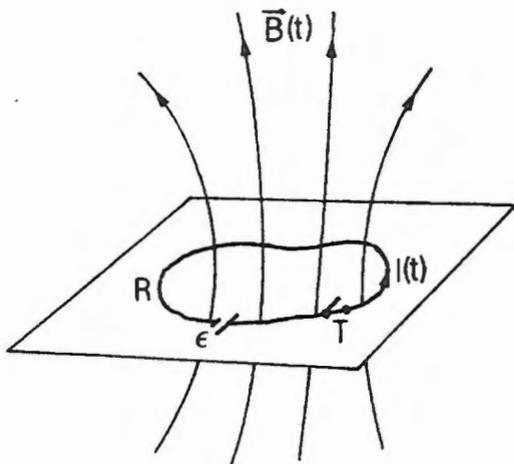


Fig. 19.11

Si el interruptor  $T$  se encuentra inicialmente abierto, la corriente  $I$  será nula y por tanto el campo magnético en cada punto del espacio también será cero. Supongamos que en el instante  $t = 0$  se cierra el interruptor. La ecuación del circuito puede escribirse como

$$\mathcal{E} + \mathcal{E}_i = RI$$

donde  $\mathcal{E}_i$  es la f.e.m. inducida. Teniendo en cuenta la ecuación (19.16) la expresión anterior se escribe como

$$\mathcal{E} = RI + L \frac{dI}{dt} \quad (19.23)$$

Efectuemos un balance de energías para un intervalo de tiempo  $dt$ . Para ello, multipliquemos por  $I dt$  la ecuación (19.23)

$$\mathcal{E} I dt = RI^2 dt + LI dI \quad (19.24)$$

El primer miembro de la ecuación anterior representa la energía suministrada por el generador en el intervalo  $dt$ . Esta energía se convierte en dos formas de energía distintas que corresponden a cada uno de los términos del segundo miembro.

Así, el término  $R I^2 dt$  representa la energía disipada en forma de calor por efecto Joule, y sólo será igual a la energía suministrada por el generador cuando la variación del flujo magnético a través del circuito sea nula ( $dI = 0$ ). El término adicional  $L I dt$  representa el trabajo realizado contra la f.e.m. inducida en el circuito.

$$dW_B = L I dI \quad (19.25)$$

En definitiva  $dW_B$  representa la energía que debe suministrar la batería para aumentar la intensidad del circuito y, por tanto, para crear el campo magnético. Hay que señalar que  $dW_B$  es positivo cuando lo es  $dI$ , es decir cuando se está estableciendo el campo  $\vec{B}$ . Si  $I$  disminuye,  $dW_B$  es negativa:  $\vec{B}$  va decreciendo y el circuito recupera la energía invertida al establecerlo.

Si la intensidad correspondiente al régimen estacionario es  $I_0$

$$I_0 = \frac{\mathcal{E}}{R}$$

la energía almacenada en el campo magnético es

$$W_B = \int dW_B = \int_0^{I_0} L I dI = \frac{1}{2} L I_0^2 \quad (19.26)$$

Calculemos, por ejemplo, la energía almacenada por un solenoide muy largo de sección  $S$ , longitud  $l$ , con  $n$  espiras por unidad de longitud y recorrido por una corriente continua de intensidad  $I$ . En estas condiciones es posible suponer que el campo magnético es uniforme en el interior del solenoide y nulo en el exterior. La autoinducción del solenoide es, según lo establecido en el Ejemplo 19.3, en el que se desprecian los efectos de bordes,

$$L = \mu_0 S n^2 l$$

Por tanto, la energía almacenada en el campo magnético es

$$W_B = \frac{1}{2} \mu_0 S n^2 l I^2 \quad (19.27)$$

Por otra parte, el campo magnético creado por un solenoide muy largo en su interior es

$$B = \mu_0 nI$$

y, despejando el valor de  $I$  y sustituyéndolo en (19.27) resulta

$$W_B = \frac{1}{2\mu_0} B^2 S \cdot l = \frac{1}{2\mu_0} B^2 v \quad (19.28)$$

donde  $v = S \cdot l$  es el volumen en el que existe el campo magnético.

La densidad de energía, o energía por unidad de volumen, almacenada en el campo magnético es

$$W_B = \frac{dW_B}{dv} = \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (19.29)$$

expresión de validez general, aunque haya sido deducida para este caso particular.

En las regiones del espacio en las que existe simultáneamente un campo eléctrico y un magnético, la densidad de energía por unidad de volumen es

$$w = \frac{1}{2} \epsilon_0 E^2 + \frac{1}{2\mu_0} B^2 \quad (19.30)$$

### Ejemplo 19.4

Sea un cable coaxial constituido por dos superficies metálicas cilíndricas y coaxiales de radios  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente. Por el conductor interior circula una intensidad  $I$  que regresa por el exterior en sentido contrario. Calcular la energía magnética almacenada así como el coeficiente de autoinducción de la línea.

### Solución:

Por razones de simetría, las líneas de campo son circunferencias con centro sobre el eje del cable. Asimismo, el módulo de  $\vec{B}$  es una función de  $r$ :  $B = B(r)$ .

Aplicando el teorema de Ampère se puede calcular  $B(r)$

$$B(r) = 0 \quad (r < R_1)$$

$$B(r) = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$B(r) = 0 \quad (R_2 < r)$$

Por tanto, la densidad de energía es

$$w_B = 0 \quad (r < R_1)$$

$$w_B = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} \quad (R_1 < r < R_2)$$

$$w_B = 0 \quad (r > R_2)$$

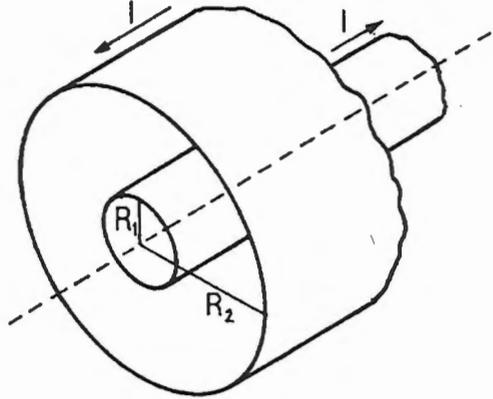


Fig. 19.12

Consideremos el elemento de volumen comprendido entre las superficies cilíndricas de longitud  $l$  y radios  $r$  y  $r + dr$ , respectivamente. La energía magnética almacenada en este elemento es

$$dW_B = w_B dv = \frac{\mu_0 I^2}{8\pi^2 r^2} 2\pi r dr l = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \frac{dr}{r}$$

La energía almacenada en una longitud  $l$  de cable es

$$W_B = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \int_{R_1}^{R_2} \frac{dr}{r} = \frac{\mu_0}{4\pi} l I^2 \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$

Una vez obtenida la energía magnética asociada a la línea resulta fácil calcular el coeficiente de autoinducción. En efecto, teniendo en cuenta (19.26) resulta que

$$L = \frac{2W_B}{I^2} = \frac{\mu_0}{2\pi} l \ln\left(\frac{R_2}{R_1}\right)$$



## PROBLEMAS

- P.19.1. Un circuito cerrado y en reposo, de resistencia  $R$ , es atravesado por un flujo magnético variable  $\phi = a t(T - t)$ , donde  $a$  y  $T$  son dos constantes. Calcular la energía disipada por efecto Joule en dicho circuito durante el intervalo de tiempo  $(0, T)$ . (despréciase la autoinducción del circuito).

### SOLUCIÓN

$$W = a^2 T^3 / 3R$$

- P.19.2. Sea un solenoide recto muy largo, de sección circular de radio  $R$  y con  $n$  espiras por unidad de longitud. Por dicho solenoide circula una corriente variable de intensidad  $i = I \cdot \sin wt$ , donde  $I$  y  $w$  son constantes. Calcular el campo eléctrico inducido dentro y fuera del solenoide.

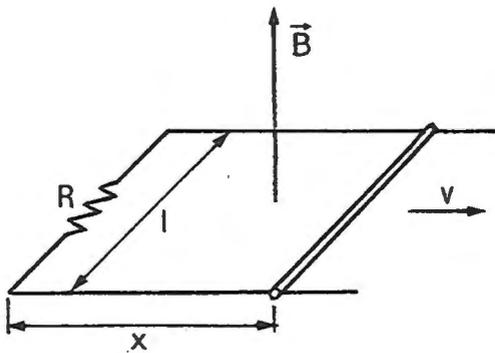
### SOLUCIÓN

$$E = (\mu_0 n w r I \cos wt) / 2 \quad (r \leq R)$$

$$E = (\mu_0 n w R^2 I \cos wt) / 2r \quad (r \geq R)$$

- P.19.3. Una barra conductora de resistencia despreciable desliza sin rozamiento, y con velocidad constante  $v$ , sobre dos raíles metálicos paralelos en una región de campo  $\vec{B}$  uniforme, tal como se muestra en la figura. Si la resistencia del circuito es  $R$ , calcular:

- a) Corriente inducida en el circuito.
- b) Fuerza que hay que ejercer sobre la barra.



P.19.3

- c) Potencia necesaria para mover la barra.
- d) Potencia disipada por efecto Joule en la resistencia  $R$ .

**SOLUCIÓN**

- a)  $i = B l v / R$
- b)  $f = B^2 l^2 v / R$
- c)  $P = B^2 l^2 v^2 / R$
- d)  $P_v = B^2 l^2 v^2 / R$

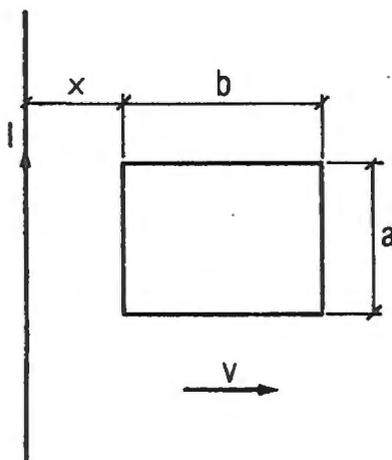
P.19.4. En el problema anterior, supóngase que la barra se lanza desde  $x = 0$  con velocidad inicial  $v_0$ , no aplicándose ninguna fuerza exterior para desplazar la barra. Calcular:

- a) Tiempo que tarda la barra en detenerse.
- b) Distancia total que recorre.
- c) Carga total que atraviesa una sección de la barra.

**SOLUCIÓN**

- a) Infinito
- b)  $x = v_0 R m / B^2 l^2$
- c)  $Q = v_0 m / B l$

P.19.5. Una espira rectangular de lados  $a$  y  $b$  y un hilo rectilíneo de longitud infinita, recorrido por una corriente  $I$ , se encuentra en el mismo plano, tal como se muestra en la figura. La espira se desplaza hacia la derecha con velocidad  $v$ . Calcular:



P.19.5

- F.e.m. inducida en la espira.
- Resultante de las fuerzas que actúan sobre la espira.

Suponer que la resistencia de la espira es  $R$  y despreciar el campo producido por las corrientes inducidas.

**SOLUCIÓN**

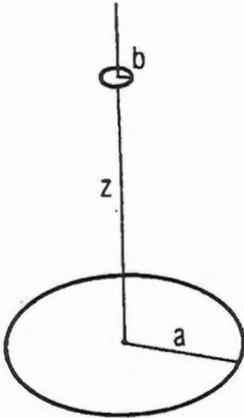
a)  $\mathcal{E} = \mu_0 I a b v / [2\pi (b + x) x]$

b)  $f = \mu_0^2 I^2 a^2 b^2 v / [4\pi^2 x^2 (b + x)^2 R]$

P.19.6. El aspa metálica de un ventilador de radio  $R$  gira con velocidad angular constante,  $w$ , en el interior de un campo magnético uniforme,  $B$ , paralelo al eje de giro. Calcular la ddp entre el extremo del aspa y su centro.

**SOLUCIÓN**

$V = w B R^2 / 2$

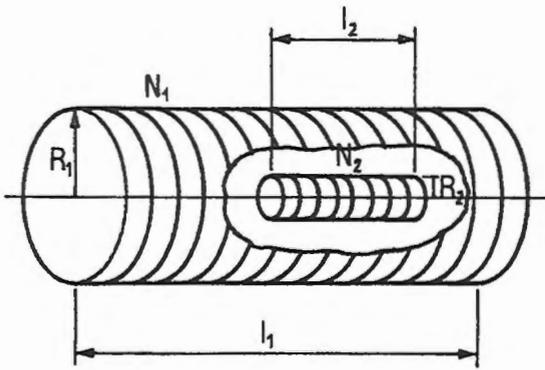


P.19.7

P.19.7. Determinar el coeficiente de inducción mutua de las espiras de la figura. Admitir que  $a \gg b$ .

**SOLUCIÓN**

$$M = \mu_0 \pi a^2 b^2 / [2(a^2 + z^2)^{3/2}]$$



P.19.8

P.19.8. Sean dos solenoides coaxiales muy largos, como los mostrados en la figura.

Suponiendo que sea  $L_1 \gg L_2$  y despreciando el efecto de bordes. Calcular:

- a) Coeficiente de inducción mutua.
- b) Coeficiente de acoplamiento.

**SOLUCIÓN**

a)  $M = \mu_0 \pi N_1 N_2 R_2^2 / l_1$

b)  $k = \frac{R_2}{R_1} \sqrt{\frac{l_2}{l_1}}$

- P.19.9. Una línea está formada por dos alambres metálicos rectilíneos, muy largos, paralelos, y cuyos ejes están separados una distancia  $b$ . El radio de los alambres es  $a$  ( $a \ll b$ ). Calcular el coeficiente de autoinducción por unidad de longitud de dicha línea (Despréciase el flujo en el interior de los alambres).

**SOLUCIÓN**

$$L = \frac{\mu_0}{\pi} \ln\left(\frac{b-a}{a}\right)$$

- P.19.10. Sean dos bobinas con  $N_1$  y  $N_2$  vueltas. Los arrollamientos son muy compactos, de forma que puede admitirse que, en cada bobina, todas las vueltas tienen la misma forma y ocupan la misma curva geométrica. Demostrar que el coeficiente de acoplamiento es independiente de  $N_1$  y  $N_2$ .



## CAPÍTULO 20

### PROPIEDADES MAGNÉTICAS DE LA MATERIA

#### *20.1. Materiales magnéticos*

En los capítulos precedentes se han establecido las ecuaciones que permiten calcular el campo  $\vec{B}$  creado por corrientes estacionarias en el vacío. En éste se analizará el efecto que sobre dicho campo tiene la presencia de materia.

En el capítulo 11 vimos cómo los átomos que constituyen la materia están compuestos por un núcleo positivo y una corteza de electrones en movimiento alrededor del mismo. Además, cada electrón está sometido a un movimiento de rotación alrededor de su eje: el movimiento de espín. Cada uno de estos movimientos equivale a una corriente eléctrica ligada al átomo y caracterizada por su correspondiente momento magnético  $\vec{m}$ . Estas corrientes atómicas no suponen un transporte neto de carga a través de la materia pero pueden producir efectos magnéticos.

Ahora bien, en la materia condensada, los átomos no se presentan aislados, sino asociados entre sí en forma de iones o moléculas. Según el tipo de molécula, los momentos magnéticos de las corrientes atómicas pueden, o no, anularse entre sí. A partir de este criterio podemos clasificar los materiales en tres grandes grupos: diamagnéticos, paramagnéticos y ferromagnéticos.

#### *20.1.1. Diamagnetismo*

La mayor parte de las sustancias (orgánicas e inorgánicas) están formadas por moléculas o iones en las que el momento magnético resultante es nulo. Por tanto, en ausencia de cualquier influencia exterior, un elemento de volumen  $dv$  no manifiesta ningún momento magnético: la sustancia no está imantada.

Ahora bien, si el campo exterior aumenta desde cero hasta un valor dado  $\vec{B}$ , la variación de flujo magnético que atraviesa a cada corriente atómica induce en ella una f.e.m. que la modifica (Fig. 20.1). Puesto que esta modificación tiene el mismo

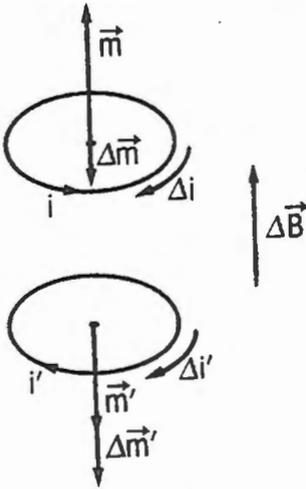


Fig. 20.1

sustancias paramagnéticas o ferromagnéticas el comportamiento diamagnético es enmascarado por otros fenómenos más intensos que veremos a continuación.

sentido en todas las corrientes atómicas, aparece un momento magnético resultante no nulo en cada molécula. El sentido de este momento magnético es, según la ley de Lenz, opuesto al del campo exterior que lo crea. Este tipo de comportamiento magnético de la materia recibe el nombre de diamagnetismo y consiste en una imantación, aparición de un momento magnético en cada elemento de volumen, de sentido opuesto al del campo magnético exterior.

Hay que señalar que el diamagnetismo se presenta en cualquier tipo de materia. No obstante, su efecto sólo es apreciable en aquellas sustancias compuestas por moléculas con momento magnético nulo. En las

### 20.2.1. Paramagnetismo

Algunas sustancias (oxígeno, aluminio, cloruro ferroso, etc.) están formadas por iones o moléculas cuyos momentos magnéticos no son nulos. Sin embargo, la interacción magnética de unas moléculas con otras es muy débil, y la orientación del momento magnético de una de ellas es independiente de los momentos magnéticos de las restantes. Así, en ausencia de un campo magnético exterior, los momentos magnéticos se distribuyen al azar de forma que el momento magnético neto de un elemento de volumen es nulo: la sustancia no está imantada.

Si se aplica un campo  $\vec{B}$ , las orientaciones de los momentos magnéticos dejan de ser aleatorias y tienden a tomar la dirección y sentido de  $\vec{B}$ ; cada elemento de volumen,  $dv$ , es portador de un momento magnético no nulo, con la misma dirección y sentido que  $\vec{B}$ ,

Esta propiedad se denomina paramagnetismo y sólo se presenta en aquellas sustancias formadas por moléculas (o iones) con momento magnético no nulo. Estas sustancias se denominan paramagnéticas.

### 20.1.3. Ferromagnetismo

Finalmente, las sustancias denominadas ferromagnéticas (hierro, cobalto, níquel, gadolinio, ferritas y cromitas) se caracterizan por estar formadas por iones o moléculas con un momento magnético resultante no nulo. Ahora bien, a diferencia de las sustancias paramagnéticas, en las ferromagnéticas dichos momentos están acoplados entre sí mediante interacciones muy fuertes, de forma que sus orientaciones no son aleatorias sino que guardan un cierto orden, incluso en ausencia de cualquier campo externo. Así, una porción macroscópica de sustancia ferromagnética puede tener un momento magnético no nulo aún en ausencia de un campo exterior  $\vec{B}$ : constituye entonces un imán permanente.

Dadas las importantes aplicaciones de los materiales ferromagnéticos, realizaremos un estudio más detallado de las mismas en un apartado posterior.

## 20.2. Intensidad de imantación

En el apartado anterior se ha visto como, bajo determinadas condiciones, puede conseguirse que una porción de materia adquiera un momento magnético no nulo. Se dice entonces que la sustancia está imantada.

Se define el vector intensidad de imantación, o simplemente vector imantación, como el momento magnético por unidad de volumen

$$\vec{M} = \frac{d\vec{m}}{dv} \quad (20.1)$$

Las dimensiones de la imantación son

$$[\vec{M}] = [m]L^{-3} = IL^{-1}$$

y su unidad en el S.I. es el amperio/metro, que no tiene un nombre específico.

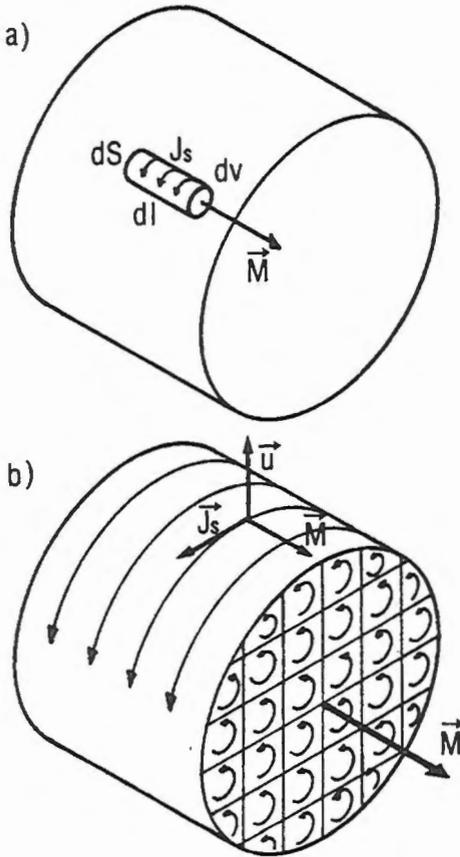


Fig. 20.2

Consideremos una porción de sustancia uniformemente imantada y un elemento de volumen en su interior, como el mostrado en la figura 20.2.a. Este cilindro diferencial es el asiento de un momento magnético  $d\vec{m} = \vec{M} dv$ .

Un momento magnético idéntico puede conseguirse si se sustituyen las corrientes atómicas por una corriente sobre la superficie lateral de  $dv$ , de densidad  $J_s$  (A/m). Esta corriente recibe el nombre de corriente equivalente de imantación.

Su relación con  $\vec{M}$  puede establecerse sin más que tener en cuenta que  $d\vec{m}$  es

$$d\vec{m} = \vec{M} dv = \vec{M} dS dl$$

para la sustancia imantada y

$$d\vec{m} = J_s dS dl \vec{u}_m$$

para la corriente superficial equivalente. Comparando las expresiones se deduce que

$$J_s = M \tag{20.2}$$

Si  $\vec{M}$  es uniforme, las corrientes equivalentes de los elementos de volumen adyacentes se cancelan (Fig. 20.2.b) de forma que no hay corriente efectiva en el interior del material imantado. En su superficie, por el contrario, aparece una corriente superficial perpendicular a  $\vec{M}$  y cuyo módulo es, según (20.2), igual a la proyección  $\vec{M}$  sobre el plano tangente a la superficie. Vectorialmente puede expresarse como

$$\vec{J}_s = \vec{M} \times \vec{u} \quad (20.3)$$

donde  $\vec{u}$  es el vector unitario normal a la superficie.

En el caso en que  $\vec{M}$  no sea uniforme hay que considerar, además corrientes equivalentes en volumen de densidad  $\vec{J}_v$  cuyo valor se demuestra que vale  $\vec{J}_v = \text{rot } \vec{M}$ .

Las corrientes equivalentes de imantación son corrientes “ligadas” en el sentido de que no suponen un flujo neto de cargas a través del medio. Sin embargo, crean en cada punto un campo magnético que sigue las mismas leyes que el creado por corrientes “libres” que circulan a través de un circuito.

En definitiva, a la hora de determinar el campo  $\vec{B}$  en presencia de materia, se deben considerar dos tipos de corrientes: las corrientes libres, asociadas al transporte de cargas libres a través de un conductor y las corrientes equivalentes, asociadas a la imantación de la materia. El campo  $\vec{B}$  en un punto cualquiera puede expresarse como

$$\vec{B} = \vec{B}_l + \vec{B}_e$$

donde  $\vec{B}_l$  sería la parte del campo debida a las corrientes de conducción en los conductores y  $\vec{B}_e$  el campo creado por las corrientes equivalentes de imantación.

Para que el problema quede resuelto es preciso determinar la imantación  $\vec{M}$  y su relación con las corrientes libres, para lo cual hay que considerar una nueva magnitud, la excitación magnética, que se define en el apartado siguiente.

### 20.3. *Excitación magnética. Susceptibilidad y permeabilidad magnéticas*

Se define el vector excitación magnética,  $\vec{H}$ , como

$$\vec{H} = \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \quad (20.4)$$

Evidentemente  $\vec{H}$  tiene las mismas dimensiones que la imantación. Se mide en A/m.

Si el punto considerado se encuentra en el vacío, entonces  $\vec{M} = \vec{0}$  y, por tanto,

$$\vec{H}_{\text{vacío}} = \frac{\vec{B}}{\mu_0}$$

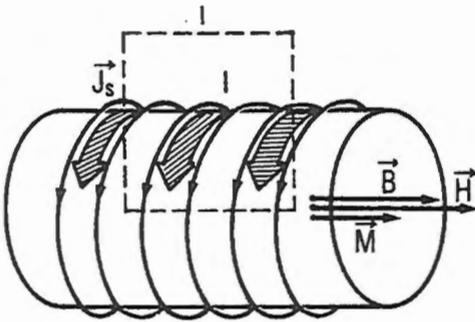


Fig. 20.3

El interés de operar con la excitación magnética en lugar de con la inducción magnética  $\vec{B}$ , radica en el hecho de que, mientras  $\vec{B}$  depende de las corrientes libres y equivalentes,  $\vec{H}$  está asociado únicamente a las corrientes libres. Para comprobarlo, consideremos un solenoide como el mostrado en la figura 20.3, con  $n$  espiras por unidad de longitud y recorrido por una corriente libre, de intensidad  $I$ . En su interior se coloca, por ejemplo, una barra de material paramagnético.

Calculemos la circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de la trayectoria punteada en la figura.

Si el solenoide es muy largo, puede admitirse que los vectores  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$  son uniformes en la región central del mismo y llevan la dirección de su eje. Fuera del solenoide dichos vectores son nulos.

La circulación de  $\vec{H}$  es, según (20.4)

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \oint \left( \frac{\vec{B}}{\mu_0} - \vec{M} \right) \cdot d\vec{l} \quad (20.5)$$

Pero, teniendo en cuenta que el teorema de Ampère, la circulación de  $\vec{B}$  a lo largo de la curva considerada es

$$\oint \vec{B} \cdot d\vec{l} = \mu_0 (nI \ell + J_s \ell) \quad (20.6)$$

donde  $J_s$  es la corriente equivalente de imantación asociada a la imantación  $\vec{M}$  de la barra, cuyo valor viene dado por la ecuación (20.2). Sustituyendo (20.6) y (20.2) en la ecuación (20.5) resulta

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = nI \ell \quad (20.7)$$

Es decir, la circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de una curva cerrada es igual a la corriente libre que atraviesa una superficie cuyo contorno sea la curva considerada. De forma general puede escribirse como

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{\text{libre}} \quad (20.7.a)$$

ecuación que constituye una generalización del teorema de Ampère que puede aplicarse para el cálculo de  $\vec{H}$  en presencia de materia. Teniendo en cuenta el teorema de Stokes, la expresión diferencial de la ecuación anterior es

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J}_{\text{libre}} \quad (20.7.b)$$

En definitiva, la expresión (20.7) pone de manifiesto que la circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de una curva cerrada depende únicamente de las corrientes libres, mientras que la circulación de  $\vec{B}$  está relacionada con todas las corrientes, las libres y las equivalentes.

Para que la determinación de los tres vectores  $\vec{B}$ ,  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  pueda ser completada, es preciso establecer una relación entre  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$ . Dicha relación depende del tipo de material y debe ser establecida de forma experimental en cada caso.

En una amplia gama de materiales existe una relación lineal entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ . Si el material es, además isótropo esta relación se escribe como

$$\vec{M} = \chi \vec{H} \quad (20.8)$$

donde  $\chi$  es una magnitud escalar sin dimensiones denominada **susceptibilidad magnética** de la sustancia.

En la mayor parte de las tablas de datos físicos no aparecen directamente las susceptibilidades magnéticas sino otra magnitud relacionada con ésta: la susceptibilidad magnética másica,  $\chi_m$ , que se define como

$$\chi_m = \frac{\chi}{\rho} \quad (20.9)$$

donde  $\rho$  es la densidad del material.

Una relación lineal entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  implica, a su vez, una relación similar entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ . En efecto, sustituyendo (20.8) en la definición (20.4) y operando resulta

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M}) = \mu_0 (1 + \chi) \vec{H} \quad (20.10)$$

y, llamando permeabilidad magnética del material,  $\mu$ , a

$$\mu = \mu_0 (1 + \chi) \quad (20.11)$$

se obtiene la relación existente entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  para materiales lineales e isótropos:

$$\vec{B} = \mu \vec{H} \quad (20.12)$$

Finalmente se define la permeabilidad magnética relativa como

$$\mu_r = \frac{\mu}{\mu_0} = 1 + \chi \quad (20.13)$$

En las sustancias **diamagnéticas** la imantación  $\vec{m}$  y la excitación magnética  $\vec{H}$  tienen sentidos opuestos, por lo que la susceptibilidad magnética es **negativa**. Puesto que el diamagnetismo tiene su origen en propiedades internas del átomo, que no se ven afectadas por la temperatura, la susceptibilidad magnética de estas sustancias es independiente de la temperatura.

En el caso de las sustancias **paramagnéticas**, la excitación aplicada y la imantación tienen el mismo sentido. Por tanto la susceptibilidad magnética es **positiva**. Puesto que la imantación se produce por orientación de los dipolos magnéticos y ésta se ve afectada por la temperatura, la susceptibilidad magnética de una sustancia paramagnética es una función de la temperatura. Dicha función queda reflejada en la relación de Weiss-Curie.

$$\chi_m (T - T_c) = Cte \quad (20.14)$$

donde  $T$  es la temperatura absoluta y  $T_c$  es una temperatura característica del material denominada temperatura de Curie.

En cualquier caso, las susceptibilidades magnéticas de las sustancias dia o paramagnéticas son, en valor absoluto, mucho menores que la unidad  $|\chi| \ll 1$ .

Por tanto, la permeabilidad magnética de una sustancia diamagnética es ligeramente inferior a la del vacío, siendo su permeabilidad relativa algo menor que uno.

Las sustancias paramagnéticas tienen una permeabilidad magnética algo mayor que la del vacío, y una permeabilidad relativa ligeramente superior a uno.

Resumiendo:

$$\begin{array}{l} \text{Diamagnetismo} \quad \chi < 0 \quad \text{con} \quad |\chi| \ll 1 \\ \mu < \mu_0 \\ \mu_r < 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \text{Paramagnetismo} \quad \chi > 0 \quad \text{con} \quad |\chi| \ll 1 \\ \mu > \mu_0 \\ \mu_r > 1 \end{array}$$

Las sustancias ferromagnéticas constituyen una clase aparte de material magnético. En ellas la relación entre  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$  no sólo no es lineal, sino que ni siquiera es unívoca.

Por tanto, las ecuaciones (20.8) y (20.12) no deben aplicarse sin tener en cuenta que  $\chi$  y  $\mu$  no son constantes. Este tipo de sustancias serán estudiadas más adelante.

Ejemplo 20.1

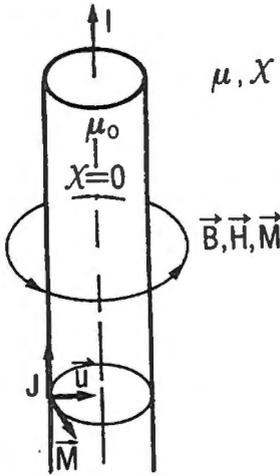


Fig. 20.4

Un cable cilíndrico de radio  $R$  y longitud infinita transporta una corriente  $I$ . El cable se encuentra situado en el interior de un medio paramagnético, isótropo y homogéneo de susceptibilidad magnética  $\chi$ . Suponiendo que la susceptibilidad del cable es nula, calcular:

- a) Excitación magnética.
- b) Imantación.
- c) Corriente equivalente de imantación sobre la superficie del cilindro.
- d) Inducción magnética  $B$ .

**Solución:**

Dada la simetría del problema, las líneas de campo de  $\vec{B}$ ,  $\vec{H}$  y  $\vec{M}$  son circunferencias con centro en el eje del cilindro y perpendiculares al mismo.

- a) Calculemos  $H(r)$  a partir del teorema de Ampère. Así, la circulación  $\vec{H}$  a lo largo de una línea de campo es

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = 2\pi r H$$

a.1. Si  $r \leq R$ , entonces dicha circulación es igual a

$$2\pi r H = \frac{I}{\pi R^2} \pi r^2$$

y, despejando  $H$  resulta

$$H = \frac{I r}{2\pi R^2} \quad r < R$$

a.2. Si  $r \geq R$ , entonces

$$2\pi r H = I$$

Por tanto

$$H = \frac{I}{2\pi r}$$

b) Una vez calculado  $H(r)$  puede obtenerse  $\vec{M}$  a partir de la relación (20.8). Así

$$M = 0 \quad \text{para } r < R$$

$$M = \chi H = \frac{\chi I}{2\pi r} \quad \text{para } r > R$$

c) La densidad de corriente equivalente sobre la superficie del cable es

$$\vec{J}_s = \vec{M}(R) \times \vec{u}$$

siendo su dirección la del eje del cilíndrico y su sentido el mismo que el de la corriente libre. Su módulo es

$$J_s = M(R) = \frac{\chi I}{2\pi R}$$

La intensidad de corriente equivalente es, por tanto

$$I_s = J_s 2\pi R = \chi I$$

d) La inducción magnética  $\vec{B}$  puede calcularse a partir de la expresión (20.4)

$$\vec{B} = \mu_0 (\vec{H} + \vec{M})$$

por tanto

d.1. Para  $r < R$

$$B(r) = \mu_0 H = \frac{\mu_0 I r}{2\pi R^2}$$

d.2. Para  $r > R$

$$B(r) = (\chi + 1) \frac{\mu_0 I}{2\pi r} = \frac{\mu I}{2\pi r}$$

Obsérvese que el cálculo de  $\vec{B}$  podría haberse realizado como el correspondiente al vacío, pero sustituyendo en cada medio la permeabilidad del vacío por la correspondiente a dicho medio.

El campo  $\vec{B}$  presenta una discontinuidad de valor

$$\Delta B = \frac{\mu_0 \chi I}{2\pi R}$$

al pasar de un medio a otro. Dicha discontinuidad aparece como consecuencia de la distribución superficial de corriente debida a la imantación del medio.

## 20.4. Ferromagnetismo

### 20.4.1. Ciclo de histéresis

Como se ha indicado anteriormente, las sustancias ferromagnéticas se caracterizan porque pueden presentar una imantación permanente, como consecuencia de la tendencia de los momentos magnéticos atómicos o moleculares a orientarse en la misma dirección.

Entre las propiedades más significativas de los materiales ferromagnéticos cabe destacar las siguientes:

- a) La relación entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$ , y por tanto la relación  $\vec{B}(\vec{H})$ , no es lineal. Esta propiedad puede representarse indicando que la susceptibilidad y la permeabilidad magnética dependen de la excitación magnética:

$$\mu = \mu(H) \qquad \chi = \chi(H)$$

- b) La permeabilidad magnética relativa puede tomar una amplia gama de valores en función de la excitación magnética. En muchos materiales se alcanzan valores del orden de  $10^4$  (en las sustancias para o diamagnéticas  $\mu_r$  es muy cercana a la unidad).
- c) Se presentan fenómenos de histéresis, de forma que tanto  $\chi(H)$  como  $M(H)$  no son relaciones unívocas, dependiendo sus valores de la historia magnética del material, es decir, de los tratamientos previos a los que haya sido sometido.
- d) Como consecuencia de la histéresis, la imantación de una muestra ferromagnética persiste después que haya cesado la excitación que la originó.

Para estudiar la relación existente entre  $\vec{M}$  y  $\vec{H}$  consideremos una muestra de sustancia ferromagnética, inicialmente desimantada, y sometida a una excitación magnética creciente. La curva  $M(H)$  que se obtiene experimentalmente es de la forma mostrada en la figura 20.5 y recibe el nombre de curva de primera imantación.

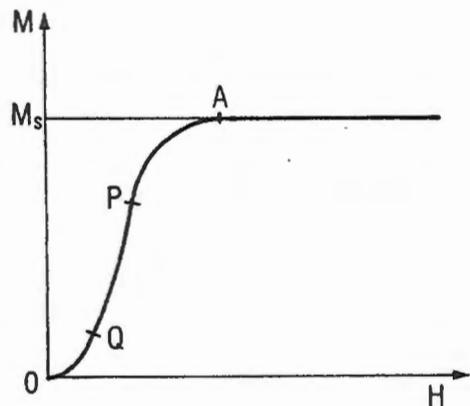


Fig. 20.5

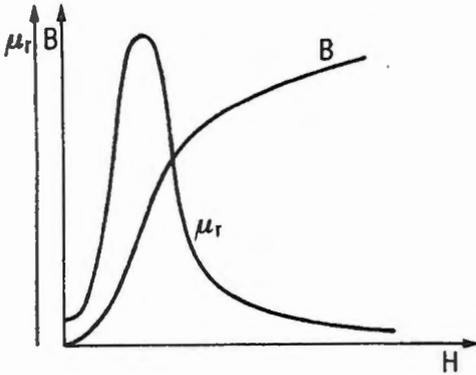


Fig. 20.6

Obsérvese que, para valores bajos de la excitación, la imantación crece muy rápidamente. Sin embargo, a partir del punto P la pendiente de la curva decrece, de forma que para valores altos de la excitación, la imantación no sobrepasa un valor dado, denominado imantación de saturación. En la figura 20.6, se muestran las curvas  $\bar{B}(H)$  y  $\mu_r(H)$  correspondientes a la primera imantación de un material ferromagnético.

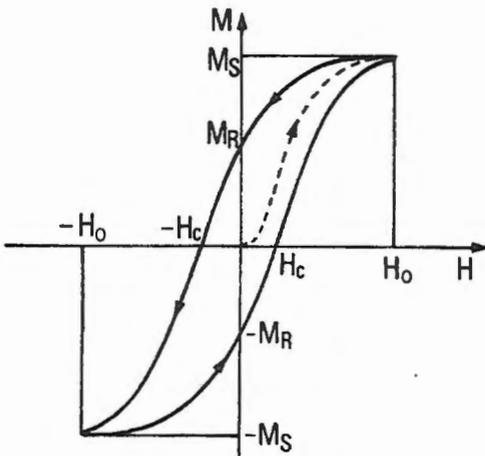


Fig. 20.7

Si una vez alcanzada la imantación de saturación se disminuye la excitación magnética, la imantación disminuye. Sin embargo, se observa (Fig. 20.7) que para cada valor de  $H$ , la imantación toma valores superiores a los obtenidos durante la primera imantación. Concretamente, para un valor nulo de la excitación, la muestra conserva una imantación denominada imantación remanente  $M_R$ , que puede hacerse desaparecer disminuyendo la excitación hasta un valor  $-H_c$ , en sentido

contrario al campo inicial.  $H_c$  recibe el nombre de excitación coercitiva.

Si la muestra se somete a un campo  $H$  que varía alternativamente entre  $+H_0$  y  $-H_0$ , al cabo de un cierto número de oscilaciones la curva  $M(H)$  realiza un ciclo denominado ciclo de histéresis (Fig. 20.7). La existencia de imanes permanentes queda, pues, justificada a partir del fenómeno de histéresis.

La realización del ciclo de histéresis en un material ferromagnético exige un aporte de energía eléctrica que se disipa en forma de calor. Esta energía es proporcional al volumen de la muestra y al área encerrada en dicho ciclo.

### *20.4.2. Teoría de los dominios magnéticos*

El comportamiento peculiar de los materiales ferromagnéticos puede ser explicado a partir de la denominada teoría de los dominios, propuesta por Weiss en 1907 y completada por Heisenberg en 1928.

Así, en las sustancias ferromagnéticas, los momentos magnéticos atómicos o moleculares son distintos de cero. Sin embargo, y a diferencia de lo que sucede en los materiales paramagnéticos, en una sustancia ferromagnética dichos momentos no están orientados al azar sino que presentan una fuerte tendencia a orientarse en la misma dirección. De esta forma, en un cristal ferromagnético existen pequeñas regiones de un tamaño muy reducido, denominadas dominios, en las que los momentos magnéticos atómicos tienen idéntica orientación, de manera que la imantación de un dominio es distinta de cero incluso en ausencia de una excitación exterior. Hay que señalar que las direcciones de imantación de los dominios de un cristal no son aleatorias, sino que dependen de la estructura cristalina. Así, los dominios presentan imantación únicamente en unas pocas direcciones denominadas direcciones de fácil imantación.

Si bien cada dominio tiene una imantación no nula, en una porción macroscópica de material ferromagnético existen numerosos cristales, y en cada uno de ellos varios dominios imantados en direcciones y sentidos opuestos, de forma que los momentos magnéticos de unos dominios se compensan con los de otros y el material puede aparecer globalmente desimantado.

Supongamos un pequeño trozo de sustancias ferromagnéticas como el esquematizado en la figura 20.8.a, que inicialmente tiene cuatro dominios. En este modelo hay dos direcciones de fácil imantación y la imantación resultante es nula.

Al aplicar una excitación exterior  $\vec{H}$ , las paredes de dominio cuya imantación tiene una orientación más próxima a las de  $\vec{H}$  se desplazan (Fig. 20.8.b) de forma que este dominio crece a expensas de los otros, adquiriendo el material una imantación neta distinta de cero.

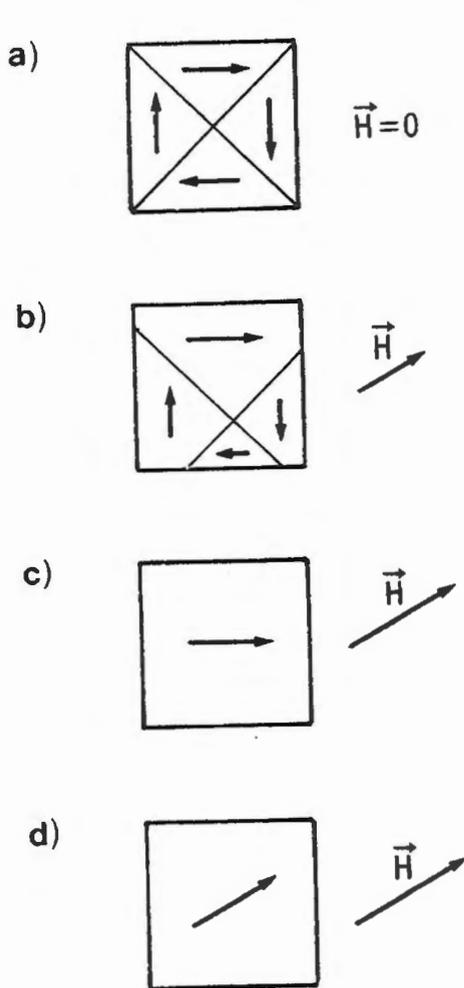


Fig. 20.8

primera imantación). Entonces la sustancia se encuentra saturada y la imantación no crece aunque se siga aumentando la excitación.

Al disminuir la excitación, la curva  $M(H)$  no se confunde con la inicial, ya que el proceso no es reversible.

La temperatura influye en el grado de orientación de los momentos atómicos. Así, a temperaturas muy bajas, la alineación que se consigue es prácticamente

Si la excitación aplicada es débil, este corrimiento de las fronteras es casi reversible, y al suprimir  $\vec{H}$  se volvería a la situación inicial (tramo OQ de la figura 20.5).

Ahora bien, si se aumenta el valor de la excitación exterior, el proceso de imanatación deja de ser reversible y, además del desplazamiento de las paredes de los dominios, se producen cambios bruscos en las orientaciones de algunos dominios (saltos de Barkhausen) creciendo notablemente la imanatación global del cristal con pequeños cambios de la excitación  $\vec{H}$  (tramo QP de la curva de primera imantación). Este proceso continua hasta que todos los dominios estan orientados en la dirección de fácil imanatación más próxima a la de  $\vec{H}$ , desapareciendo las paredes (Fig. 20.8.c).

Si se sigue aumentando la excitación, los momentos atómicos giran hasta situarse paralelamente a  $\vec{H}$ , tal como se muestra en la figura 20.8.d (tramo PA en la curva de

perfecta. Por el contrario, al elevarse la temperatura, la agitación térmica se opone cada vez más a la alineación de los momentos magnéticos atómicos. A partir de un cierto valor de la temperatura absoluta, el punto de Curie, el material se comporta como paramagnético.

### 20.5. Circuitos magnéticos

Sea un circuito cerrado como el mostrado en la figura 20.9, formado por un material ferromagnético de muy alta permeabilidad magnética y con una bobina enrollada a él, de  $N$  vueltas, que transporta una corriente  $I$ . Dada la alta permeabilidad del material ferromagnético, puede demostrarse que éste constituye un tubo de líneas del campo  $\vec{B}$ , de forma que el flujo magnético es constante en cualquiera de las secciones del circuito. Tal dispositivo se denomina **circuito magnético**.

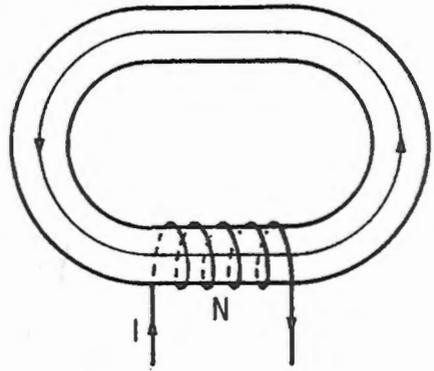


Fig. 20.9

Estudiemos la relación existente entre la corriente  $I$  y el flujo magnético producida por la misma. Aplicando el teorema de Ampère a una línea de campo se obtiene que

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = NI$$

Por otra parte, el flujo magnético a través de una sección cualquiera es

$$\phi = B \cdot S = \mu HS$$

y, despejando el valor de  $H$  y sustituyéndolo en la ecuación anterior, se obtiene

$$\phi \oint \frac{dl}{\mu S} = NI \tag{20.15}$$

Al factor

$$\oint \frac{dl}{\mu S}$$

se le denomina reluctancia del circuito, mientras que al producto  $NI$  se llama fuerza magnetomotriz  $F$ . Por tanto, la expresión (20.15) puede escribirse como

$$\phi R = F \tag{20.16}$$

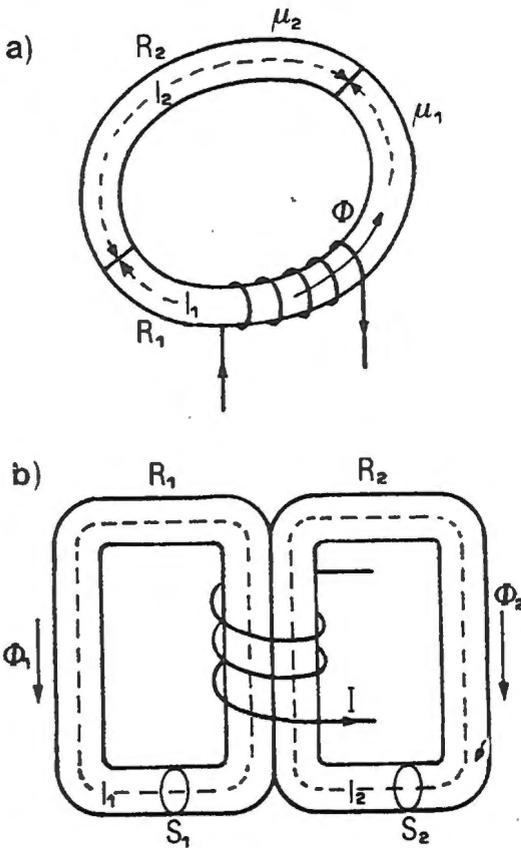


Fig. 20.10

ecuación que recibe el nombre de ley de Hopkinson y que resulta ser formalmente similar a la ley de Ohm en un circuito eléctrico: el flujo es análogo a la intensidad de corriente, la reluctancia a la resistencia y la fuerza magnetomotriz es análoga a la fuerza electromotriz.

Un circuito magnético puede estar formado por reluctancias asociadas en serie o en paralelo (Fig. 20.10). Teniendo en cuenta la analogía formal existente entre las leyes de Hopkinson y de Ohm, es de esperar que las leyes de asociación de reluctancias sean análogas a las de asociación de resistencias.

En efecto, consideremos un circuito magnético formado por dos tramos de reluctancias  $R_1$  y  $R_2$  respectivamente (Fig. 20.10.a) y con una fuerza magnetomotriz  $F = NI$ . La aplicación del teorema de Ampère da lugar a

$$\oint \vec{H} \cdot d\vec{l} = \int_{l_1} \vec{H}_1 \cdot d\vec{l}_1 + \int_{l_2} \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = NI$$

Por otra parte, las excitaciones en cada tramo son

$$H_1 = \frac{\phi}{\mu_1 S_1}; \quad H_2 = \frac{\phi}{\mu_2 S_2}$$

valores que sustituidos en la expresión anterior la transforman en

$$\phi \left[ \int_{l_1} \frac{dl_1}{\mu_1 S_1} + \int_{l_2} \frac{dl_2}{\mu_2 S_2} \right] = F = NI$$

o bien

$$\phi (R_1 + R_2) = F \tag{20.17}$$

Comparando la ecuación (20.17) con la (20.16) resulta evidente que

$$R = R_1 + R_2 \tag{20.18}$$

es decir, la reluctancia equivalente a una asociación de reluctancias en serie es igual a la suma de éstas.

Consideremos ahora el circuito magnético de la figura 20.10.b, con dos reluctancias,  $R_1$  y  $R_2$ , en paralelo. Aplicando el teorema de Ampère a cada circuito se obtiene que

$$\oint \vec{H}_1 \cdot d\vec{l} = H_1 I_1 = NI$$

$$\oint \vec{H}_2 \cdot d\vec{l}_2 = H_2 I_2 = NI$$

Por otra parte, el flujo total es

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 = \mu_1 S_1 H_1 + \mu_2 S_2 H_2$$

y, sustituyendo en ésta los valores de  $H_1$  y  $H_2$  dados por las ecuaciones anteriores, resulta

$$\phi = NI \left( \frac{\mu_1 S_1}{l_1} + \frac{\mu_2 S_2}{l_2} \right) = NI \left( \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) \quad (20.19)$$

de donde se deduce que

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \quad (20.20)$$

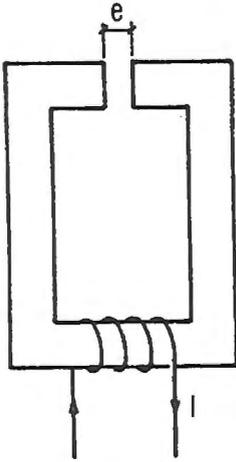


Fig. 20.11

es decir, la inversa de la reluctancia equivalente a una asociación de reluctancias en paralelo es igual a la suma de las inversas de éstas.

Un caso muy frecuente de circuito magnético es aquel en el que se ha practicado un entrehierro muy pequeño, tal como se muestra en la figura 20.11.

Sea  $e$  el espesor del entrehierro y  $S_e$  la sección del circuito. Si  $e$  es muy pequeño frente a las dimensiones de la sección, puede considerarse que la sección efectiva del entrehierro es del mismo orden que la del circuito magnético, y que las pérdidas de flujo a través del entrehierro son pequeñas. En estas condiciones, el entrehierro es una porción del circuito de reluctancia

$$R_e = \frac{e}{\mu_0 S_e}$$

La reluctancia del resto del circuito es

$$R_c = \frac{l_c}{\mu S_c}$$

donde  $l_c$  y  $S_c$  son, respectivamente, la longitud y sección del resto del circuito.

La reluctancia equivalente es

$$R = R_e + R_c = \frac{e}{\mu_o S_e} + \frac{l_c}{\mu S_c}$$

y el flujo

$$\phi = \frac{F}{R} = NI / \left[ \frac{e}{\mu_o S_e} + \frac{l_c}{\mu S_c} \right]$$

Finalmente, el campo B en el entrehierro es

$$B_e = \frac{\phi}{S_e} = NI / \left[ \frac{e}{\mu_o} + \frac{l_c S_e}{\mu S_c} \right]$$

## 20.6. Densidad de energía del campo magnético

En el apartado 19.5 se calculó la densidad de energía del campo magnético, cuyo valor en el vacío está dado por la expresión

$$w = \frac{1}{2\mu_o} B^2$$

Teniendo en cuenta la relación existente entre  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$  en el vacío, la expresión anterior puede transformarse en

$$w = \frac{1}{2} \vec{H} \cdot \vec{B} \tag{20.21}$$

ecuación que, si bien se ha obtenido para el vacío, es de validez general.

Si el material considerado es lineal e isótropo, la ecuación (20.1) puede escribirse, teniendo en cuenta la (20.12), en la forma

$$w = \frac{1}{2} \mu H^2 = \frac{1}{2\mu} B^2 \tag{20.22}$$

Consideremos un circuito magnético de longitud  $l$  y sección  $S$ . La energía almacenada en el mismo es

$$W = w S l = \frac{1}{2} B H S l$$

Teniendo en cuenta que  $\phi = B S$  y que  $N I = H l$ , se obtiene que

$$W = \frac{1}{2} N I \phi$$

y, a partir de la ley de Hopkinson, resulta

$$W = \frac{1}{2} R \phi^2 \tag{20.23}$$

Expresión que nos dá la energía magnética total almacenada en un medio en función del flujo magnético y de la reluctancia.

## PROBLEMAS

- P.20.1. Un tubo de ferrita, muy largo, cilíndrico, con radios interior y exterior  $a$  y  $b$ , respectivamente, se encuentra imantado uniformemente en la dirección de su eje. Calcular  $B$  en el eje del tubo.

### *SOLUCIÓN*

$$B = 0$$

- P.20.2. Sea un tubo cilíndrico, muy largo, de radios interior y exterior  $b$  y  $c$ , respectivamente, constituido por un material paramagnético de susceptibilidad  $\chi$ . En el eje del tubo hay un hilo conductor de radio  $a$  que transporta una corriente  $I$ . Calcular:

- a) Corrientes equivalentes de imantación en las caras del tubo.  
 b) Campo magnético  $B$  para  $b < r < c$  y  $r > c$ .

### *SOLUCIÓN*

- a)  $J_S = \chi I / 2\pi b$ , paralela y en el mismo sentido  $I$  en la cara interior.

$$J_S = \chi I / 2\pi c, \text{ paralela y en sentido opuesto a } I \text{ en la cara exterior.}$$

- b)  $B = \mu_0 (1 + \chi) I / 2\pi r$  para  $b < r < c$

$$B = \mu_0 I / 2\pi r \quad \text{para } r > c$$

P.20.3. Sea una barra cilíndrica de radio  $R$  y longitud  $l$ , con  $(l \gg R)$ . imantada uniformemente con una imantación  $\vec{M}$  paralela a su eje. Calcular  $\vec{B}$  y  $\vec{H}$ :

a) Sobre el eje del imán en su centro.

b) Sobre el eje del imán en una cara.

(Sugerencia: Calcular  $\vec{B}$  a partir de las corrientes equivalentes de imantación y  $\vec{H}$  a partir de  $\vec{B}$  y de  $\vec{M}$ ).

### SOLUCIÓN

a)  $\vec{B} = \mu_0 \vec{M}; \quad \vec{H} = \vec{0}$

b)  $\vec{B} = \mu_0 \vec{M} / 2; \quad \vec{H} = -\vec{M} / 2$  dentro del imán  
 $\vec{H} = +\vec{M} / 2$  fuera

P.20.4. Sea una bobina de  $N$  espiras muy apretadas, enrolladas en un circuito magnético de reluctancia  $R$ . Demostrar que el coeficiente de autoinducción de la bobina vale  $L = N^2 / R$ .

P.20.5. Alrededor de un anillo de hierro dulce de sección transversal  $S$  y longitud media  $l$ , se enrollan sendas bobinas con  $N_1$  y  $N_2$  espiras. Suponiendo que la permeabilidad del hierro es  $\mu$ . Calcular:

a) Coeficiente de autoinducción de cada bobina.

b) Coeficiente de inducción mutua.

c) Coeficiente de acoplamiento.

**SOLUCIÓN**

- a)  $L_1 = \mu N_1^2 S / l$ ;                       $L_2 = \mu N_2^2 S / l$
- b)  $M = \mu N_1 N_2 S / l$
- c)  $k = 1$

P.20.6. Sea un anillo de hierro dulce, de sección transversal  $S = 30 \text{ cm}^2$  y con un entrehierro de espesor  $e = 1 \text{ cm}$ . La longitud media del anillo es de  $l = 100 \text{ cm}$  y su permeabilidad magnética  $\mu_r = 1000$ . Alrededor del anillo hay enrollada una bobina con  $N = 10000$  vueltas, por la que circula una corriente de  $1.5 \text{ A}$ . Despreciando las fugas en el entrehierro, calcular:

- a) Flujo magnético a través de una sección del anillo.
- b) Campo B en el entrehierro.
- c) Autoinducción de la bobina.
- d) Energía almacenada.

**SOLUCIÓN**

- a)  $\phi = 5.14 \cdot 10^{-3} \text{ Wb}$
- b)  $B = 1.71 \text{ T}$
- c)  $L = 34.3 \text{ H}$
- d)  $W = 38.6 \text{ J}$



# CAPÍTULO 21

## ECUACIONES DE MAXWELL

### *21.1. Introducción*

Los capítulos precedentes han sido dedicados al estudio de las leyes básicas del electromagnetismo y al desarrollo de algunas aplicaciones importantes. En el presente capítulo se completan estas leyes y se pone de manifiesto la estrecha relación existente entre los campos eléctricos y magnéticos.

Así, en el capítulo 19 se muestra como todo campo magnético variable lleva asociado un campo eléctrico no conservativo cuyo valor puede ser obtenido a partir de la ley de Faraday. Ahora bien, como veremos más adelante, esta relación es recíproca y la presencia de un campo eléctrico variable conlleva la existencia de un campo magnético que no está asociado a corrientes de conducción. Será, por tanto, necesario modificar la ley de Ampère para el caso de regímenes variables y obtener una ley más general que incluya a aquella como un caso particular.

A partir de esta modificación quedarán completas las cuatro leyes fundamentales del electromagnetismo, denominadas ecuaciones de Maxwell por ser este científico quien postuló la generalización de la ley de Ampère y sintetizó la teoría del campo electromagnético de dichas ecuaciones.

### *21.2. Conservación de la carga. Ecuación de continuidad*

En el capítulo 11 se estableció el principio de conservación de la carga eléctrica: “La carga total de un sistema aislado permanece constante”.

Este principio, que resulta compatible con todos los experimentos realizados hasta la actualidad, puede ser ampliado al caso de sistemas abiertos como sigue: “La carga ni se crea ni se destruye”. Por tanto, en un sistema abierto, la variación neta de carga es igual a la carga que entra menos la carga que sale.

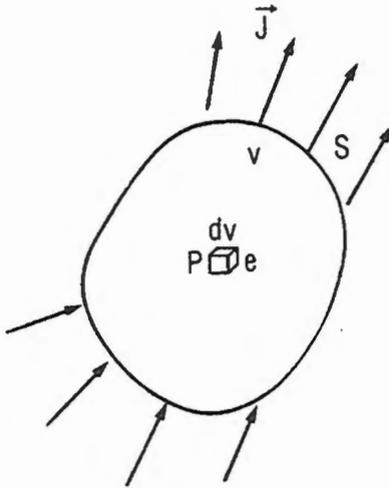


Fig. 21.1

Consideremos una región del espacio en la que existe una corriente eléctrica caracterizada por el campo de densidades de corriente  $\vec{J}(x, y, z, t)$ . La distribución espacial de cargas viene dada por el campo escalar de densidad de carga  $\rho(x, y, z, t)$ . Sea  $S$  una superficie que encierra en su interior un volumen  $v$  (Fig. 21.1). La carga neta encerrada en  $S$  es, según la definición de densidad de carga

$$Q = \iiint_v \rho \, dv$$

Puesto que  $\rho$  es, en general variable,  $Q$  también lo es, y la variación de carga en la unidad de tiempo es

$$\frac{dQ}{dt} = \iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv$$

ya que se admite que  $S$  permanece fija en el espacio.

Por otra parte, la carga neta que escapa de  $S$  en la unidad de tiempo es, según la definición de densidad de corriente,

$$\frac{dQ}{dt} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S}$$

Y, teniendo en cuenta el principio de conservación de la carga, la carga neta que sale a través de  $S$  es igual a la disminución de carga en  $v$ , es decir

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\iiint_v \frac{\partial \rho}{\partial t} \, dv \tag{21.1}$$

que constituye la expresión, en forma integral, del principio de conservación de la carga.

A partir del teorema de la divergencia, el primer miembro de la ecuación (21.1) puede escribirse como

$$\iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \operatorname{div} \vec{J} \, dv$$

y, teniendo en cuenta que la misma ha de cumplirse para cualquier superficie cerrada, se deduce que

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (21.2)$$

ecuación que representa la expresión diferencial de la ley de conservación de la carga.

La (21.2) recibe el nombre de ecuación de continuidad.

Obsérvese que si el régimen de corriente es estacionario, entonces todas las magnitudes relacionadas con ella son independientes del tiempo, y la ecuación de continuidad se transforma en

$$\operatorname{div} \vec{J} = 0 \quad (21.3)$$

Por tanto la divergencia  $\vec{J}$  sólo puede tomar valores no nulos en regímenes variables

### ***21.3. Ecuación de Ampère-Maxwell. Corriente de desplazamiento***

Consideremos una situación similar a la mostrada en la figura 21.1: un medio material en el que se ha establecido una corriente eléctrica de densidad  $\vec{J}$ . Como consecuencia de dicha corriente aparece un campo magnético de excitación  $\vec{H}$ . Si  $\vec{J}$  es independiente del tiempo, este campo verificará la ley de Ampère que, en forma diferencial, se escribe como

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} \quad (21.4)$$

donde  $\vec{J}$  es la densidad de corriente libre, debida al movimiento de cargas libres a través del material.

Ahora bien, si el régimen es variable, la ecuación de continuidad resulta incompatible con el teorema de Ampère. En efecto, si se calcula la divergencia de los dos miembros de dicha ecuación resulta

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = \operatorname{div} \vec{J}$$

pero, según puede comprobarse directamente, la divergencia del rotacional de un campo vectorial cualquiera es nula, con lo cual

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0$$

mientras que, según la ecuación de continuidad, la divergencia de  $\vec{J}$  es

$$\operatorname{div} \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

cuyo valor puede ser distinto de cero si el régimen es variable. Por tanto se obtiene que, en general

$$\operatorname{rot} \vec{H} \neq \vec{J}$$

es decir, la ley de Ampère, tal como se obtuvo en los capítulos 18 y 20, sólo es aplicable al caso de regímenes independientes del tiempo.

Fue el científico J.C. Maxwell quien, en la segunda mitad del siglo pasado, postuló una modificación de la ley de Ampère que resulta a la vez válida para regímenes variables y compatible con la ecuación de continuidad. Este postulado queda reflejado en la modificada ecuación de Ampère-Maxwell:

$$\operatorname{rot} \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (21.5)$$

donde  $\vec{D}$  es el desplazamiento eléctrico en el punto considerado.

Comprobemos que, en efecto la ecuación (21.5) es compatible con la conservación de la carga. Para ello calculemos la divergencia de sus dos miembros

$$\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H}) = 0 = \operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D})$$

Ahora bien, teniendo en cuenta la expresión diferencial del teorema de Gauss,  $\operatorname{div} \vec{D} = \rho$ , es

$$\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = \frac{\partial \rho}{\partial t}$$

con lo que, en definitiva

$$\operatorname{div} \vec{J} + \frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{div} \vec{D}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0 = \operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{H})$$

comprobándose la validez formal de la ecuación (21.5).

Hay que señalar que la ecuación de Ampère-Maxwell es un postulado que se admite como principio. Su validez ha sido aceptada en la medida en que todas las experiencias realizadas hasta la fecha han resultado compatibles con ella.

El término  $\partial \vec{D} / \partial t$  tiene dimensiones de densidad de corriente y recibe el nombre de **densidad de corriente de desplazamiento**. Obsérvese la diferencia existente entre  $\vec{J}$ , que representa una corriente de conducción asociada al movimiento de cargas, y  $\partial \vec{D} / \partial t$  que está asociada a la existencia de un campo eléctrico variable pero que no implica el movimiento de cargas. No obstante, ambas "corrientes" producen un campo magnético dado por (21.5).

La expresión integral de la ley de Ampère-Maxwell puede obtenerse sin más que aplicar el teorema de Stokes. Sea  $C$  una curva cerrada y  $S$  una superficie cualquiera limitada por  $C$ . La circulación de  $\vec{H}$  a lo largo de  $C$  es, según el teorema de Stokes

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \operatorname{rot} \vec{H} \cdot d\vec{S} = \iint_S \vec{J} \cdot d\vec{S} + \iint_S \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S}$$

es decir

$$\int \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_S \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (21.6)$$

Hay que recalcar la importancia de estas ecuaciones ya que ponen de manifiesto la posibilidad de generar un campo magnético a partir de un campo eléctrico variable. La ecuación de Ampère-Maxwell incluye como caso particular a la ley de Ampère cuando el campo eléctrico es independiente del tiempo (régimen estacionario) o cuando las corrientes de desplazamiento son despreciables frente a las de conducción. En este último caso el régimen se llama cuasiestacionario.

### Ejemplo 21.1

Sea un material de conductividad  $\sigma$  y permitividad relativa  $\epsilon_r$ . En su interior se ha establecido un campo eléctrico de la forma  $\vec{E} = \vec{E}_0 \text{ sen } 2\pi f t$ . Calcular :

- Las densidades de corriente de desplazamiento.
- Determinar la frecuencia  $f$  a partir de la cual la densidad de corriente de desplazamiento supera a la de conducción.

#### Aplicación numérica:

Germanio intrínseco con  $\sigma = 2'13 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$  y  $\epsilon_r = 15'7$

#### Solución:

- La corriente de conducción puede obtenerse a partir de la Ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} = \sigma \vec{E}_0 \text{ sen } 2\pi f t$$

La densidad de corriente de desplazamiento es

$$\frac{\partial \vec{D}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \epsilon_0 \epsilon_r 2\pi f \vec{E}_0 \cos 2\pi f t$$

Como se ve, el valor máximo de  $J$  es independiente de la frecuencia (se admite que  $\sigma$  es una constante), mientras que la densidad de corriente de desplazamiento es proporcional a la frecuencia. Teniendo en cuenta el pequeño valor de  $\epsilon_0$ , es de esperar que la corriente de desplazamiento sólo sea importante a frecuencias muy elevadas.

- b) Las corrientes de desplazamiento y de conducción se igualan para la frecuencia  $f_D$  que cumpla que

$$\sigma \bar{E}_0 = 2\pi f_D \epsilon_0 \epsilon_r \bar{E}_0$$

de donde

$$f_D = \frac{\sigma}{2\pi \epsilon_0 \epsilon_r}$$

Como vemos, la frecuencia a partir de la cual  $\partial \bar{D} / \partial t$  supera a  $\bar{J}$  aumenta con la conductividad del material y disminuye con la permitividad. Concretamente, para el Ge intrínseco

$$f_D = \frac{2'13}{2\pi \epsilon_0 \cdot 15'7} = 2'4 \cdot 10^3 \text{ Hz} = 2'4 \text{ G Hz}$$

Es decir, en este caso, y salvo para frecuencias muy altas, pueden despreciarse las corrientes de desplazamiento frente a las de conducción.

## 21.4. Ecuaciones de Maxwell

Con la ecuación de Ampère-Maxwell quedan establecidas las leyes fundamentales del campo electromagnético. Dichas leyes se expresan mediante cuatro ecuaciones que reciben el nombre de ecuaciones de Maxwell, por ser este científico quien formuló la cuarta de ellas, y dedujo la existencia de ondas electromagnéticas como consecuencia de estas ecuaciones. Las expresiones diferenciales de las ecuaciones de Maxwell son

$$\text{div } \bar{D} = \rho \tag{21.7}$$

$$\text{div } \bar{B} = 0 \tag{21.8}$$

$$\text{rot } \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21.9)$$

$$\text{rot } \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (21.10)$$

La (21.7) no es más que la expresión diferencial del teorema de Gauss, que fue deducido para el caso de campos electrostáticos a partir de la ley de Coulomb.

La ecuación (21.8) expresa la no existencia de cargas magnéticas aisladas, tal como se indicó en el capítulo 18.

La ecuación (21.9) es la expresión diferencial de la ley de Faraday y, finalmente, la (21.10) es la ecuación Ampère-Maxwell que ha sido introducida en el apartado anterior.

A partir de los teoremas de la divergencia y de Stokes respectivamente, las ecuaciones (21.7) a (21.10) pueden tomar la forma integral siguiente:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \iiint_V \rho \, dv \quad (21.11)$$

$$\iiint_S \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0 \quad (21.12)$$

$$\int_C \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \iint_{S'} \vec{B} \cdot d\vec{S} \quad (21.13)$$

$$\int_C \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{S'} \left( \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \cdot d\vec{S} \quad (21.14)$$

donde  $S$  es una superficie cerrada que rodea al volumen  $v$  y  $S'$  es una superficie cualquiera cuyo contorno es la curva cerrada  $C$ .

Hay que señalar que el estudio del electromagnetismo podía haberse realizado a partir de las cuatro ecuaciones de Maxwell, aceptándolas como principios y deduciendo los campos eléctricos y magnéticos creados en cada una de las situaciones

particulares estudiadas en los capítulos anteriores. Por razones didácticas se ha optado por el método tradicional, estableciendo progresivamente cada una de las ecuaciones a partir de resultados experimentales.

### 21.5. Energía electromagnética. Vector de Poynting

En el capítulo 14 se definió la densidad de energía electrostática  $w_E$  como

$$w_E = \frac{1}{2} \vec{E} \cdot \vec{D}$$

Del mismo modo, en el capítulo 20 se estableció que la densidad de energía asociada a un campo magnético es

$$w_B = \frac{1}{2} \vec{B} \cdot \vec{H}$$

En definitiva, la densidad de energía almacenada en un punto de un campo electromagnético es

$$w = \frac{1}{2} (\vec{E} \cdot \vec{D} + \vec{B} \cdot \vec{H}) \quad (21.15)$$

Admitiéndose que dicha expresión es aplicable incluso cuando los campos que en ella aparecen son variables, estudiemos cual es la variación de energía almacenada en función del tiempo. Si se supone que el medio considerado es lineal y no dispersivo ( $\epsilon$  y  $\mu$  son cantidades independientes de los campos y del tiempo) entonces las derivadas temporales de  $w_E$  y  $w_B$  son

$$\frac{\partial w_E}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{E} \cdot \epsilon \vec{E})}{\partial t} = \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (21.16)$$

y

$$\frac{\partial w_B}{\partial t} = \frac{1}{2} \frac{\partial (\vec{H} \cdot \mu \vec{H})}{\partial t} = \mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} = \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21.17)$$

Por tanto, la derivada de la densidad de energía electromagnética respecto del tiempo es

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (21.18)$$

Sustituyamos ahora las derivadas temporales de  $\vec{D}$  y  $\vec{B}$  por los valores dados por las ecuaciones (21.9) y (21.10). Con ello resulta

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{E} \cdot \vec{J} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} \quad (21.19)$$

Ahora bien, dados los campos vectoriales  $\vec{F}$  y  $\vec{G}$ , puede comprobarse que

$$\text{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot (\text{rot } \vec{F}) - \vec{F} \cdot (\text{rot } \vec{G})$$

con lo cual resulta evidente que

$$\vec{E} \cdot \text{rot } \vec{H} - \vec{H} \cdot \text{rot } \vec{E} = -\text{div}(\vec{E} \times \vec{H}) \quad (21.20)$$

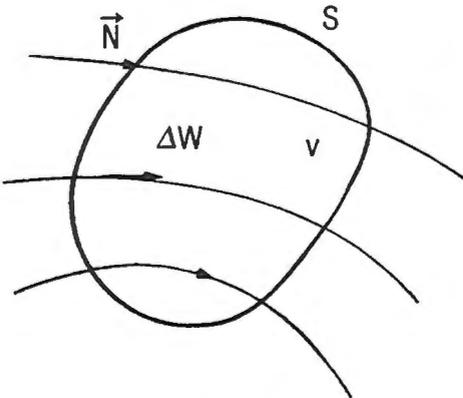


Fig. 21.2

El producto  $\vec{E} \times \vec{H}$  recibe el nombre de vector de Poynting y lo representaremos por  $\vec{N}$

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H} \quad (21.21)$$

En definitiva, la ecuación (21.19) puede escribirse como

$$\frac{\partial w}{\partial t} = -\text{div } \vec{N} - \vec{E} \cdot \vec{J} \quad (21.22)$$

Analicemos el significado de cada uno de los términos de esta expresión. Para ello consideremos un recinto de

volumen  $v$  y superficie exterior  $S$  y calculemos la variación de energía almacenada en  $v$ . Teniendo en cuenta (21.22) resulta

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \iiint_v \frac{\partial w}{\partial t} dv = -\iiint_v \operatorname{div} \vec{N} dv - \iiint_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv$$

o bien, según el teorema de la divergencia

$$\iiint_v \frac{\partial w}{\partial t} dv = -\iint_S \vec{N} \cdot d\vec{S} - \iiint_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv \quad (21.23)$$

El primer término representa la variación, por unidad de tiempo, de la energía almacenada en  $v$ . Valores positivos indican que la energía almacenada aumenta, mientras que valores negativos suponen una disminución de dicha energía, bien porque ésta se consume en  $v$ , bien porque hay un flujo de energía a través de  $S$ .

El término

$$\iiint_v \vec{J} \cdot \vec{E} dv$$

fue estudiado en el capítulo 15. Suponiendo que en  $v$  no existen fuentes de f.e.m., esta integral representa la potencia disipada en  $v$  por efecto Joule..

Por tanto, teniendo en cuenta la conservación de la energía, el flujo de  $\vec{N}$  a través de  $S$  representa el flujo de energía, por unidad de tiempo, a través de  $S$ .

En definitiva, el vector de Poynting,  $\vec{N}$ , representa una densidad de corriente de energía, es decir, un flujo de energía por unidad de área. Su importancia quedará plenamente establecida cuando se estudien las ondas electromagnéticas.



## PROBLEMAS

- P.21.1. Un condensador plano se conecta a una batería de forma que se carga. Demostrar que, en todo instante, la corriente de conducción en los bornes del condensador es igual a la corriente de desplazamiento entre sus armaduras.
- P.21.2. Sea un medio conductor de conductividad  $\sigma$  y permitividad  $\epsilon$ .
- a) Demostrar que la densidad volumétrica de carga,  $\rho$ , del conductor disminuye exponencialmente según la ley  $\rho = \rho_0 e^{-t\sigma/\epsilon}$
  - b) Suponiendo que el conductor sea cobre ( $\epsilon = \epsilon_0$ ,  $\sigma = 6'25 \cdot 10^1 \Omega^{-1} \text{m}^{-1}$ ), calcular el tiempo necesario para que  $\rho$  disminuya hasta  $1/10^6$  de su valor inicial.

### SOLUCIÓN

b)  $t = 1'9 \cdot 10^{-18} \text{S}$

- P.21.3. Un condensador plano está formado por dos placas circulares de superficie  $S$  y separadas una distancia  $d$ . Entre las armaduras hay un dieléctrico imperfecto, de conductividad  $\sigma$  y permitividad  $\epsilon$ . El condensador se carga a una diferencia de potencial  $V_0$  y se aísla en el instante  $t = 0$ . Calcular:
- a) Carga del condensador en función del tiempo.
  - b) Corriente de desplazamiento en el dieléctrico.

c) Campo magnético en el dieléctrico.

**SOLUCIÓN**

a)  $q = \frac{\epsilon S}{d} V_0 e^{-\sigma/\epsilon t}$

b)  $\frac{\partial D}{\partial t} = -\frac{V_0 \sigma}{d} e^{-\sigma/\epsilon t}$

c)  $B = 0$

P.21.4. En una región del espacio existe un campo eléctrico variable  $E = E_0(a + bt)\bar{k}$ , donde  $a$  y  $b$  son constantes. Admitiendo que hay simetría cilíndrica con respecto al eje  $OZ$ , calcular el campo  $\vec{B}$ .

**SOLUCIÓN**

Las líneas del campo son circunferencias con centro sobre el eje  $OZ$ . El módulo de  $B$  es

$$B = \frac{\mu_0 \epsilon_0 b E_0 r}{2}$$

P.21.5. Sea una onda electromagnética plana y monocromática que se propaga en el vacío, cuyas ecuaciones son

$$\vec{E} = E_0 \cos w \left( t - \frac{x}{c} \right) \bar{j}$$

$$\vec{B} = B_0 \cos w \left( t - \frac{x}{c} \right) \bar{k}$$

A partir de las ecuaciones de Maxwell, determinar el valor que debe tener la velocidad de propagación  $c$ .

**SOLUCIÓN**

$$c = 1 / \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}$$

P.21.6. Sea un conductor cilíndrico muy largo, de radio  $a$  y conductividad  $\sigma$ , por el que circula una corriente  $I$ . Calcular:

- El vector de Poynting sobre la superficie del conductor.
- El flujo de dicho vector a través de la superficie lateral de una longitud  $L$  del hilo.
- Comprobar que dicho flujo es igual a la potencia disipada en el hilo por efecto Joule.

**SOLUCIÓN**

$$a) \quad N = I^2 / (2\pi^2 a^3 \sigma)$$

perpendicular al hilo y hacia adentro.

$$b) \quad \phi = I^2 L / \pi a^2 \sigma$$

$$c) \quad I^2 L / \pi a^2 \sigma = I^2 R$$

P.21.7 Sea un condensador plano formado por dos armaduras circulares de radio  $R$  separadas una distancia  $d$ . Entre las armaduras existe un dieléctrico perfecto de permitividad  $\epsilon$ . El condensador se conecta a un generador, de forma que se carga con una corriente  $I$ . Calcular:

- a) Campo  $H$  en un punto situado a una distancia  $r$  del eje del condensador ( $r \leq R$ ).
- b) Vector de Poynting para  $r = R$ .
- c) Demostrar que el flujo de  $\vec{N}$  a través de la superficie lateral del dieléctrico es  $\phi = dW / dt$ , donde  $W$  es la energía almacenada en el condensador.

### SOLUCIÓN

a) 
$$H = \frac{r}{2} \frac{\partial D}{\partial t} \quad \text{con} \quad \frac{\partial D}{\partial t} = I / \pi R^2$$

b) 
$$N = \frac{R}{2\epsilon} D \frac{\partial D}{\partial t}$$

# CAPÍTULO 22

## REGÍMENES TRANSITORIOS

### 22.1. Introducción

En los capítulos 15 y 16 se han estudiado diversos aspectos relativos a la corriente continua, o corriente en régimen estacionario, que se caracteriza porque tanto la intensidad de corriente como otras magnitudes asociadas al movimiento de las cargas son independientes del tiempo.

Este capítulo y los que siguen se dedicarán al estudio de los regímenes variables, en los que la intensidad y la ddp son funciones del tiempo. Se analizarán en primer lugar los regímenes transitorios, en los cuales las funciones temporales son aperiódicas y que representan el establecimiento o desaparición de un régimen permanente. En lecciones posteriores se estudiarán corrientes variables en régimen permanente, en los cuales las magnitudes asociadas se representan mediante funciones periódicas.

El análisis riguroso de un régimen variable debe efectuarse a partir de las ecuaciones de Maxwell enunciadas en el capítulo 21. No obstante, en numerosas aplicaciones tecnológicas importantes, el estudio de los circuitos eléctricos puede realizarse sin recurrir a los detalles de las citadas ecuaciones, a partir de un conjunto de reglas sencillas que quedan reflejadas en la teoría de circuitos.

Los modelos simplificados para el análisis de circuitos, que se desarrollaran en este capítulo y los siguientes, son aplicables en aquellos casos en los que las corrientes que aparecen son casi estacionarias. Se llaman casi-estacionarias (o lentamente variables) a aquellas corrientes para las que puede admitirse, con suficiente grado de aproximación, que los campos eléctrico, magnético y otras magnitudes asociadas a las mismas tienen en cada instante el mismo valor que el correspondiente a corrientes continuas de la misma intensidad.

Hay que señalar que el concepto de régimen casi estacionario está profundamente relacionado con la frecuencia de las corrientes alternas implicadas.

Así, en una amplia gama de problemas, esta hipótesis es aceptable a bajas frecuencias (hasta un orden de  $10^5$  Hz) pero no a frecuencias más elevadas.

Además de la restricción impuesta por la condición de régimen casi estacionario, el estudio de circuitos se ceñirá al caso de circuitos con elementos concentrados, esto es, de circuitos cuyas características se encuentran concentradas en los elementos o dipolos básicos estudiados hasta ahora: resistencias, condensadores y autoinducciones. Las relaciones instantáneas que se aplicarán para estos elementos son las mismas que se han obtenido para un régimen estacionario:

- Resistencia  $u(t) = R i(t)$
- Condensador  $q(t) = C u(t)$
- Autoinducción  $\phi(t) = L i(t)$

donde  $u$  es el símbolo que se utilizará a partir de ahora para representar la ddp en bornes de un elemento del circuito.

### 22.2. Ecuación característica de los dipolos lineales básicos

Se denomina ecuación característica de un dipolo a la relación instantánea entre la intensidad que lo atraviesa ( $i$ ) y la ddp ( $u$ ) que existen entre sus bornes en el sentido de la corriente. En este capítulo y en los siguientes se considerarán únicamente dipolos **básicos**, que poseen una única característica (resistencia, capacidad o autoinducción) y **lineales**, es decir, en los que la relación entre  $u$  e  $i$  o sus derivadas temporales es una relación lineal.

#### a) Resistencia

Es un dipolo que disipa calor por efecto Joule al paso de corriente eléctrica. Su ecuación característica es

$$U = R i \quad (22.1)$$

#### b) Condensador

Es un dipolo que acumula carga eléctrica en sus armaduras. Su ecuación característica es

$$i = C \frac{du}{dt} \quad (22.2)$$

ya que  $du/dt$  es siempre positivo en el sentido de la corriente; sin embargo la relación con la carga varía según que el condensador se encuentre en proceso de carga o descarga. Así, para la carga se cumple que

$$u = q / c \rightarrow i = dq / dt$$

y para la descarga

$$u = -q / c \rightarrow i = -dq / dt$$

### c) Autoinducción

Es un dipolo básico que responde a la variación del flujo que lo atraviesa induciendo una f.e.m. (Fig. 22.2.a).

En el caso de una sola autoinducción, el flujo magnético que lo atraviesa es

$$\phi = Li$$

Por tanto, la f.e.m. inducida, con mayor potencial en A, es

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt}$$

En definitiva, la ddp en el sentido de  $i$  es

$$u = -\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} \quad (22.3)$$

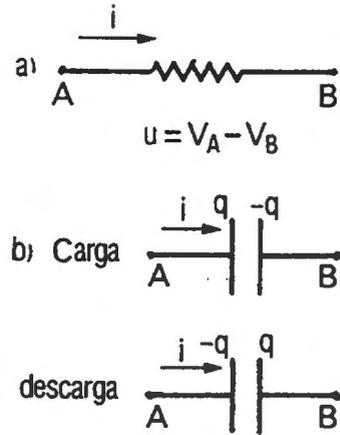


Fig. 22.1

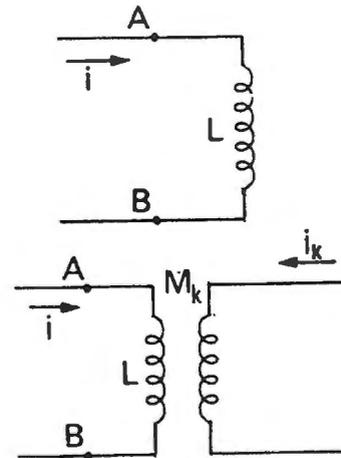


Fig. 22.2

El circuito al que pertenece  $L$  puede estar acoplado magnéticamente con otros circuitos (Fig. 22.2.b). Denominando  $M_k$  a coeficiente de inducción mutua del circuito que contiene a  $L$  con el circuito  $k$ -ésimo, resulta evidente que la f.e.m. inducida en  $L$  es

$$\mathcal{E} = \frac{d\phi}{dt} = -L \frac{di}{dt} - \sum_k M_k \frac{di_k}{dt}$$

Por tanto, la ddp  $u$  es, en este caso

$$u = L \frac{di}{dt} + \sum_k M_k \frac{di_k}{dt} \quad (22.4)$$

En las ecuaciones anteriores se ha supuesto que el sentido de las  $i_k$  es tal que el flujo que atraviesa la autoinducción tiene el mismo sentido para la corriente  $i$  que para las  $i_k$ .

### 22.3. Leyes de Kirchhoff.

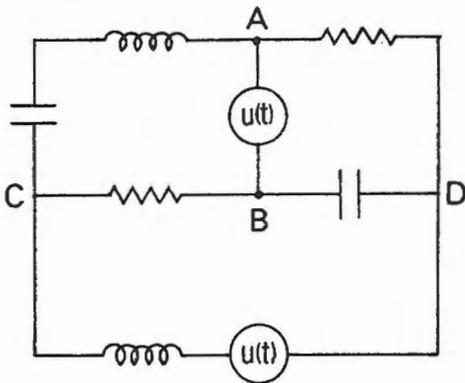


Fig. 22.3

Para la resolución sistemática de circuitos con dipolos lineales básicos es preciso utilizar las ecuaciones características de los mismos y dos reglas conocidas con el nombre de leyes de Kirchhoff. Antes de enunciar dichas leyes es conveniente definir algunos términos:

- a) Nudo: Se llama nudo a cualquier punto de un circuito en el que concurren tres o más conductores. Por ejemplo, son nudos los puntos A, B, C y D en la figura 22.3.
- b) Tramo: Es una porción de circuito, con todos sus elementos en serie, comprendida entre dos nudos consecutivos. Son tramos, en la figura 22.3, AC, CB, BD, etc.

- c) Lazo: Es un conjunto de tramos que forman un circuito cerrado. Por ejemplo, figura 22.3, ADBCA o ABCA son lazos.
- d) Malla: En un circuito plano, se denomina malla a cualquier lazo que no contiene ningún otro en su interior. Por ejemplo, ABCA es una malla, pero no ADBCA.

Una vez definidos estos conceptos, se pueden enunciar las leyes de Kirchhoff:

- i) **Ley de los nudos:** La suma algebraica de los valores instantáneos de las corrientes que confluyen en un nudo es nula.
- ii) **Ley de las mallas:** La suma de los valores instantáneos de las ddp alrededor de una malla es nula.

La validez de la primera ley queda patente a partir del principio de conservación de la carga, admitiendo que no se acumula carga en los conductores que constituyen el circuito (en el régimen casi estacionario la densidad volumétrica de carga en un conductor es constante e igual a cero). Así, en el ejemplo mostrado en la figura 22.4, la ley de los nudos se expresaría como

$$i_3 + i_4 = i_1 + i_2$$

es decir, la suma de las corrientes que entran en el nudo es igual a la suma de las corrientes que salen del mismo. La no verificación de esta ley implicaría una acumulación de carga en el nudo P, lo cual resulta incompatible con las hipótesis de régimen casi estacionario.

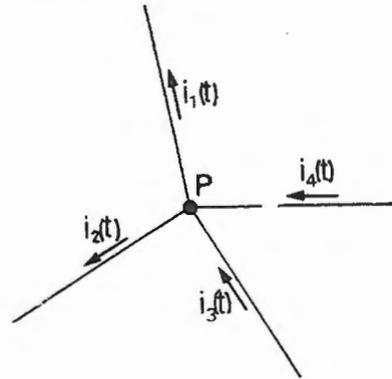


Fig. 22.4

La aplicación de la ley de las mallas al ejemplo de la figura 22.5 daría lugar a la ecuación

$$\mathcal{E}(t) = i_1 R + L \frac{di_2}{dt} + \int \frac{i_3 dt}{C}$$

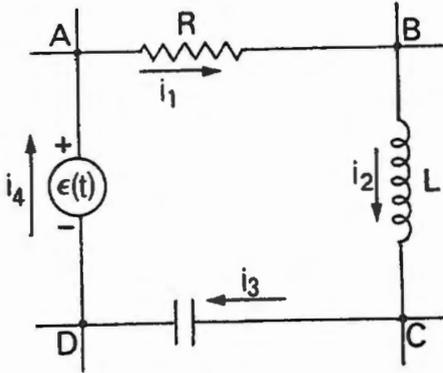


Fig. 22.5

Obsérvese que al aplicar dicha ley se está suponiendo que las únicas diferencias de potencial que aparecen son las debidas a los elementos concentrados que constituyen la malla. Esto es factible a bajas frecuencias pero no para frecuencias muy elevadas, en cuyo caso sería necesario tener en cuenta los voltajes que aparecen como consecuencia de las autoinducciones y capacidades distribuidas, asociadas a los conductores que unen los dipolos básicos.

### 22.4. Regímenes transitorios

En este apartado se estudiará el comportamiento de los dipolos básicos en circuitos de régimen transitorio, es decir, durante el establecimiento o desaparición de un régimen permanente. Concretamente, se analizarán los siguientes casos:

#### 22.4.1. Establecimiento de una corriente en un circuito RL

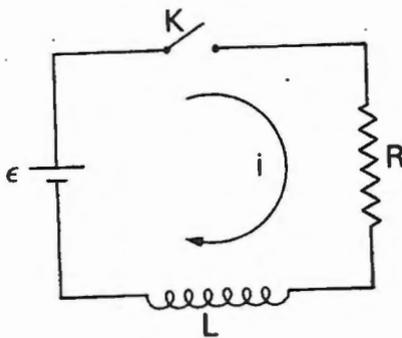


Fig. 22.6

Sea un circuito como el mostrado en la figura 22.6. Suponiendo que en el instante  $t = 0$  se cierra el interruptor  $k$ , la segunda ley de Kirchhoff se escribe como

$$\mathcal{E} = \sum_i u_i = R i + L \frac{di}{dt}$$

Integrando esta ecuación y teniendo en cuenta que, para  $t = 0$ ,  $i = 0$ , resulta

$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} [1 - \exp(-t / \tau_L)] \quad (22.5)$$

donde  $\tau_L = L/R$  es una característica del circuito denominada constante de tiempo. Obsérvese que cuando  $t \rightarrow \infty$  la corriente tiende al valor  $i = \mathcal{E}/R$ , valor que corresponde al régimen permanente estacionario.

la constante de tiempo, cuantifica el tiempo necesario para alcanzar el régimen estacionario. Así, para  $t = \tau_L$ , la corriente toma un valor de un 63 % de la corriente máxima. Para  $t = 7\tau_L$ , se alcanza un 99.9 % de dicho valor (Fig. 22.7).

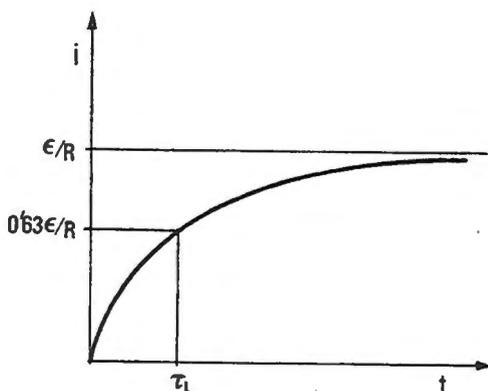


Fig. 22.7

#### 22.4.2. Carga de un condensador en un circuito RLC

A continuación se analizará el régimen transitorio correspondiente a la carga de un condensador, inicialmente descargado, que es sometido a una ddp constante  $\mathcal{E}$  en un circuito con resistencia y autoinducción (Fig. 22.8).

Supongamos que el interruptor  $k$  se cierra en el instante  $t = 0$ . La ecuación del circuito es, teniendo en cuenta el sentido de la corriente mostrado en la figura

$$\mathcal{E} = L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{q}{C}$$

y, teniendo en cuenta que  $i = dq/dt$ , resulta

$$\mathcal{E} = L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} \quad (22.6)$$

ecuación diferencial de segundo orden, no homogénea y con coeficientes constantes. La solución de esta ecuación es la suma de dos términos:

- Una solución general de la ecuación homogénea (sin término independiente), que es de la forma

$$q_g = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} \quad (22.7)$$

donde  $\alpha$  y  $\beta$  son las soluciones de la ecuación característica

$$0 = Lx^2 + Rx + \frac{1}{C} \quad (22.8)$$

luego

$$\alpha = \frac{-R + (R^2 - 4L/C)^{1/2}}{2L} \quad (22.9)$$

$$\beta = \frac{-R - (R^2 - 4L/C)^{1/2}}{2L}$$

- Una solución particular de la ecuación completa. Así, para  $q = \text{cte}$

$$q_p = \epsilon C \quad (22.10)$$

En definitiva, la integral de la ecuación (22.6) es de la forma

$$q = q_g + q_p = A e^{\alpha t} + B e^{\beta t} + \epsilon C \quad (22.11)$$

donde A y B son dos constantes de integración que deberán determinarse a partir de las condiciones iniciales.

Se analizarán dos casos interesantes según los valores obtenidos para  $\alpha$  y  $\beta$  como soluciones de (22.8).

### Primer caso

$$R^2 - 4L/C > 0$$

En este caso las soluciones  $\alpha$  y  $\beta$  son reales y negativas; se representarán por  $-\alpha$  y  $-\beta$ .

La carga del condensador es

$$q = C\mathcal{E} + A e^{-\alpha t} + B e^{-\beta t}$$

Teniendo en cuenta que, para  $t = 0$ ,  $q = 0$  e  $i = 0$ , la expresión anterior se transforma en

$$q = C\mathcal{E} - \frac{C\mathcal{E}}{\beta - \alpha} (\beta e^{-\alpha t} - \alpha e^{-\beta t}) \quad (22.12)$$

La intensidad es

$$i = \frac{dq}{dt} = C\mathcal{E} \frac{\alpha\beta}{\beta - \alpha} (e^{-\alpha t} - e^{-\beta t}) \quad (22.13)$$

La figura 22.9 muestra la representación gráfica de las curvas  $q(t)$  e  $i(t)$ , en el caso estudiado. Obsérvese que el condensador se carga sin oscilaciones, de forma que la corriente de carga lleva siempre el mismo sentido.

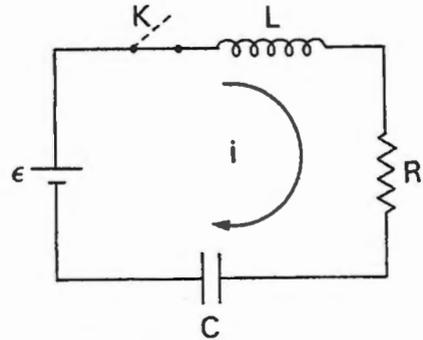


Fig. 22.8

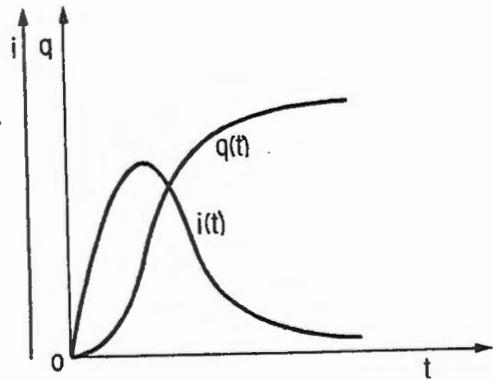


Fig. 22.9

### Segundo caso

$$R^2 - 4L/C < 0$$

En este caso, la ecuación característica (22.8), tiene dos soluciones complejas y conjugadas de la forma:

$$-\lambda \pm j\omega$$

con

$$\lambda = R/2L$$

y

$$w = (-R^2 + 4L/C)^{1/2} / 2L$$

La solución de la ecuación diferencial es, por tanto

$$q = A_1 \exp[(-\lambda - wj)t] + A_2 \exp[(-\lambda + wj)t] + C\mathcal{E} \quad (22.14)$$

y, teniendo en cuenta las condiciones iniciales ( $q_0 = 0, i_0 = 0$ ) resulta

$$q = C\mathcal{E} + A e^{-\lambda t} \cos(wt - \varphi) \quad (22.15)$$

siendo

$$A = -\frac{C\mathcal{E}}{\cos \varphi} \quad \text{y} \quad \text{tg } \varphi = \frac{\lambda}{w}$$

Derivando (22.15) con respecto al tiempo se obtiene  $i(t)$

$$i = -A e^{-\lambda t} [\lambda \cos(wt - \varphi) + w \text{sen}(wt + \varphi)] \quad (22.16)$$

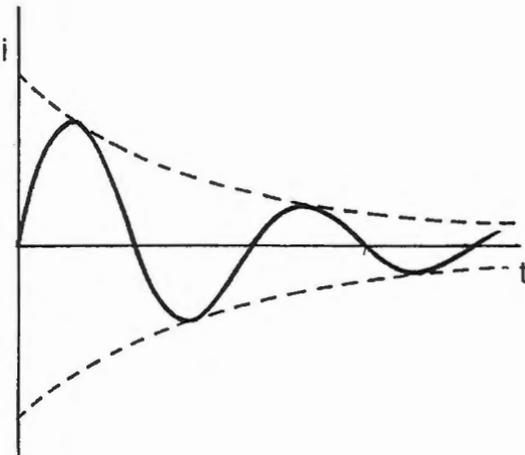


Fig. 22.10

En la figura 22.10 se muestra la curva  $i(t)$ , que corresponde a una función senoidal de pulsación  $w$ , cuya amplitud decrece. El amortiguamiento es tanto más rápido cuanto mayor sea el valor de  $\lambda$ .

Un caso interesante es aquel en el que  $R = 0$ . Entonces  $\lambda$  y  $\varphi$  son nulas y la carga y la intensidad valen

$$q = C\mathcal{E} - C\mathcal{E} \cos wt$$

$$i = C\mathcal{E} w \text{sen } wt$$

En este caso el regimen es oscilatorio no amortiguado, con período

$$T = \frac{2\pi}{w} = 2\pi\sqrt{LC}$$

## PROBLEMAS

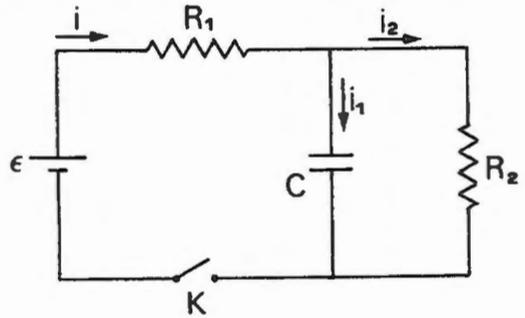
P.22.1. Dado el circuito de la figura, calcular la carga del condensador  $q(t)$  después de cerrar el interruptor  $k$ .

**SOLUCIÓN**

$$q = \epsilon R_2 C (1 - e^{-t/\tau}) / (R_1 + R_2)$$

con

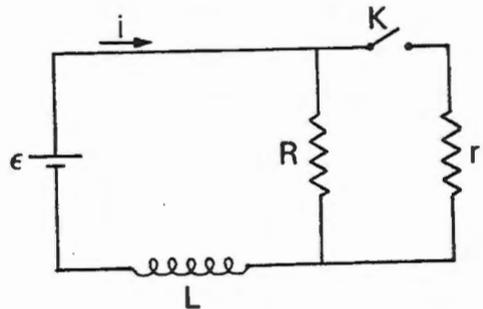
$$\tau = CR_1 R_2 / (R_1 + R_2)$$



P.22.1

P.22.2. Dado el circuito de la figura:

- a) Calcular el valor de  $i$  con régimen estacionario y el interruptor  $k$  cerrado.
- b) Obtener la expresión  $i(t)$  al abrir el interruptor.



P.22.2

**SOLUCIÓN**

a)  $i = \epsilon (R + r) / R r$

b)  $i = \epsilon \left( \frac{1}{R} + \frac{1}{r} e^{-t/\tau} \right)$  con  $\tau = L / R$

P.22.3. Analizar la carga de un condensador en un circuito RC, obteniendo la carga y la intensidad.

**SOLUCIÓN**

a)  $q = \epsilon C(1 - e^{-t/\tau})$

b)  $i = \frac{\epsilon}{R} e^{-t/\tau}$

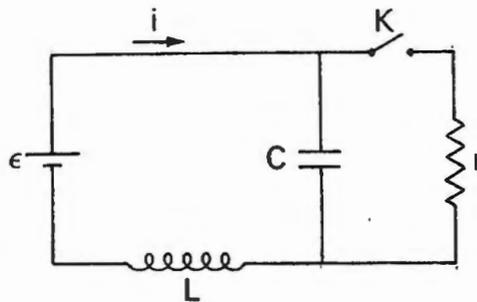
con  $\tau = RC$

P.22.4. Dado el circuito de la figura, calcular:

a) Intensidad  $i$  en régimen permanente con  $k$  cerrado.

b) Intensidad  $i$  después de abrir el interruptor.

c) Máxima ddp en bornes del condensador.



P. 22.4

**SOLUCIÓN**

a)  $i = \epsilon / r$

b)  $i = \frac{\epsilon}{r} \cos(t / \sqrt{LC})$

c)  $U_m = \epsilon \left[ 1 + \frac{1}{r} \left( \frac{L}{C} \right)^{1/2} \right]$

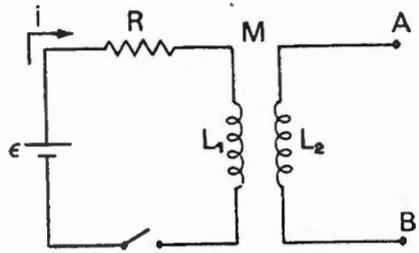
P.22.5. Dado el circuito de la figura calcular la intensidad  $i$  y la ddp  $u_{AB}$  después de cerrar el interruptor  $k$ .

**SOLUCIÓN**

a) 
$$i = \frac{\mathcal{E}}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

b) 
$$u_{AB} = \frac{M}{L_1} \mathcal{E} e^{-t/\tau}$$

con  $\tau = L_1 / R$



P. 22.5



# CAPÍTULO 23

## CORRIENTE ALTERNA

### 23.1. Corriente alterna senoidal. Características

#### 23.1.1. Introducción

Se dice que por un circuito circula una corriente alterna senoidal cuando la intensidad es una función senoidal del tiempo

$$i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (23.1)$$

donde  $i$  es el valor instantáneo,  $I_m$  el valor máximo,  $(\omega t + \varphi_i)$  la fase,  $\omega$  la pulsación y  $\varphi_i$  la fase inicial.

El estudio de las corrientes alternas se ceñirá al caso de bajas frecuencias, en el que resultan admisibles las hipótesis de régimen casi estacionario vistas en el capítulo anterior. En estas condiciones, la existencia de una corriente alterna en un circuito supone que las magnitudes asociadas como la densidad de corriente, campo eléctrico y campo magnético son también funciones senoidales del tiempo y se desprecian los efectos de propagación del campo electromagnético. En definitiva, las expresiones que se utilizarán para determinar los valores instantáneos de dichas magnitudes son las mismas que se establecieron para corrientes continuas. Asimismo, se admitirá que los circuitos están formados por buenos conductores, de forma que se pueden despreciar las corrientes de desplazamiento, cuya existencia se limita al interior de los condensadores.

Finalmente, y como veremos más adelante, si en un circuito se ha establecido una corriente alterna, los elementos lineales básicos están sometidos a una ddp cuya expresión general es

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \phi_u) \quad (23.2)$$

función senoidal de la misma pulsación.

### 23.1.2. Características de una corriente alterna senoidal

Una función senoidal queda definida por la pulsación (determinada por su período o por la frecuencia), por el valor máximo (en las aplicaciones técnicas se utiliza más el valor eficaz), y por la fase inicial.

#### a) Período. Frecuencia

Se llama período,  $T$ , al mínimo intervalo de tiempo en el que repite la función. Las funciones senoidales se repiten cuando la fase aumenta en  $2\pi$ , o en función del período  $\omega T$

$$2\pi = \omega T \rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

La frecuencia es la inversa del período  $\nu = 1/T = \omega / 2\pi$ . Su unidad es el hercio (Hz).

#### b) Valor eficaz

Una característica de las funciones alternas senoidales es que su valor medio durante un período es nulo. Para caracterizar su amplitud, se define el **valor eficaz**, como la raíz cuadrada del valor medio del cuadrado de la función durante el período:

$$I = \left( \frac{1}{T} \int_0^T i^2 dt \right)^{1/2} \quad (23.3)$$

sustituyendo (23.1) en (23.3) resulta

$$I = \left( \frac{1}{T} \int_0^T i_m^2 \cos^2(\omega t + \varphi_i) dt \right)^{1/2} = \frac{I_m}{\sqrt{2}} \quad (23.4)$$

o, para la ddp

$$U = \frac{U_m}{\sqrt{2}} \quad (23.5)$$

Generalmente, se utilizará el valor eficaz de los cálculos, en lugar del valor máximo, pues, como veremos, es aquél el proporcionado por los aparatos de medida.

c) **Fase inicial. Desfase**

La fase inicial de una función alterna senoidal sirve para localizar a la función respecto del origen de tiempos. En la figura 21.3, se muestra la representación de  $i(t)$  para dos fases iniciales  $\varphi_i = 0$  y  $\varphi_i = \pi/4$ .

Un parámetro importante en los dipolos es el desfase  $u - i$ , que se define como la diferencia entre las fases iniciales de la ddp entre sus polos y la intensidad que lo recorre

$$\varphi = \varphi_u - \varphi_i \quad (23.6)$$

El estudio de la corriente alterna senoidal es de gran interés técnico ya que es esta corriente la que se utiliza en el transporte de energía eléctrica, debido a que es fácil de

generar, transformar, transportar y utilizar. Por otra parte, cualquier función temporal periódica puede descomponerse en una serie de funciones senoidales de diferentes frecuencias; analizando cada componente senoidal puede estudiarse la función.

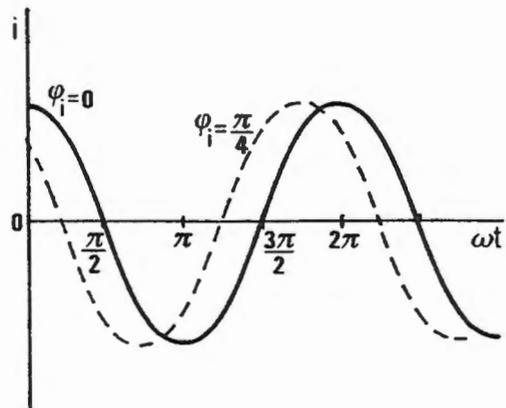


Fig. 23.1

### 23.2. Generación de una corriente alterna senoidal

El fundamento de la generación de una corriente alterna senoidal consiste en producir una variación senoidal de flujo en un circuito cerrado. Por la ley de Faraday esta variación induce una f.e.m. que también es senoidal

El modo más simple consiste en hacer girar una espira en el interior de un campo magnético uniforme. Supongamos la espira rectangular de la figura 23.2, cuya orientación está determinada por el vector superficie  $\vec{S}$ , que gira alrededor del eje Z con velocidad angular constante  $\omega$  en el interior de un campo magnético uniforme  $\vec{B} = B\hat{j}$ . El flujo que atraviesa a la espira en un instante  $t$  es

$$\phi = \vec{B} \cdot \vec{S} = BS \cos \omega t$$

donde se ha considerado que, en  $t = 0$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{S}$  son paralelos. La f.e.m. inducida en la espira es, a partir de la ley de Faraday

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = BS \omega \sin \omega t \quad (23.7)$$

o bien

$$\mathcal{E} = E_m \sin \omega t$$

en definitiva, se ha generado una f.e.m. alterna senoidal de pulsación  $\omega$  y valor máximo

$$E_m = BS \omega$$

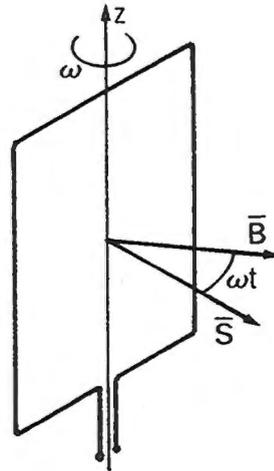


Fig.23.2

### 23.3. Corrientes alternas no senoidales

Sea una función periódica de forma cualquiera y período T,  $[f(t) = f(t + T)]$ , en la que son finitos su valor medio durante un período así como el número de discontinuidades y el número de máximos en un período. Según el teorema de Fourier, dicha función puede expresarse de la siguiente forma

$$F(t) = M_0 + C_1 \cos wt + S_1 \operatorname{sen} wt + C_2 \cos 2wt + S_2 \operatorname{sen} 2wt + \dots$$

o bien

$$f(t) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} [C_n \cos(nwt) + S_n \operatorname{sen}(nwt)] \quad (23.8)$$

La expresión (23.8) puede transformarse en

$$f(t) = M_0 + \sum_{n=1}^{\infty} M_n \cos(nwt + \theta_n) \quad (23.9)$$

donde  $M_0$  es el valor medio de la función durante un periodo

$$M_0 = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt \quad (23.10)$$

La pulsación  $w$  se calcula como la correspondiente al período de la función  $f(t)$  supuesta armónica

$$w = \frac{2\pi}{T}$$

En definitiva, vemos como descomponer una función periódica no senoidal en una suma de funciones senoidales, denominadas **armónicos**, cada una de las cuales tiene su valor máximo ( $M_n$ ), su pulsación ( $nw$ ) y su fase inicial. El cálculo de los coeficientes que aparecen en las expresiones (23.8) y (23.9) puede realizarse como sigue:

$$a) \quad C_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \cos(nwt) dt$$

$$b) \quad S_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \operatorname{sen}(nwt) dt$$

$$c) \quad M_n = (C_n^2 + S_n^2)^{1/2}$$

$$d) \quad \theta_n = -\operatorname{arc} \operatorname{tg}(S_n / C_n)$$

El valor eficaz de la función  $f(t)$ , es, según la definición de valor eficaz

$$F = \left[ \frac{1}{T} \int_0^T f^2(t) dt \right]^{1/2}$$

Dicho valor puede expresarse en función de los valores eficaces de sus armónicos como

$$F = \left[ M_0^2 + \sum_{n=1}^{\infty} (M_n^2 / 2) \right]^{1/2} \tag{23.11}$$

La demostración de esta expresión resulta sencilla a partir de la (23.9)

El método de Fourier resulta útil no sólo para analizar curvas periódicas, sino también para el análisis de funciones aperiódicas. En este caso debe considerarse a la curva como una función periódica con un único ciclo entre  $-\infty$  y  $+\infty$ . El conjunto de frecuencias que aparecen en este caso no es discreto ( $n \omega$ , con  $n=1,2,\dots,\infty$ ) sino continuo.

### 23.4. Respuesta de los dipolos básicos a la corriente alterna senoidal. Impedancia

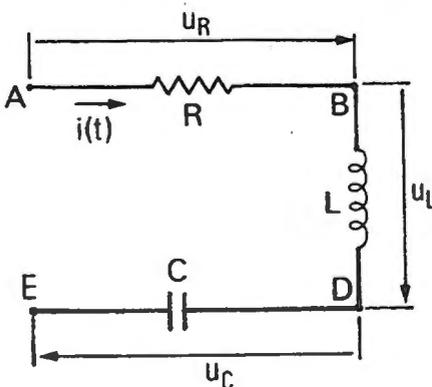


Fig. 23.3

Se trata de obtener la relación existente entre la intensidad que atraviesa un dipolo básico y la ddp que hay entre sus polos, en el sentido de la corriente. Para ello se parte de las ecuaciones básicas propias del régimen casi estacionario.

Supongamos los dipolos  $R, L, C$  en serie (Fig. 23.3) por los que circula una corriente alterna  $i = I_m \cos \omega t$ .

La ddp en cada dipolo,  $u_R, u_L$  y  $u_C$ , representa la caída de potencial en el sentido de la corriente:

$$u_R = V_A - V_B$$

$$u_L = V_B - V_D$$

$$u_C = V_D - V_E$$

mientras que la ddp  $u = V_A - V_E$  es la ddp correspondiente al dipolo RLC serie. Estudiemos cada caso por separado.

### 23.4.1. Resistencia

La ddp en la resistencia es

$$U_R = R \cdot i = R I_m \cos \omega t = U_{Rm} \cos(\omega t + \varphi_R) \quad (23.11)$$

Como vemos, la ddp en bornes de la resistencia es una función alterna senoidal de la misma frecuencia que la intensidad, y cuyo valor máximo es

$$U_{Rm} = R I_m$$

relación que también se verifica para los valores eficaces. El desfase  $u - i$  es nulo ( $\varphi_R = 0$ ).

### 23.4.2. Autoinducción

La ddp en la autoinducción es

$$U_L = L \frac{di}{dt} = L \omega I_m \cos\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = U_{Lm} \cos(\omega t + \varphi_L) \quad (23.12)$$

Es decir,  $u_L$  es una función alterna senoidal de la misma frecuencia, con valor máximo

$$U_{Lm} = L \omega I_m \quad (U_L = L \omega I)$$

y que se encuentra adelantada  $\pi/2$  (en el eje  $\omega t$ ) con respecto a la intensidad ( $\varphi_L = \pi/2$ ).

La cantidad  $L\omega$  tiene dimensiones de una resistencia, produce una ddp equivalente a una  $R$ , pero no es una resistencia "óhmica", pues desfasa a la tensión, depende de  $\omega$  y no produce efecto Joule. Esta cantidad recibe el nombre reactancia inductiva,  $X_L$

$$X_L = \omega L \quad (23.13)$$

### 23.4.3. Condensador

Supongamos, en este caso que la ddp aplicada al condensador es alterna senoidal  $u_C = U_C \cos(\omega t + \varphi_u)$ . Tanto en la carga como en la descarga del condensador, la corriente vale

$$i = C \frac{du}{dt} = C\omega U_{Cm} \cos\left(\omega t + \varphi_u + \frac{\pi}{2}\right) = I_m \cos(\omega t + \varphi_i) \quad (23.14)$$

En definitiva, la intensidad y la ddp en el condensador son funciones senoidales de la misma frecuencia, siendo la relación entre valores máximos

$$U_{Cm} = \frac{1}{C\omega} I_m; \quad \left( U_C = \frac{1}{C\omega} I \right)$$

La ddp está retrasada  $\pi/2$  con respecto a la intensidad

$$\varphi_C = \varphi_u - \varphi_i = \varphi_u - (\varphi_u + \pi/2) = -\pi/2$$

La cantidad  $1/C\omega$  tiene dimensiones de resistencia, pero no lo es (pues carece del efecto Joule) y varía con la frecuencia. Se le denomina reactancia capacitiva

$$X_C = 1/C\omega \quad (23.15)$$

### 23.4.4. Dipolo RLC serie

La ddp instantánea en el dipolo RLC serie es

$$u = u_R + u_L + u_C \quad (23.16)$$

Ahora bien, la suma de funciones senoidales de la misma pulsación,  $w$ , es otra función senoidal de pulsación  $w$ . Calculemos el valor máximo y la fase inicial de dicha función.

Sustituyendo en (23.16) cada ddp por su valor, resulta

$$U_m \cos(wt + \varphi) = R I_m \cos wt + L w I_m \cos\left(wt + \frac{\pi}{2}\right) + \frac{1}{wC} I_m \cos\left(wt - \frac{\pi}{2}\right)$$

Desarrollando el primer miembro y sustituyendo las últimas funciones senoidales,

$$U_m \cos \varphi \cos wt - U_m \sin \varphi \sin wt = R I_m \cos wt - I_m \sin wt \left( L w - \frac{1}{wC} \right)$$

Teniendo en cuenta que esta relación debe verificarse para cualquier instante, resulta evidente que

$$U_m \cos \varphi = R I_m$$

$$U_m \sin \varphi = (L w - 1 / w C) I_m$$

y, resolviendo este sistema de ecuaciones, se obtiene

$$U_m = \left[ R^2 + (wL - 1/wC)^2 \right]^{1/2} I_m \quad (23.17)$$

y

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{Lw - 1/wC}{R} = \frac{X_L - X_C}{R} \quad (23.18)$$

El valor máximo de la ddp en el dipolo puede escribirse como

$$U_m = Z I_m \quad (U = Z I) \quad (23.19)$$

expresión de la ley de Ohm generalizada, donde  $Z$ , es

$$Z = \left[ R^2 + (\omega L - 1/\omega C)^2 \right]^{1/2} = \left[ R^2 + (X_L - X_C)^2 \right]^{1/2} \quad (23.20)$$

y se denomina **impedancia** del dipolo, característica que depende de R, L, C y de la frecuencia de la corriente.

El desfase  $\varphi$  en el dipolo depende de la reactancia X

$$X = X_L - X_C \quad (23.21)$$

y de la resistencia R.

Si  $X > 0$  ( $X_L > X_C$ ), u está adelantada  $\varphi$  con respecto a i.

Si  $X < 0$  ( $X_L < X_C$ ), u está retrasada [ $\varphi$ ] con respecto a i.

Si  $X = 0$  u e i están en fase.

En cualquier caso se cumple que  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ , ya que R siempre es positiva.

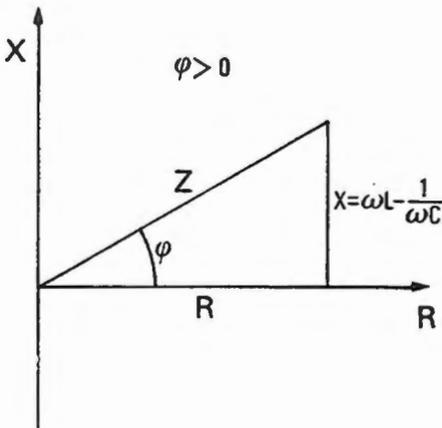


Fig. 23.4

De la definición de la impedancia se deduce que

$$Z^2 = R^2 + X^2 \quad (23.22)$$

relación de un triángulo rectángulo que se denomina **triángulo de impedancia**. Representando figura 23.4, R en el eje de abscisas y X en el de ordenadas, el ángulo que forman Z y R es el desfase  $\varphi$  en el dipolo.

### 23.5. Respuesta de un dipolo a una corriente alterna no senoidal

Una corriente periódica se llama alterna cuando su valor medio durante un período es nulo. Esto supone que el primer término,  $M_0$ , de su descomposición en una serie de Fourier es igual a cero.

Sea un dipolo RLC serie sometido a una corriente alterna no senoidal

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} I_{mn} \cos(n \omega t + \varphi_{in}) \quad (23.23)$$

Cada armónico de la función  $i$  introduce una diferencia de potencial cuyo valor es el obtenido para el régimen senoidal. Teniendo en cuenta el principio de superposición, resulta evidente que la ddp en el dipolo vale

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} U_{mn} \cos(n \omega t + \varphi_{in} + \varphi_n) \quad (23.24)$$

donde la amplitud y el desfase del armónico  $n$  son

$$U_{mn} = I_{mn} \left[ R^2 + \left( L \omega n - \frac{1}{C n \omega} \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi_n = \frac{L n \omega - 1 / C n \omega}{R}$$

### 23.6. Representación compleja de una corriente alterna senoidal

Cualquier función alterna senoidal, la intensidad por ejemplo, puede representarse mediante el número complejo

$$\bar{I}_m(t) = I_m \exp[j(\omega t + \varphi_i)] \quad (23.25)$$

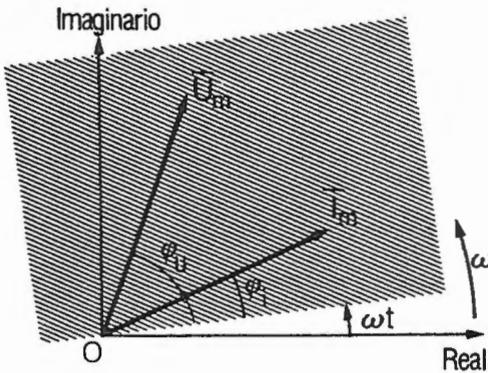
donde  $j = \sqrt{-1}$ . La expresión trigonométrica de este número complejo es

$$\bar{I}_m(t) = I_m [\cos(\omega t + \varphi_i) + j \operatorname{sen}(\omega t + \varphi_i)] \quad (23.26)$$

Por tanto, el valor instantáneo,  $i(t)$ , es la parte real del complejo  $\bar{I}_m(t)$ .

En definitiva, las representaciones complejas de  $u$  e  $i$  son

$$\begin{aligned} \bar{I}_m &= I_m \exp(j \varphi_i) \exp(j \omega t) \\ \bar{U}_m &= U_m \exp(j \varphi_u) \exp(j \omega t) \end{aligned} \quad (23.27)$$



**Fig. 23.5**

El número real  $I_m(U_m)$  representa la amplitud de la corriente (ddp). El producto  $I_m \exp[j \varphi_i]$  ( $U_m \exp[j \varphi_u]$ ) es la amplitud compleja, en la cual figuran las características de la función:  $I_m$  y  $\varphi_i$  ( $U_m$  y  $\varphi_u$ ). El factor  $\exp(j \omega t)$  aparece en las dos funciones y solamente indica el valor de la pulsación.

Si representamos las variables complejas en el plano complejo (Fig. 23.5) se observa que  $\bar{U}_m$  e  $\bar{I}_m$

representan vectores que giran con la misma velocidad angular  $\omega$ . Su componente sobre el eje real es la función alterna senoidal que representan

Obsérvese que la disposición relativa de los vectores giratorios no varía, por lo que suelen representarse para  $t = 0$ , denominándose a tal esquema diagrama fasorial o de amplitudes complejas. En el diagrama fasorial (Fig. 23.6) se representa un eje origen de fases. Los vectores deben formar un ángulo con dicho eje igual a su fase inicial. Los ángulos son positivos en el sentido de las agujas del reloj y negativos en sentido contrario.

Es más frecuente representar las expresiones complejas  $\bar{U}$  e  $\bar{I}$ , en las que el módulo es el valor eficaz. El diagrama fasorial en este caso es semejante, salvo por el hecho de que los módulos de los vectores están divididos por  $\sqrt{2}$ .

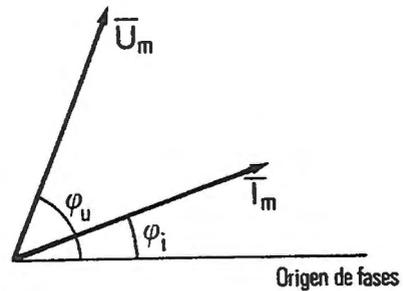


Fig. 23.6

La representación compleja de magnitudes alternas senoidales simplifica notablemente los cálculos ya que:

- a) La derivada de un vector giratorio es otro vector giratorio de la misma pulsación

$$\frac{d}{dt} [\bar{I}(t)] = \frac{d}{dt} [I \exp j(\omega t + \varphi)] = j\omega \bar{I}(t)$$

en la que se cumple que

$$\frac{d}{dt} \{ \text{Re al} [\bar{I}(t)] \} = \text{Re al} [j\omega \bar{I}(t)]$$

En definitiva, las ecuaciones diferenciales se transforman en ecuaciones algebraicas complejas, simplificando notablemente su resolución y conservando el significado físico de las componentes reales.

- b) La suma de expresiones complejas conserva también el significado físico de la componente real. Así, si en valores instantáneos se cumple  $u = u_1 + u_2$ , también se verifica que

$$\bar{U}_1 + \bar{U}_2 = \bar{U}$$

siendo  $u = \text{Real} [\bar{U}]$ .

Estas propiedades permiten sustituir las funciones senoidales por las expresiones complejas que las representan y operar según el álgebra de los números complejos.

### 23.7. Expresión compleja de las leyes de Kirchhoff

#### 23.7.1. Ley de los nudos

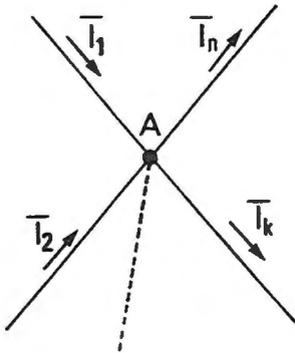


Fig. 23.7

Sea un nudo A de un circuito en el que concurren n conductores, por los que circulan corrientes alternas senoidales. La expresión de la ley de los nudos es, en valores instantáneos

$$\sum_{k=1}^n i_k = 0$$

o bien

$$\text{Re al} \left[ \sum_{k=1}^n \bar{I}_k(t) \right] = 0, \quad \forall t \quad (23.28)$$

Ahora bien, es fácil demostrar que, si la parte real de la suma de las  $\bar{I}_k$  es nula en cada instante, entonces también lo será la parte imaginaria. Por tanto, la ley de los nudos puede escribirse como

$$\sum_{k=1}^n \bar{I}_k = 0 \quad (23.29)$$

Hay que señalar que en la suma (23.29) las intensidades complejas llevarán su correspondiente signo (positivas las que entran y negativas las que salen, o viceversa).

#### 23.7.2. Ley de las mallas

Siguiendo un razonamiento similar al del caso anterior, la ley de las mallas que en valores instantáneos se expresa como figura 23.8

$$\sum_{k=1}^n u_k = 0$$

puede escribirse en función de los vectores giratorios como

$$\sum_{k=1}^n \bar{U}_k = 0 \quad (23.30)$$

donde las ddp complejas van afectadas de signo:

- Positivo, si su sentido coincide con el sentido de referencia S (prefijado).
- Negativo, si el sentido es el opuesto al de S.

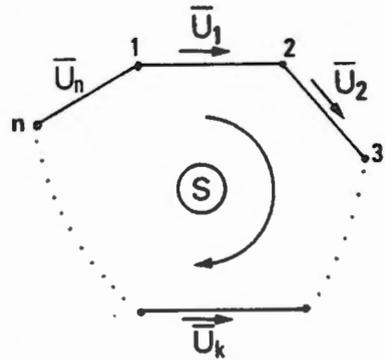


Fig. 23.8

### 23.8. Impedancia y admitancia complejas. Expresión simbólica de la ley de Ohm.

Se define la **impedancia compleja** de un dipolo como el cociente entre la ddp compleja entre sus polos y la intensidad compleja que lo atraviesa:

$$\bar{Z} = \frac{\bar{U}}{\bar{I}} = \frac{U \exp(j \varphi_u)}{I \exp(j \varphi_i)} = Z \exp(j \varphi) \quad (23.31)$$

Se define la **admitancia compleja** de un dipolo como el inverso de la impedancia compleja

$$\bar{Y} = \frac{1}{\bar{Z}} = \frac{1}{Z} \exp(-j \varphi) \quad (23.32)$$

A la parte real de  $\bar{Y}$  se le denomina conductancia y a la parte imaginaria susceptancia. Tanto la impedancia compleja como la admitancia dependen de las características del dipolo y de la frecuencia de la corriente. Para una pulsación dada toman valores fijos que no dependen del tiempo.

A partir de (23.31) o de (23.32) puede obtenerse la expresión simbólica de la ley de Ohm

$$\bar{U} = \bar{Z}\bar{I} \quad \text{o} \quad \bar{I} = \bar{Y}\bar{U} \quad (23.33)$$

Estudiemos los valores de  $\bar{Z}$  e  $\bar{Y}$  en algunos casos particulares.

### 23.8.1. Resistencia

La impedancia compleja de una resistencia sólo tiene parte real

$$\bar{Z}_R = R$$

ya que  $\varphi_R = 0$ . La admitancia compleja es

$$\bar{Y}_R = \frac{1}{R}$$

### 23.8.2. Autoinducción

En el caso de una autoinducción pura, se tiene que  $Z_L = wL$  y que  $\varphi_L = \pi/2$ . Por tanto, la impedancia compleja asociada es

$$\bar{Z}_L = wL \exp(j\pi/2) = jwL$$

y la admitancia

$$\bar{Y}_L = 1/\bar{Z}_L = -j/wL$$

### 23.8.3. Condensador

En un condensador, la reactancia es  $1/Cw$ . Por otra parte, el desfase  $u-i$  es de  $-\pi/2$ . Por tanto, la impedancia asociada tiene  $Z_C = 1/Cw$  y  $\varphi = -\pi/2$ . La impedancia y la admitancia complejas son

$$\bar{Z}_C = -j/Cw$$

$$\bar{Y}_C = jCw$$

### 23.8.4. Dipolo RLC serie

Sea un dipolo RLC serie figura 23.3. Las ddp complejas en bornes de cada uno de los elementos son, a partir de la expresión simbólica de la ley de Ohm

$$\bar{U}_R = R \bar{I}$$

$$\bar{U}_L = j\omega L \bar{I}$$

$$\bar{U}_C = -j \bar{I} / \omega C$$

Por tanto, la ddp compleja en el dipolo es

$$\bar{U} = \bar{U}_R + \bar{U}_L + \bar{U}_C = [R + j(\omega L - 1/\omega C)] \bar{I}$$

de donde se deduce que la impedancia compleja es

$$\bar{Z} = R + j \left( \omega L - \frac{1}{\omega C} \right) \quad (23.34)$$

o bien

$$\bar{Z} = Z \exp(j\varphi) \quad (23.35)$$

Obsérvese que el módulo de  $\bar{Z}$ ,  $Z$ , es la impedancia definida en el apartado 23.4. Su argumento,  $\varphi$ , es igual al ángulo que forman  $Z$  y  $R$  en el triángulo de impedancia.

Hay que señalar que  $\bar{Z} = \bar{Z}_R + \bar{Z}_L + \bar{Z}_C$ , es decir, la impedancia compleja equivalente de un conjunto de dipolos en serie es la suma de las impedancias complejas de cada uno de ellos.

$$\bar{Z}_{eq} = \sum_{k=1}^n \bar{Z}_k \quad (23.36)$$

23.8.5. Dipolo RLC paralelo

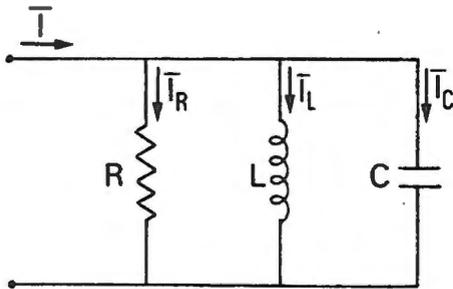


Fig. 23.9

Sea un dipolo como el mostrado en la figura 23.9, con una resistencia, una autoinducción y un condensador conectados en paralelo. A partir de la expresión compleja de la primera ley de Kirchhoff se deduce que

$$\bar{I} = \bar{I}_R + \bar{I}_L + \bar{I}_C$$

y, teniendo en cuenta los valores de dichas corrientes que se obtienen a partir de la ley de Ohm, resulta

$$\bar{U}\bar{Y} = \bar{U}\bar{Y}_R + \bar{U}\bar{Y}_L + \bar{U}\bar{Y}_C$$

o bien

$$\bar{U}\bar{Y} = \bar{U} \left[ \frac{1}{R} + \left( C\omega - \frac{1}{\omega L} \right) j \right] \tag{23.37}$$

Por tanto, la admitancia compleja del dipolo es

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j \left( C\omega - \frac{1}{\omega L} \right) \tag{23.38}$$

Se observa que la admitancia compleja equivalente de un conjunto de  $n$  dipolos en paralelo es la suma de las admitancias complejas de cada uno de los dipolos:

$$\bar{Y}_{eq} = \sum_{k=1}^n \bar{Y}_k \tag{23.39}$$

23.9. Potencia en corriente alterna

23.9.1. Potencia instantánea y media en un dipolo

Sea un dipolo AB recorrido por una corriente alterna senoidal  $i(t)$  y una ddp entre sus polos  $u(t)$ , en el sentido de la corriente (Fig. 23.10). Se define la **potencia instantánea** que intercambia la corriente en el dipolo como

$$p(t) = u(t) \cdot i(t) \quad (23.40)$$

donde se conserva el mismo criterio de signos establecido en el régimen estacionario. Así, cuando  $u(t)$  e  $i(t)$  llevan el mismo sentido,  $p(t)$  es positiva por lo que se disipa energía en el dipolo, que se comporta como receptor. Por el contrario, si  $u(t)$  e  $i(t)$  tienen sentidos opuestos ( $u(t)$  es negativa), los portadores de carga ganan energía al atravesar el dipolo, que se comporta como un generador.

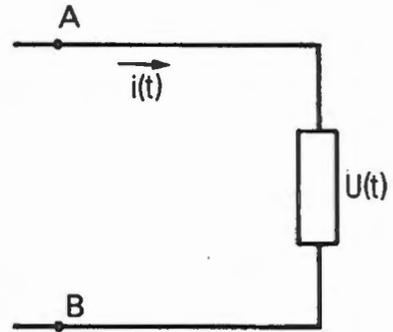


Fig. 23.10

Supongamos que la intensidad y la ddp en el dipolo son

$$i(t) = I_m \cos \omega t$$

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$$

La potencia instantánea es, según (23.40)

$$p(t) = U_m I_m \cos \omega t \cos(\omega t + \varphi)$$

y, utilizando la expresión trigonométrica

$$\cos A \cos B = [\cos(A + B) + \cos(A - B)] / 2$$

y sustituyendo los valores máximos por los eficaces, resulta

$$p(t) = U I \cos \varphi + U I \cos(2 \omega t + \varphi) \quad (23.41)$$

expresión que pone de manifiesto que la potencia instantánea tiene un término independiente del tiempo y una componente senoidal de amplitud  $U I$  y frecuencia doble que  $i(t)$  (y que  $u$ ). Por tanto, el valor medio de la potencia instantánea, durante un período, es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p dt = U I \cos \varphi \quad (23.42)$$

valor que recibe el nombre de potencia media.

El producto  $U I$  se denomina potencia aparente y tiene las mismas dimensiones que  $p$ . Sin embargo, a diferencia de ésta, no es una potencia consumida o suministrada; su unidad en el S.I. es el voltio  $\cdot$  amperio (VA).

El ángulo  $\varphi$  es el desfase  $u-i$  en el dipolo. En los dipolos pasivos  $-\pi/2 \leq \varphi \leq \pi/2$ , por lo que  $p \geq 0$ .

Analicemos la potencia en los dipolos lineales básicos.

### a) RESISTENCIA

En una resistencia ( $U = RI$  y  $\varphi = 0$ ), la potencia instantánea es

$$p(t) = RI^2 + RI^2 \cos 2\omega t$$

función no negativa, por lo cual una resistencia se comporta siempre como un receptor. El valor medio de la potencia es

$$P = RI^2$$

### b) AUTOINDUCCION

En la autoinducción  $U = L \omega I$  y  $\varphi = \pi/2$ . La potencia instantánea es, por tanto,

$$p(t) = L \omega I^2 \cos(2\omega t + \pi/2)$$

función senoidal que toma valores positivos y negativos cada cuarto de período, comportándose como generador y como receptor. La potencia media es nula, lo que pone de manifiesto que no hay un consumo neto de energía eléctrica en una autoinducción: toda la energía que absorbe durante un cuarto de período es restituida a la corriente en el cuarto de período siguiente. La energía intercambiada es

$$W_L = \left| \int_0^{T/4} p \, dt \right| = \frac{1}{2} L I_m^2$$

expresión de la energía asociada al campo magnético de la autoinducción, cuando la intensidad es máxima. La autoinducción actúa como receptor cuando aumenta  $|i|$  y como generador cuando disminuye.

c) **CONDENSADOR**

En la capacidad ( $U = I / C w$  y  $\varphi = -\pi / 2$ ), la potencia instantánea es

$$p(t) = C w U^2 \cos(2 wt - \pi / 2)$$

función senoidal que también toma valores positivos y negativos cada  $T/4$ , pero en oposición de fase con la autoinducción. El condensador se comporta alternativamente como generador y como receptor: actúa como receptor durante el proceso de carga y como generador en la descarga. La energía absorbida o restituída durante un cuarto de período sin alternancia es

$$W_C = \left| \int_0^{T/4} p \, dt \right| = \frac{1}{2} C U_m^2$$

expresión de la energía almacenada en el campo eléctrico de la capacidad cuando la ddp es máxima.

**23.9.2. Potencia compleja. Factor de potencia de un receptor**

Sea un dipolo por el que circula una corriente alterna senoidal  $\bar{I}$  y con una ddp  $\bar{U}$ . Se define como **potencia compleja** intercambiada en el dipolo al producto

$$\bar{S} = \bar{U} \bar{I}^* \tag{23.43}$$

donde  $\bar{I}^*$  es el conjugado de la intensidad compleja.

Teniendo en cuenta las expresiones exponenciales de  $\bar{I}$  y  $\bar{U}$

$$\bar{I} = I \exp[j \varphi_i]$$

$$\bar{U} = U \exp[j \varphi_u]$$

la potencia compleja resulta

$$\bar{S} = UI \exp[j \varphi_u] \exp[-j \varphi_i] = UI \exp[j \varphi] \quad (23.44)$$

o, en forma trigonométrica,

$$\bar{S} = UI (\cos \varphi + j \operatorname{sen} \varphi) \quad (23.45)$$

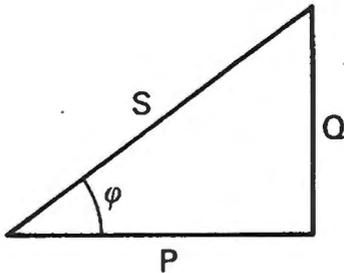


Fig. 23.11

El módulo de la potencia compleja es la **potencia aparente**,  $S = UI$ . A la parte real,  $P = UI \cos \varphi$ , se le denomina **potencia activa**, que coincide con la potencia media del dipolo. La parte imaginaria

$$Q = UI \operatorname{sen} \varphi$$

recibe el nombre de **potencia reactiva**.

La relación entre las tres potencias, aparente, activa y reactiva, es la que existe entre el módulo de  $\bar{S}$  y sus componentes

$$S^2 = P^2 + Q^2 \quad (23.46)$$

Esta relación se representa en el triángulo de potencias (Fig. 23.11).

Si el dipolo es un receptor de impedancia  $\bar{Z}$ , la expresión (23.44) se escribe como

$$\bar{S} = Z I^2 \exp(j \psi) = \bar{Z} I^2$$

o bien

$$\bar{S} = RI^2 + j \cdot (L - 1/\omega C) I^2$$

es decir, la potencia activa es la potencia media (consumida en la resistencia), mientras que la potencia reactiva es

$$Q = \omega L I^2 - \frac{I^2}{\omega C} = \omega \left( \frac{1}{2} L I_m^2 - \frac{1}{2} C U_m^2 \right)$$

expresión que representa el producto de la pulsación por la diferencia entre las energías medias intercambiadas, durante un período  $T$ , en la autoinducción y en el condensador. La unidad de potencia reactiva es el voltio · amperio reactivo (VAR).

Se denomina **factor de potencia** de un receptor al cociente entre la potencia activa (consumida) y la potencia aparente, expresión que coincide con el  $\cos \varphi$

$$\cos \varphi = \frac{P}{S} = \frac{P}{UI} \quad (23.47)$$

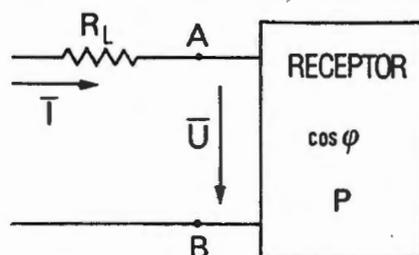


Fig. 23.12

El factor de potencia de un receptor es un parámetro que cuantifica su calidad en cuanto al aprovechamiento energético del mismo. Para clarificar esta cuestión, consi-dérese un receptor como el de la figura 23.12, conectado a una línea de resistencia  $R_L$  y que consume una potencia activa  $P$ . Si la ddp en bornes del receptor es  $\bar{U}$ , que supondremos constante, la intensidad que circulará por el receptor y por la línea es

$$I = \frac{P}{U \cos \varphi}$$

Por tanto, las pérdidas por efecto Joule en la línea son

$$P_L = R_L I^2 = R_L \frac{P^2}{U^2} \left( \frac{1}{\cos \varphi} \right)^2$$

. es decir, son tanto mayores cuanto menor sea el factor de potencia del receptor. De aquí se deduce la importancia de aumentar el  $\cos \varphi$  de los receptores con vistas a minimizar las pérdidas de potencia en las líneas de alimentación

En la mayor parte de los casos prácticos, los receptores son inductivos (motores, transformadores, etc.), por lo que  $Q > 0$ . Aumentar su factor de potencia supone reducir al ángulo  $\varphi$  del receptor equivalente entre A y B. La solución utilizada consiste en conectar entre A y B un condensador C que introduzca una potencia reactiva  $-U^2 C \omega$ . El valor de C depende del factor de potencia que se desea conseguir.

### 23.9.3. Potencia en corriente alterna no senoidal

Sea un dipolo en el que la intensidad y la ddp son funciones alternas no senoidales de período T

$$i = \sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{2} I_n \cos(n \omega t + \varphi_{in})$$

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{2} U_k \cos(k \omega t + \varphi_{uk})$$

La potencia instantánea consumida en el dipolo es

$$p(t) = u \cdot i = \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=1}^{\infty} 2 I_n U_k \cos(n \omega t + \varphi_{in}) \cos(k \omega t + \varphi_{uk})$$

La potencia media en un período es

$$P = \frac{1}{T} \int_0^T p \, dt$$

donde hay que calcular el valor medio de los dobles productos de la forma

$$I_n U_k \cos(n \omega t + \varphi_{in}) \cos(k \omega t + \varphi_{uk})$$

expresión que puede escribirse como

$$I_n U_k [\cos((n+k) \omega t + \varphi_{in} + \varphi_{uk}) + \cos((n-k) \omega t + \varphi_{in} + \varphi_{uk})]$$

El valor medio de esta expresión es nulo salvo para  $n = k$ . Por tanto, la potencia media queda como

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n \quad (23.48)$$

donde

$$\varphi_n = \varphi_{un} - \varphi_{in}$$

La expresión (23.48) pone de manifiesto que la potencia media consumida por el dipolo es la suma de las potencias medias correspondientes a cada armónico por separado.

El factor de potencia del dipolo es

$$\cos \varphi = \frac{P}{UI} = \frac{\sum_{n=1}^{\infty} U_n I_n \cos \varphi_n}{\left( \sum_{n=1}^{\infty} U_n^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{n=1}^{\infty} I_n^2 \right)^{1/2}} \quad (23.49)$$

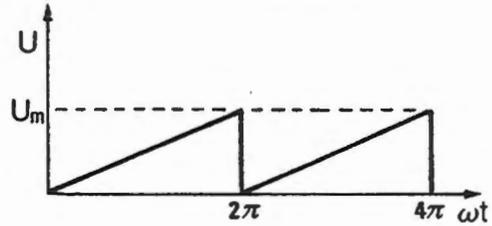


# PROBLEMAS

P.23.1. Determinar la serie de Fourier para la tensión indicada en la figura P.23.1.

**SOLUCIÓN**

$$u(t) = \frac{U_m}{2} - \frac{U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } n \omega t}{n}$$

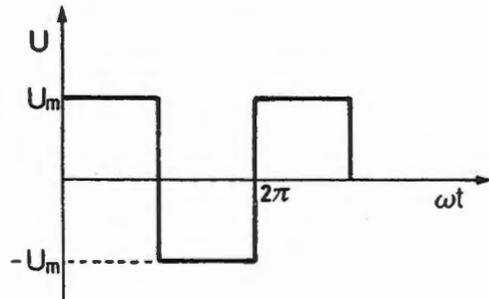


P.23.1

P.23.2. Repetir el cálculo para la ddp de la figura P.23.2.

**SOLUCIÓN**

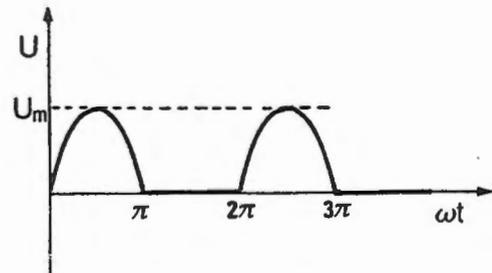
$$u(t) = \frac{4U_m}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\text{sen } (2n + 1) \omega t}{(2n + 1)}$$



P.23.2

P.23.3. Repetir el cálculo para la señal rectificadora en la figura P.23.3.

**SOLUCIÓN**



P.23.3

$$u(t) = \frac{U_m}{\pi} \left( 1 + \frac{\pi}{2} \text{sen } \omega t - \frac{2}{3} \cos 2 \omega t + \frac{2}{15} \cos 4 \omega t + \dots \right)$$

P.23-4. Sea un dipolo RLC paralelo, sometido a una ddp alterna senoidal  $u = U_m \cos wt$ . Determinar la intensidad que circula por el dipolo.

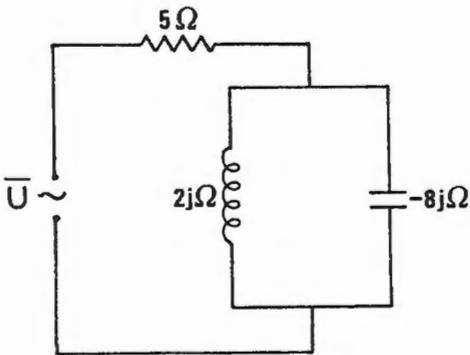
**SOLUCIÓN**

$$i = I_m \cos(wt + \varphi)$$

donde

$$I_m = U_m \left[ \frac{1}{R^2} + \left( \frac{1}{Lw} - Cw \right)^2 \right]^{1/2}$$

$$\operatorname{tg} \varphi = R \left( \frac{1}{Lw} - Cw \right)$$

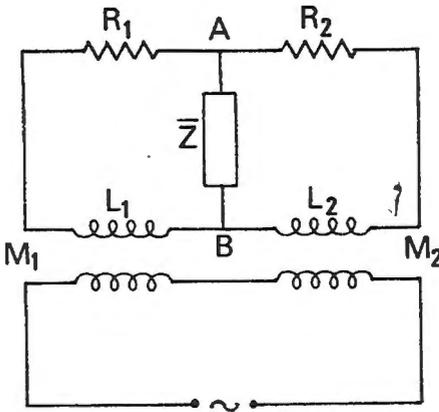


P.23.5

P.23.5. Dado el circuito de la figura, en el que las reactancias se han calculado para  $w = 500 \text{ rad/s}$ , calcular la corriente total si la tensión aplicada es  $u = 50 + 20 \operatorname{sen} 500t + 10 \operatorname{sen} 1000t \text{ V}$ .

**SOLUCIÓN**

$$i = 10 + 3'53 \operatorname{sen}(500t - 28'1^\circ) \text{ A}$$



P.23.6

P.23.6. Dado el circuito de la figura, obtener la relación entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L_1$ ,  $L_2$ ,

$M_1$  y  $M_2$  para que no circule corriente por la impedancia  $\bar{Z}$  de la rama AB. (Resolver el sistema de ecuaciones diferenciales utilizando las expresiones complejas).

**SOLUCIÓN**

$$\frac{M_1}{M_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{L_1}{L_2}$$

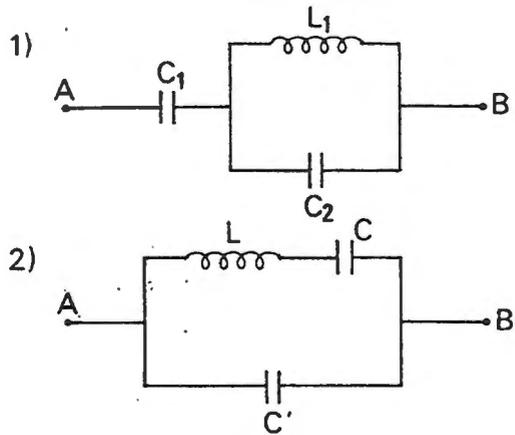
P.23.7. Dado los circuitos de la figura, calcular los valores de  $C$ ,  $C'$  y  $L$  para que ambos tengan la misma impedancia.

**SOLUCIÓN**

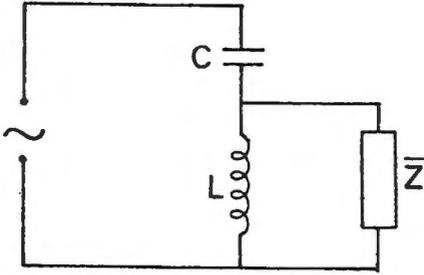
$$C = C_1^2 / C_1 + C_2$$

$$C' = C_1 C_2 / C_1 + C_2$$

$$L = L_1 \left( \frac{C_1 + C_2}{C_1} \right)^2$$



P.23.7

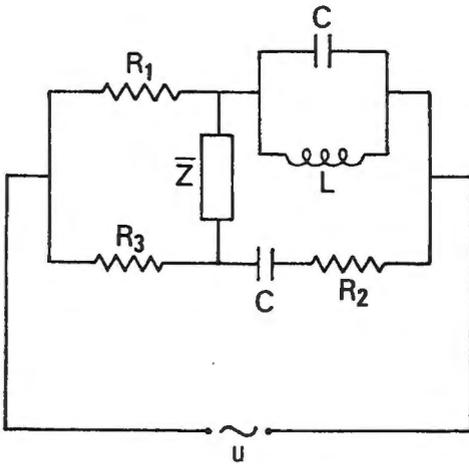


P.23.8

P.23.8. Dado el circuito de la figura, obtener la relación entre  $C$ ,  $L$  y  $\omega$  para que la intensidad que circula por  $\bar{Z}$  sea independiente de  $\bar{Z}$ .

**SOLUCIÓN**

$$\omega L = 1/\omega C$$



P.23.9

P.23.9. Dado el circuito de la figura, en el que la ddp aplicada es  $u = U \cos(\omega t)$ , calcular, en función de  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $R_3$  y  $\omega$ , los valores de  $C$  y  $R$  para que no pase corriente por la impedancia  $\bar{Z}$ .

**SOLUCIÓN**

$$R = \frac{R_1}{R_3} \left( R_2 + \frac{1}{R_2 C_1^2 \omega^2} \right)$$

$$C = \frac{R_3}{R_1} \left( \frac{C_1}{R_2^2 C_1^2 \omega^2 + 1} \right)$$

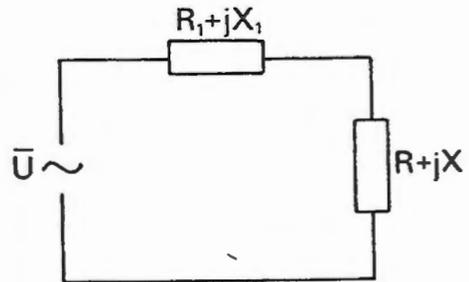
P.23.10. Sea un receptor de impedancia  $\bar{Z}$  y factor de potencia  $\cos \varphi$ , sometido a una ddp  $u = U_m \cos \omega t$ . Calcular el valor de la capacidad  $C$  del

condensador que, conectado en paralelo con el receptor, de lugar a un factor de potencia igual a la unidad.

**SOLUCIÓN**

$$C = (\text{sen } \varphi / \omega Z)$$

P.23.11. Dado el circuito de la figura, calcular los valores de  $R$  y  $X$  para que la potencia disipada en  $R + jX$  sea máxima.



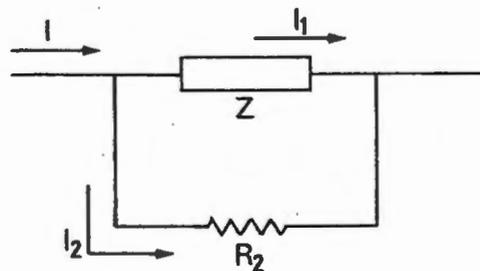
P.23.11

**SOLUCIÓN**

$$R_1 = R$$

$$X_1 = -X$$

P.23.12. Dado el circuito de la figura, calcular la potencia disipada en  $\bar{Z}$  en función de  $I, I_1, I_2$  y  $R_2$



P.23.12

**SOLUCIÓN**

$$P = \frac{1}{2} R_2 (I^2 - I_2^2 - I_1^2)$$



# CAPÍTULO 24

## ANÁLISIS DE REDES

### 24.1. Red eléctrica. Definiciones

Se denomina red eléctrica a un conjunto de dipolos activos (generadores) y pasivos (resistencias, autoinducciones, condensadores, receptores, etc.) asociados de forma cualquiera y formando circuitos cerrados interconectados.

La resolución de una red consiste, en el caso general, en la determinación de las intensidades que circulan por cada rama o bien de las ddp entre cada dos nudos consecutivos, conocidas las características de los dipolos que la constituyen.

En este capítulo se estudian algunos métodos generales para el análisis de redes, planas y lineales, en régimen permanente.

Una red es lineal cuando está constituida por dipolos lineales, es decir cuando la relación  $u - i$  de todos los dipolos de la red es lineal. Es plana si cada rama es común a dos mallas simples, como máximo.

Los métodos y teoremas que se desarrollarán tienen validez general para corrientes variables en régimen permanente. La corriente alterna senoidal es un caso particular de régimen permanente; la corriente continua puede considerarse como una corriente alterna de frecuencia (y pulsación) nula.

Se utilizará la notación compleja para la representación de las tensiones e intensidades, teniendo en cuenta que en corriente continua estas cantidades son números reales.

Se denominará con el término **impedancia** a la característica de los elementos básicos R, L y C siendo, como ya se ha visto

$$Z_R = R ; \quad \bar{Z}_L = j\omega L ; \quad \bar{Z}_C = -j / \omega C$$

En corriente continua, la impedancia de un dipolo es su resistencia, teniendo en cuenta que

$$R_R = R ; \quad R_L = 0 ; \quad R_C = \infty$$

## 24.2. Dipolos lineales: Generadores y receptores

### 24.2.1. Generadores

Se denomina generador a cualquier dispositivo capaz de suministrar, de forma permanente, energía a un circuito eléctrico. También recibe el nombre de dipolo activo.

A efectos de su estudio como parte integrante de un circuito, se pueden considerar dos tipos de generadores: los generadores de tensión y los generadores de intensidad.

#### a) Generador de tensión

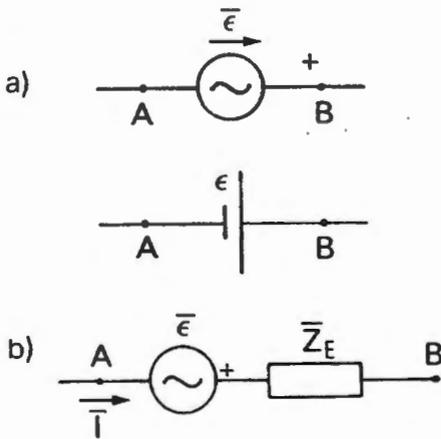


Fig. 24.1

Es un dipolo activo que mantiene entre sus polos una ddp (continua o alterna) independiente de la intensidad que lo atraviesa, e igual a su f.e.m.

$$\bar{U}_{BA} = \bar{\epsilon}$$

En la figura 24.1.a. aparecen los símbolos utilizados para representar un generador de tensión. El símbolo ~ indica que la f.e.m. varía senoidalmente. La flecha o el signo + señala cual es el polo de mayor potencial cuando la f.e.m. es positiva.

El generador así definido se llama generador de tensión ideal. En un generador real aparece una caída de tensión que, en la mayor parte de los casos prácticos, es aproximadamente proporcional a la intensidad que lo atraviesa. Esta circunstancia puede explicarse admitiendo que un generador real se comporta como uno ideal con una impedancia (impedancia interna) en serie (Fig. 24.1.b). Su ecuación característica es, por tanto

$$\bar{U}_{BA} = \bar{\mathcal{E}} - \bar{Z}_e \bar{I} \quad (24.1)$$

expresión en la que queda de manifiesto el carácter lineal de la función  $\bar{U}(\bar{I})$ .

### b) Generador de intensidad

Es un dipolo activo que hace circular entre sus polos una corriente  $\bar{I} = \bar{I}_o$ , independiente de la ddp a la que estén sometidos (Fig.24.2.a). La cantidad  $\bar{I}_o$  (complejo en corriente alterna y real en continua) es una característica del generador, denominada intensidad de cortocircuito. La flecha que acompaña al símbolo de este generador indica la polaridad del mismo.

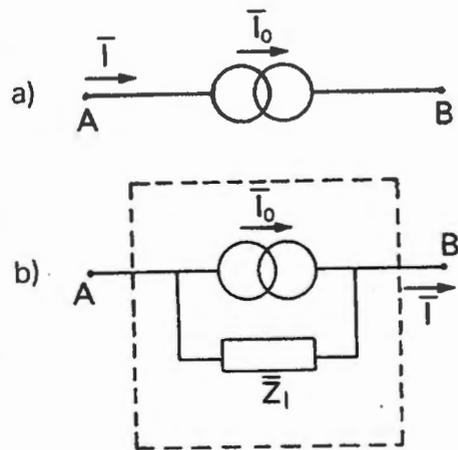


Fig. 24.2

En un generador de intensidad real, la intensidad  $\bar{I}$  sí depende de la ddp entre sus polos,  $\bar{U}_{AB}$ , de forma que la corriente  $\bar{I}$  disminuye al aumentar  $\bar{U}_{AB}$ . En muchas aplicaciones esta relación es lineal, situación que puede explicarse si se admite que un generador de intensidad real está constituido por uno ideal con una impedancia interna  $\bar{Z}_1$ , conectada en paralelo (Fig. 24.2.b). La intensidad suministrada por tal generador es

$$\bar{I} = \bar{I}_0 - \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_I} \quad (24.2)$$

Si se despeja  $\bar{U}_{AB}$  en (24.2) se obtiene

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_I \bar{I}_0 - \bar{Z}_I \bar{I}$$

expresión que, comparándola con la (24.1) pone de manifiesto que dos generadores reales, uno de tensión y otro de intensidad tienen la misma característica  $\bar{U}(\bar{I})$  si

$$\bar{\mathcal{E}} = \bar{I}_0 \bar{Z}_I \quad (24.3)$$

$$\bar{Z}_I = \bar{Z}_\mathcal{E}$$

es decir, los generadores son equivalentes si sus independencias internas son iguales y si la f.e.m. del generador de tensión es igual al producto de la impedancia del de intensidad por su intensidad de cortocircuito.

### 24.2.2. Receptores

Como ya se ha indicado anteriormente, se denomina dipolo pasivo a un elemento que absorbe energía de la corriente eléctrica. Entre los dipolos pasivos se encuentra la resistencia, que disipa energía eléctrica por efecto Joule, la autoinducción, que la almacena en su campo magnético, el condensador que la almacena en su campo eléctrico, y el dipolo denominado **receptor**.

El receptor de un dipolo que transforma parte de la energía eléctrica absorbida en otra forma de energía distinta de la calorífica producida por efecto Joule. Así, por ejemplo son receptores los motores de corriente alterna continua y los acumuladores.

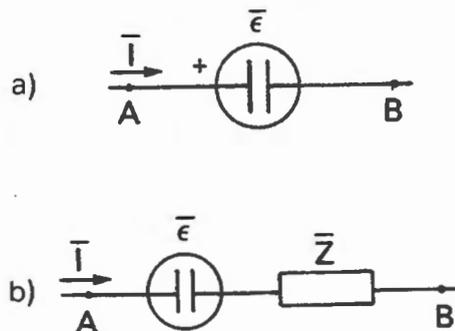


Fig. 24.3

En la figura 24.3.a. se muestra el símbolo utilizado para representar a un receptor. El receptor ideal se caracteriza por su fuerza contraelectromotriz (f.c.e.m.)  $\bar{\mathcal{E}}$ , que es independiente de la intensidad que lo atraviesa. En estas condiciones, la ddp en bornes del receptor es

$$\bar{U}_{AB} = \bar{\mathcal{E}}$$

En los receptores reales y lineales, la tensión  $\bar{U}_{AB}$  es función de  $\bar{I}$ :

$$\bar{U}_{AB} = \bar{\mathcal{E}} + \bar{I}\bar{Z} \tag{24.4}$$

donde  $\bar{Z}$  es la impedancia interna del receptor. La expresión (24.4) pone de manifiesto que un receptor real equivale a uno ideal con una impedancia  $\bar{Z}$  conectada en serie (figura 24.3.b.).

### 24.3. Métodos de resolución de redes

Sea una red con  $n$  nudos y  $r$  ramas. Como se ha indicado anteriormente, la resolución de la red consiste en determinar las intensidades,  $\bar{I}_k$ , que circulan por las ramas o bien las diferencias de potencial  $\bar{U}_{jk}$  entre los dos nudos de cada rama.

Para plantear el sistema de ecuaciones que permitan calcular dichas incógnitas ( $\bar{I}_k$  o  $\bar{U}_{jk}$ ) se utilizarán las leyes de Kirchhoff: ley de los nudos y ley de las mallas, que han sido establecidas en lecciones anteriores.

A partir de la ley de los nudos se puede escribir una ecuación para cada nudo, excepto uno. Así, para el nudo  $k$ -ésimo esta ecuación se escribe como

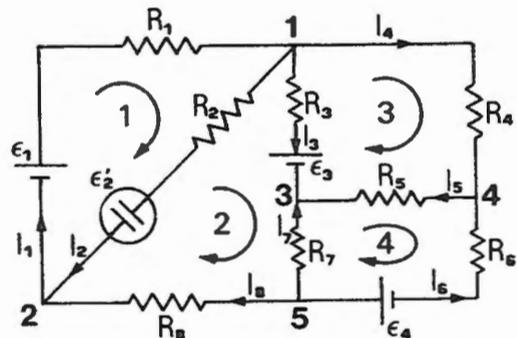


Fig. 24.4

$$\sum_j \bar{I}_{jk} = 0 \quad (24.5)$$

donde  $\bar{I}_{jk}$  es la corriente que circula por la rama comprendida entre los nudos  $j$  y  $k$ . Esta intensidad debe llevar signo distinto según entre o salga del nudo.

La ley de los nudos proporciona, únicamente,  $n - 1$  ecuaciones lineales independientes pues sumando  $n - 1$  ecuaciones de nudo se obtiene la ecuación del nudo que falta.

A partir de la segunda ley de Kirchhoff, ley de las mallas, se pueden escribir las  $r - (n - 1)$  ecuaciones restantes. Así, para una malla cualquiera de la red, por ejemplo la malla 2 de la figura 24.4, dicha ecuación se escribe como

$$U_{13} + U_{35} + U_{52} + U_{21} = 0$$

y sustituyendo los valores de cada ddp, resulta

$$I_3 R_3 + \mathcal{E}_3 - I_7 R_7 + I_8 R_8 - I_2 R_2 - \mathcal{E}'_2 = 0$$

ecuación que puede escribirse como

$$-\mathcal{E}_3 + \mathcal{E}'_2 = I_3 R_3 - I_7 R_7 + I_8 R_8$$

o en general

$$\sum_{\text{malla}} \bar{\mathcal{E}}_i = \sum_{\text{ramas}} \bar{I}_k \bar{Z}_k \quad (24.6)$$

donde ambos sumatorios son sumas algebraicas. Las  $\bar{\mathcal{E}}_i$  representan las f.e.m. y f.c.e.m. de los generadores y receptores que hay en las ramas de la malla, mientras que  $\bar{I}_k$  es la intensidad supuesta para la rama  $k$  de la malla y  $\bar{Z}_k$  es su impedancia equivalente. El sumatorio en  $k$  se extiende a todas las ramas de la malla considerada.

Los signos de las  $\bar{\mathcal{E}}_i$  e  $\bar{I}_k$  vienen determinados por el sentido de referencia establecido para la malla (sentido de las agujas del reloj en el ejemplo de la figura 24.4). Así, la f.e.m. de los generadores y las f.c.e.m. de los motores deben llevar el

signo del polo de salida en el sentido de referencia. La intensidad  $\bar{I}_k$  es positiva si tiene el mismo sentido que el de referencia y negativa si tiene sentido opuesto. El signo de las impedancias  $\bar{Z}_k$  no se modifica .

En la red de la figura, el número de mallas simples es 4, por lo que se pondrán plantear 4 ecuaciones de malla que, junto con las  $4 = (5 - 1)$  ecuaciones de nudo, proporcionan un sistema con 8 ecuaciones y 8 incógnitas.

Hay que señalar que en el planteamiento de dicho sistema se ha supuesto el sentido de las corrientes de rama. Este aspecto es importante en los circuitos de corriente continua con receptores no polarizados. En efecto, para que la solución obtenida sea aceptable, es necesario que la intensidad de corriente que atraviesa un receptor entre por el polo positivo fijado a priori. Si dicha intensidad resultase negativa es preciso cambiar su polaridad y repetir los cálculos.

En definitiva, la aplicación directa de las leyes de Kirchhoff permite plantear el sistema de ecuaciones para el cálculo de las intensidades de las ramas del circuito. Sin embargo, este método es , en general, engorroso ya que el número de ecuaciones (y de incógnitas) puede ser elevado incluso en circuitos sencillos. A continuación se desarrollarán dos métodos que, partiendo también de las ecuaciones de Kirchhoff, permiten la resolución de redes simplificando notablemente los cálculos. Dichos métodos son el de las corrientes de mallas y el método de las tensiones en los nudos.

### 24.3.1. Método de las corrientes de malla

Sea una red plana con  $n$  nudos y  $r$  ramas. Puede demostrarse que el número de mallas simples de la red es  $m = r - (n - 1)$ , tal como se ha admitido implícitamente en la resolución por aplicación directa de las leyes de kirchhoff. Además, las  $m$  ecuaciones de malla que se plantean son linealmente independientes.

El método de las corrientes de malla consiste en definir unas corrientes ficticias asociadas a cada malla,  $\bar{J}_k$  ( $k = 1, 2, \dots, m$ ), de modo que, por aplicación de la segunda ley de kirchhoff puedan establecerse  $m$  ecuaciones para su determinación y, a partir de éstas, obtener los valores de las intensidades reales.

Dichas corrientes de malla se definen de forma que, en las ramas que pertenecen a una sola malla, la intensidad coincide con la de malla. Así, en la figura 24.5, la

rama CA pertenece únicamente a la malla i por lo que la intensidad que circula por ella es

$$\bar{I}_{CA} = \bar{J}_i$$

Por el contrario, en las ramas que pertenecen a dos mallas, la AB por ejemplo, la intensidad que circula por ella es

$$\bar{I}_{AB} = \bar{J}_i - \bar{J}_k$$

es decir, la suma algebraica de las corrientes de las mallas afectadas.

En adelante se supondrá que todas las corrientes ficticias de malla tienen el mismo sentido. En estas condiciones, el plantear la segunda ley de Kirchhoff para la malla i-ésima, cuya intensidad ficticia es  $\bar{J}_i$ , la ddp entre los extremos de cada una de sus ramas puede tomar dos expresiones distintas

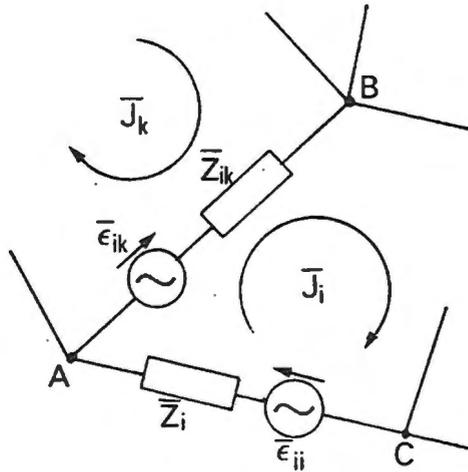


Fig. 24.5

- a) Si la rama en cuestión sólo pertenece a la malla i

$$\bar{U}_{CA} = \bar{Z}_i \cdot \bar{J}_i - \bar{E}_{ii}$$

- b) Si la rama pertenece a la malla i y a la k

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_{ik} (\bar{J}_i - \bar{J}_k) - \bar{E}_{ik}$$

En ambas expresiones, las f.e.m. deberán llevar el signo correspondiente según el sentido de referencia (sentido de las corrientes ficticias).

Sumando las ddp correspondientes a todas las ramas de la malla considerada se obtiene la ecuación de la malla k:

$$0 = \bar{J}_i \bar{Z}_{ii} - \sum_{k=i} \bar{J}_k Z_{ik} - \bar{\epsilon}_i$$

o bien

$$\bar{\epsilon}_i = \bar{J}_i \bar{Z}_{ii} - \sum_{k=i} \bar{J}_k Z_{ik} \tag{24.7}$$

donde

$\bar{\epsilon}_i$  es la suma algebraica de todas las f.e.m. de la malla i.

$\bar{Z}_{ii}$  es la suma de todas las impedancias de la malla i.

$\bar{Z}_{ik}$  es la suma de las impedancias comunes a la malla i y a la k.

El signo menos que afecta a los términos con  $\bar{J}_k$  se debe a que en las ramas comunes las intensidades de malla circulan en sentidos opuestos (recuérdese que se ha supuesto que todas las corrientes ficticias llevan el mismo sentido).

Escribiendo la ecuación (24.7) para las m mallas simples de la red, se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{bmatrix} \bar{\epsilon}_1 \\ \bar{\epsilon}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{\epsilon}_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Z}_{11} & -\bar{Z}_{12} & -\bar{Z}_{13} & \cdot & \cdot & \cdot & -\bar{Z}_{m1} \\ -\bar{Z}_{21} & \bar{Z}_{22} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ -\bar{Z}_{m1} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \bar{Z}_{mm} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{J}_1 \\ \bar{J}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{J}_m \end{bmatrix} \tag{24.8}$$

o, en forma reducida

$$(\bar{\epsilon}_i) = (\bar{Z}_{ik})(\bar{J}_k) \tag{24.9}$$

donde  $(\bar{\epsilon}_i)$  es la matriz de f.e.m.,  $(\bar{Z}_{ik})$  es la matriz de impedancias y  $(\bar{J}_k)$  la matriz de intensidades de malla.

Evidentemente la matriz de impedancias es simétrica, ya que  $\bar{Z}_{ik} = \bar{Z}_{ki}$ . Todos sus elementos, excepto los de la diagonal principal, deben llevar signo negativo.

Resolviendo el sistema (24.8) se obtienen las intensidades de malla. Así, la correspondiente a la malla  $i$  es

$$\bar{J}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_{ik}}{\bar{D}} \bar{E}_k \quad (24.10)$$

siendo  $\bar{D}$  el determinante de la matriz de impedancias y  $\bar{D}_{ik}$  el determinante adjunto del elemento  $\bar{Z}_{ik}$  de la matriz de impedancias. Una vez calculadas las  $\bar{J}_k$  se determinan las intensidades reales como se ha indicado anteriormente.

Finalmente, hay que indicar que, en el caso de que en una rama haya una fuente de intensidad  $(\bar{I}_0, \bar{Z}_1)$ , se deberá sustituir por la equivalente de tensión, según las ecuaciones (24.3).

24.3.2. Método de las tensiones en los nudos

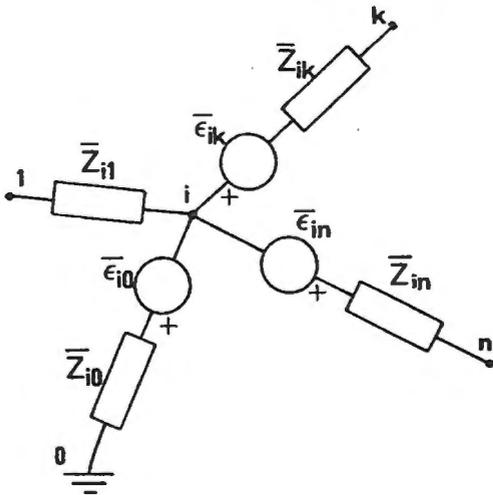


Fig. 24.6

El método de las tensiones en los nudos utiliza la primera ley de Kirchoff para la determinación de las diferencias de potencial entre los dos nudos de cada rama. Para ello, se elige un nudo cualquiera de la red como referencia, asignándole el número 0 y se numeran los restantes nudos. A cada uno de ellos se le asigna una tensión  $\bar{U}_i$ , que representa la ddp entre el nudo  $i$  y el de referencia. La ddp entre dos nudos  $i$  y  $k$  de una rama,  $\bar{U}_{ik}$ , es

$$\bar{U}_{ik} = \bar{U}_i - \bar{U}_k \quad (24.11)$$

El problema consiste, pues, en determinar las tensiones  $\bar{U}_i$  de cada nudo.

Supóngase que la red tiene  $n + 1$  nudos; apliquemos la ley de los nudos al nudo  $i$ -ésimo. La corriente que entra al nudo  $i$  desde el  $k$  puede escribirse a partir de la ddp  $\bar{U}_{ki}$

$$\bar{U}_{ki} = \bar{I}_{ki} \bar{Z}_{ik} - \bar{\epsilon}_{ik} \quad (24.12)$$

donde  $\bar{Z}_{ik}$  es la impedancia equivalente de la rama  $i - k$  y  $\bar{\epsilon}_{ik}$  es la suma de las fuerzas electromotrices de dicha rama. Las  $\bar{\epsilon}_{ik}$  tienen signo positivo cuando al ir de  $k$  hacia  $i$  se sale por el polo positivo; en caso contrario su signo es negativo. Despejando  $\bar{I}_{ki}$  de dicha ecuación se obtiene

$$\bar{I}_{ki} = (\bar{U}_k - \bar{U}_i) \bar{Y}_{ik} + \bar{\epsilon}_{ik} \bar{Y}_{ik} \quad (24.13)$$

donde  $\bar{Y}_{ik}$  es la admitancia equivalente de la rama  $ik$ . Sumando las  $\bar{I}_{ki}$  para todas las ramas que concurren en el nudo  $i$  se obtiene

$$0 = \sum_{k=i} (\bar{U}_k - \bar{U}_i) \bar{Y}_{ik} + \sum_{k=i} \bar{\epsilon}_{ik} \bar{Y}_{ik}$$

o bien, operando

$$\sum_{k=i} (\bar{\epsilon}_{ik} \bar{Y}_{ik}) = \bar{U}_i (\sum_{k=i} \bar{Y}_{ik}) - \sum_{k=i} \bar{U}_k \bar{Y}_{ik} \quad (24.14)$$

y, llamando

$$\bar{I}_i = \sum_{k=i} \bar{\epsilon}_{ik} \bar{Y}_{ik}$$

$$\bar{Y}_{ii} = \sum_{k=i} \bar{Y}_{ik}$$

resulta

$$\bar{I}_i = \bar{U}_i \bar{Y}_{ii} - \sum_{k=i} \bar{U}_k \bar{Y}_{ik} \quad (24.15)$$

El primer miembro de esta ecuación es la suma de las intensidades nominales ( $\bar{\mathcal{E}}_{ik} \bar{Y}_{ik}$ ) de los generadores y receptores que se encuentran en las ramas que concurren en el nudo  $i$ . El signo de cada intensidad será positivo cuando el polo positivo del elemento apunte hacia el nudo  $i$  y negativa en caso contrario. Así en el ejemplo de la figura 24.6,  $I_i$  sería, suponiendo que no hay más ramas que las dibujadas.

$$\bar{I}_i = \bar{\mathcal{E}}_{ik} \bar{Y}_{ik} - \bar{\mathcal{E}}_{in} \bar{Y}_{in} - \bar{\mathcal{E}}_{io} \bar{Y}_{io}$$

El factor  $\bar{Y}_{ii}$  representa la suma de las admitancias de todas las ramas que concurren en el nudo  $i$ . En el ejemplo citado

$$\bar{Y}_{ii} = \bar{Y}_{i1} + \bar{Y}_{ik} + \bar{Y}_{in} + \bar{Y}_{io}$$

Finalmente, los factores  $\bar{Y}_{ik}$  representan la suma de las admitancias de las ramas conectadas entre los nudos  $i$  y  $k$  (puede haber más de una, en los circuitos con ramas en paralelo). Obsérvese que, en la ecuación del nudo  $i$ , el término  $\bar{U}_i$  es positivo y todos los demás negativos.

Escribiendo la ecuación (24.15) para los  $n$  nudos de la red (excluyendo al de referencia) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{bmatrix} \bar{I}_1 \\ \bar{I}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{I}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{Y}_{11} & -\bar{Y}_{12} & \cdot & \cdot & \cdot & -\bar{Y}_{1n} \\ -\bar{Y}_{21} & \bar{Y}_{22} & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot \\ -\bar{Y}_{n1} & & & & & \bar{Y}_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{U}_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ \bar{U}_n \end{bmatrix} \tag{24.16}$$

o, en forma reducida

$$(\bar{I}_i) = (\bar{Y}_{ik})(\bar{U}_k) \tag{24.17}$$

donde  $(\bar{I}_i)$  es la matriz de intensidades de los dipolos activos y pasivos,  $(\bar{Y}_{ik})$  es la matriz de admitancias y  $(\bar{U}_k)$  la matriz de tensiones de nudo. Evidentemente, la matriz de admitancias es simétrica.

Resolviendo el sistema (24.16) se obtienen las tensiones de nudo, cuya expresión para la correspondiente al nudo  $i$  es

$$\bar{U}_i = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_{ik}}{\bar{D}} \bar{I}_k \quad (24.18)$$

donde  $\bar{D}$  es el determinante de la matriz de admitancias y  $\bar{D}_{ik}$  es el determinante adjunto del elemento  $ik$  de dicha matriz.

Una vez calculadas las tensiones de nudo, las corrientes de cada rama pueden determinarse a partir de la ecuación (24.12).

Hay que señalar que, en la expresión del método de las tensiones de nudo, se ha supuesto que todos los dipolos activos son fuentes de tensión. Por ello, las intensidades  $\bar{I}_i$  se expresaban como sumas de  $\bar{E}_{ik} \bar{Y}_{ik}$ . Si en alguna rama hubiese una fuente de intensidad, con intensidad de cortocircuito  $\bar{I}_0$ , la aportación de dicha rama a la intensidad  $\bar{I}_i$  sería precisamente,  $\bar{I}_0$  como puede comprobarse fácilmente a partir de la equivalencia entre fuentes de tensión y de intensidad.

### 24.4. Teoremas de equivalencia

Como se ha visto anteriormente, la aplicación de las leyes de Kirchhoff, o de los otros métodos estudiados, a la resolución de una red lineal da lugar al planteamiento de un sistema de ecuaciones lineales. Es decir, la relación entre las corrientes de las ramas de la red y las f.e.m. o f.c.e.m. de los generadores y receptores de la misma es lineal. Así, por ejemplo, en el método de las corrientes de malla, las intensidades ficticias de las mallas  $i$  y  $j$  son de la forma

$$\bar{J}_i = \sum_{k=1}^n \frac{D_{jk}}{\bar{D}} \bar{E}_k$$

$$\bar{J}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_{jk}}{\bar{D}} \bar{E}_k$$

Por tanto, la intensidad que circula por la rama común a las mallas  $i$  y  $j$  es

$$\bar{I}_{ij} = \bar{J}_i - \bar{J}_j = \sum_{k=1}^n \frac{\bar{D}_{ik} - \bar{D}_{jk}}{\bar{D}} \bar{\epsilon}_k$$

o bien

$$\bar{I}_{ij} = \sum_k \bar{\alpha}_{ij}^k \bar{\epsilon}_k \tag{24.19}$$

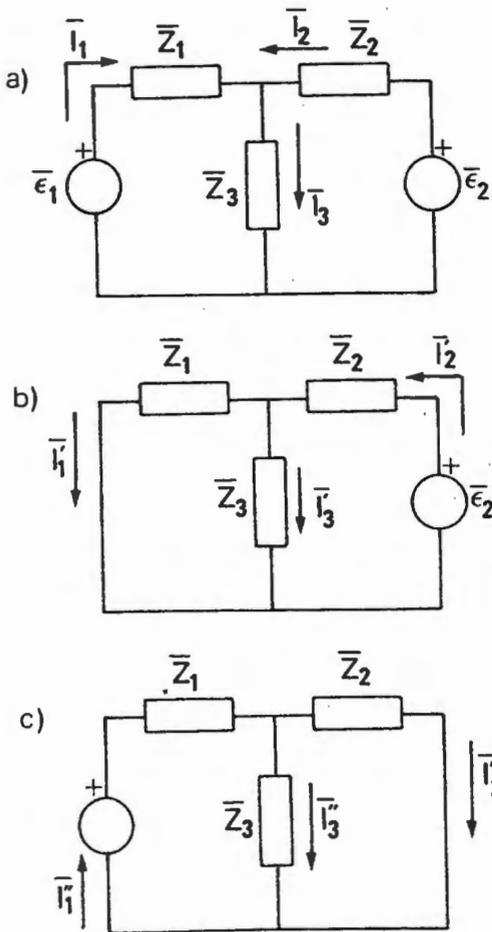


Fig. 24.7

donde los coeficientes  $\bar{\alpha}_{ij}^k$  son constantes y dependen, únicamente, de las impedancias de la red.

La linealidad de las leyes de kirchhoff tiene importantes consecuencias puesto que permite establecer algunos teoremas cuya aplicación simplifica, en muchos casos, la resolución de una red. En esta sección se estudiarán algunos de estos teoremas y se introducirán algunos conceptos relativos a las redes lineales muy utilizados en la teoría de circuitos.

**24.4.1. Teorema de superposición**

La intensidad de una rama de un circuito lineal que contenga dos o más generadores, es igual a la suma de las intensidades obtenidas para cada uno de los generadores

actuando separadamente. En los estados de la red cuya superposición da el estado original, las impedancias no deben cambiar.

La demostración de este teorema es inmediata a partir de la linealidad de las leyes de kirchhoff.

Para ilustrar la aplicación de este teorema considérese el circuito de la figura 24.7.a, con dos generadores. Dicha red puede descomponerse en dos estados b) y c) con las mismas impedancias pero un sólo generador cada uno (estados superpuestos). En estas condiciones se cumple que

$$\bar{I}_1 = -\bar{I}'_1 + \bar{I}''_1$$

$$\bar{I}_2 = \bar{I}'_2 - \bar{I}''_2$$

$$\bar{I}_3 = \bar{I}'_3 + \bar{I}''_3$$

#### 24.4.2. Otras consecuencias de la linealidad de las ecuaciones de kirchhoff

##### a) Admitancia de transferencia

Sea una red plana con  $m$  mallas. La corriente ficticia que circula por la malla  $i$  es, según (24.10), de la forma

$$\bar{J}_i = \sum_{k=1}^m \frac{\bar{D}_{ik}}{\bar{D}} \bar{\mathcal{E}}_k \quad (24.20)$$

Al coeficiente  $\bar{A}_{ik} = \bar{D}_{ik} / \bar{D}$  se le denomina admitancia de transferencia entre las mallas  $i$  y  $k$ . Representa la parte de  $\bar{J}_i$  que se debe a las f.e.m. de la malla  $k$ .

##### b) Admitancia de entrada

Sea una red pasiva (sin generadores) con terminales de salida en A y B. Si entre dichas terminales se conecta un generador de f.e.m.  $\bar{\mathcal{E}}_1$ , y se

numeran las mallas de forma que el número 1 sea la que contiene el generador, la intensidad ficticia de dicha malla es

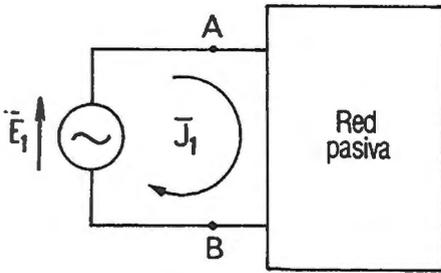


Fig. 24.8

$$\bar{J}_1 = \frac{\bar{D}_{11}}{\bar{D}} \bar{E}_1$$

ya que las f.e.m. de las restantes mallas son nulas.

Al coeficiente

$$\bar{Y}_{eq} = \frac{\bar{D}_{11}}{\bar{D}} \quad (24.21)$$

se le denomina admitancia equivalente, o admitancia de entrada, de la red pasiva entre A y B. Su inversa

$$\bar{Z}_{eq} = \frac{\bar{D}}{\bar{D}_{11}} \quad (24.22)$$

es la impedancia de entrada, o impedancia equivalente de la red pasiva entre A y B.

### c) Teorema de reciprocidad

Sea una red lineal con un sólo generador, situado en una rama que pertenece únicamente a la malla k. La intensidad ficticia de la malla i es, en estas condiciones,  $\bar{J}_i$ . El teorema de reciprocidad establece que dicha corriente es la misma que circularía por la malla k,  $\bar{J}_k$ , si el generador estuviese situado en una rama que pertenece sólo a la malla i.

La demostración de este teorema es sencilla. En efecto, la corriente  $\bar{J}_i$ , con el generador en la malla k es

$$\bar{J}_i = \bar{E} \frac{\bar{D}_{ik}}{\bar{D}}$$

mientras que la corriente de la malla k, con el generador en la malla i es

$$\bar{J}_k = \bar{\epsilon}_i \frac{\bar{D}_{ki}}{\bar{D}}$$

pero, puesto que  $\bar{D}$  es simétrica, es evidente que  $\bar{D}_{ik} = \bar{D}_{ki}$ , por lo que  $\bar{J}_k = \bar{J}_i$ .

c) **Circuito abierto**

Sea una red lineal activa, con terminales de salida en A y B. Calculemos la ddp entra A y B en circuito abierto,  $\bar{U}_{AB}$ . para ello supongamos que se conecta entre A y B una impedancia muy elevada  $\bar{Z}_1$ . Si se numeran las mallas del circuito que resulta, de forma que la malla que contiene a  $\bar{Z}_1$  sea la malla 1, la ddp entre A y B es

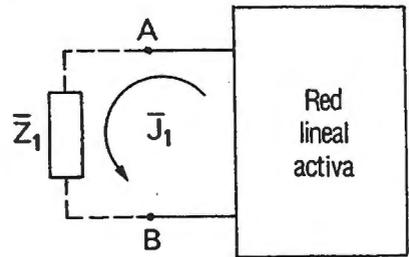


Fig. 24.9

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_1 \bar{J}_1 = \bar{Z}_1 \cdot \sum_i^n \bar{\epsilon}_i \frac{\bar{D}_{i1}}{\bar{D}}$$

Ahora bien, si  $\bar{Z}_1$  es muy grande (infinita), puede considerarse que el circuito entre A y B está abierto. Además, en este caso, pueden desprejarse las impedancias  $\bar{Z}_{i1}$  frente a  $\bar{Z}_{11}$ . Por tanto, el determinante  $\bar{D}$  es

$$\bar{D} = \bar{Z}_{11} \bar{D}_{11} = \bar{Z}_1 \bar{D}_{11}$$

y, sustituyendo en la expresión anterior, resulta

$$\bar{U}_{AB} = \bar{Z}_1 \sum_i \bar{\epsilon}_i \frac{\bar{D}_{i1}}{\bar{Z}_1 \bar{D}_{11}} = \sum_{i=1}^n \bar{\epsilon}_i \frac{\bar{D}_{i1}}{\bar{D}_{11}} \tag{24.23}$$

ecuación que permite calcular la tensión entre las terminales de una red lineal activa en circuito abierto.

d) Cortocircuito

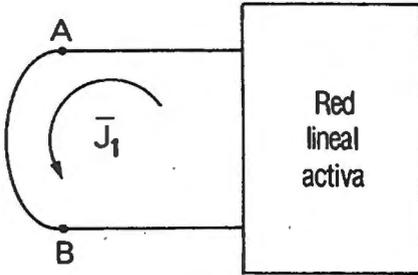


Fig. 24.10

Sea la red lineal activa del apartado anterior, con terminales de salida en A y B. Supóngase que dichas terminales se unen mediante un conductor de impedancia nula. Entonces se dice que hay un cortocircuito entre A y B.

Denominaremos  $\bar{J}_1$  a la intensidad que pasa por AB en el cortocircuito. Su valor es

$$\bar{J}_1 = \sum_{i=1}^n \epsilon_i \frac{\bar{D}_{i1}}{\bar{D}}$$

Ahora bien, teniendo en cuenta (24.23), resulta evidente que

$$\sum_I \bar{\epsilon}_i \bar{D}_{i1} = \bar{U}_{AB} \bar{D}_{11}$$

donde  $\bar{U}_{AB}$  es la ddp entre A y B en circuito abierto. Por tanto,  $\bar{J}_1$  vale

$$\bar{J}_1 = \bar{U}_{AB} \frac{\bar{D}_{11}}{\bar{D}} = \frac{\bar{U}_{AB}}{\bar{Z}_{eq}} \tag{24.24}$$

donde  $\bar{D} / \bar{D}_{11} = \bar{Z}_{eq}$  es impedancia equivalente entre A y B cuando se han anulado las f.e.m. de todos los generadores de la red, manteniendo todas las impedancias.

24.4.3. Teorema de Thevenin

La ecuación (24.24) es idéntica a la expresión de la corriente de cortocircuito de un generador cuya f.e.m. fuese  $\bar{U}_{AB}$  y con impedancia interna  $\bar{Z}_{eq} = \bar{D} / \bar{D}_{11}$ , relación que permite enunciar el teorema de Thevenin:

Un circuito lineal y activo con terminales de salida en A y B es equivalente a un generador de tensión real con f.e.m.  $\bar{\mathcal{E}}_T$  e impedancia interna  $\bar{Z}_T$ .  $\bar{\mathcal{E}}_T$  es igual a la ddp entre A y B en circuito abierto;  $\bar{Z}_T$  es igual a la impedancia equivalente entre A y B cuando se anulan las f.e.m. de todos los generadores de la red, manteniendo sus impedancias.

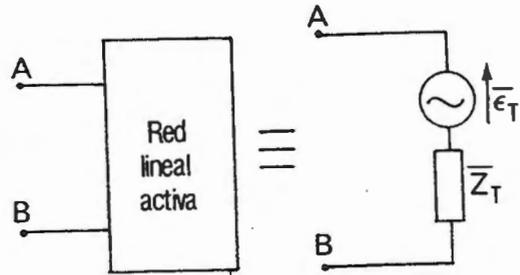


Fig. 24.11

#### 24.4.4. Teorema de Norton

Un circuito lineal y activo, con terminales de salida en A y B es equivalente a un generador de intensidad, con intensidad de cortocircuito  $\bar{I}_N$  e impedancia interna  $\bar{Z}_N$ . La  $\bar{I}_N$  es igual a la intensidad que circula de A a B unidos en cortocircuito;  $\bar{Z}_N$  es la impedancia equivalente entre A y B cuando se anulan las f.e.m. de todos los generadores de la red, manteniendo sus impedancias.

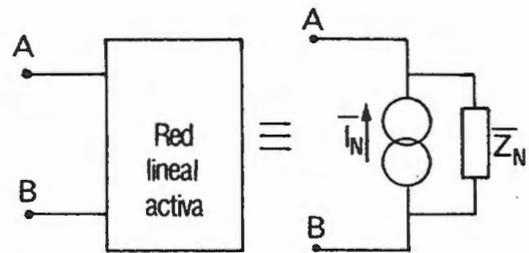


Fig. 24.12.

El teorema de Norton es una consecuencia del teorema de Thevenin, teniendo en cuenta la equivalencia entre generadores de tensión e intensidad.



## PROBLEMAS

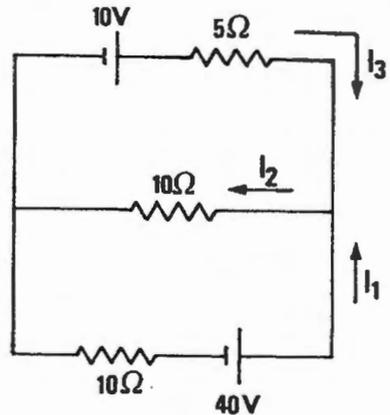
P.24.1 Resolver el circuito de la figura aplicando directamente las leyes de Kirchoff.

**SOLUCIÓN**

$$I_1 = 2'5 \text{ A}$$

$$I_2 = 1'5 \text{ A}$$

$$I_3 = -1 \text{ A}$$



**P.24.1**

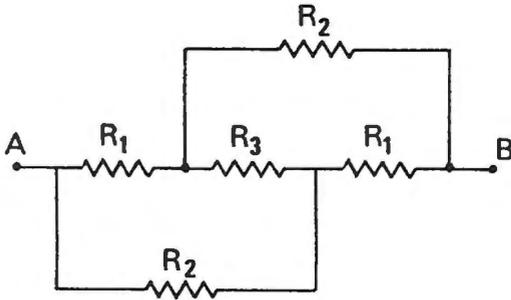
P.24.2. Sea un conjunto de  $n$  generadores de tensión, con f.e.m.  $\mathcal{E}_i$  y resistencia interna  $r_i$ . Calcular el generador equivalente

- a) Si se asocian en paralelo.
- b) Si se asocian en serie.

**SOLUCIÓN**

$$\text{a) } \mathcal{E} = r \sum_i \frac{\mathcal{E}_i}{r_i}; \quad r = 1 / \left( \sum_i 1 / r_i \right)$$

$$\text{b) } \mathcal{E}_i = \sum_i \mathcal{E}; \quad r_i = \sum_i r$$

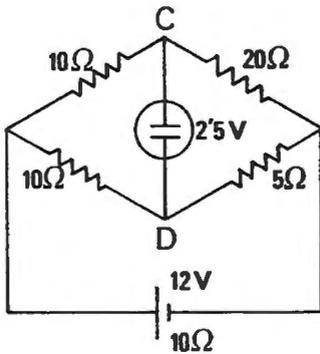


P.24.3

P.24.3. Dado el circuito pasivo de la figura, calcular la resistencia equivalente entre A y B.

**SOLUCIÓN**

$$R = \frac{R_1 R_3 + R_2 R_3 + 2R_1 R_2}{R_1 + R_2 + 2R_3}$$

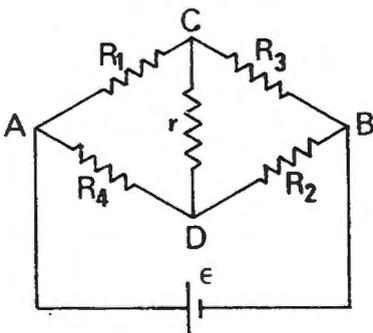


P.24.4

P.24.4. Dado el circuito de la figura, calcular la intensidad que circula, por el receptor.

**SOLUCIÓN**

El circuito no puede funcionar.



P.24.5

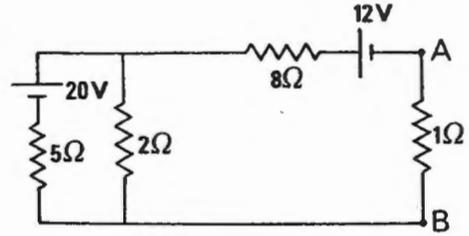
P.24.5. Dado el circuito de la figura, calcular la intensidad que circula, por la resistencia r.

**SOLUCIÓN**

$$I = \frac{\epsilon (R_1 R_2 - R_3 R_4)}{D}$$

$$D = (r + R_2 + R_3)(R_2 + R_4)(R_1 + R_3) - R_2^2 (R_1 + R_3) - R_3^2 (R_2 + R_4)$$

P.24.6. Dado el circuito de la figura, calcular la corriente que circula por la resistencia de  $1\ \Omega$  hallando previamente el generador equivalente a Thevenin entre A y B.

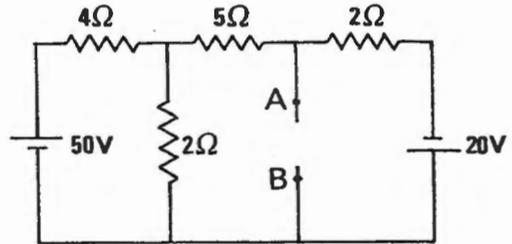


**SOLUCIÓN**

P.24.6

$$\mathcal{E}_T = 6'29\text{ V}; \quad R_T = 9'43\ \Omega; \quad I = 0'603\text{ A}$$

P.24.7. Hallar el circuito equivalente de Norton entre A y B en el circuito de la figura.



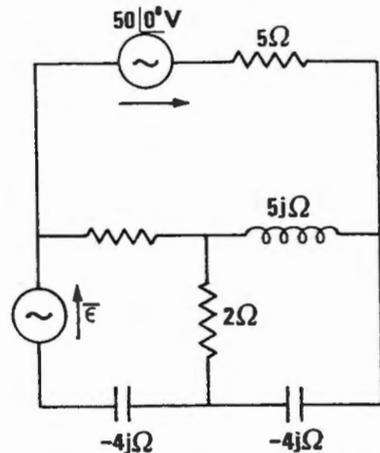
**SOLUCIÓN**

P.24.7

$$I_N = 7'37\text{ A}$$

$$R_N = 1'52\ \Omega$$

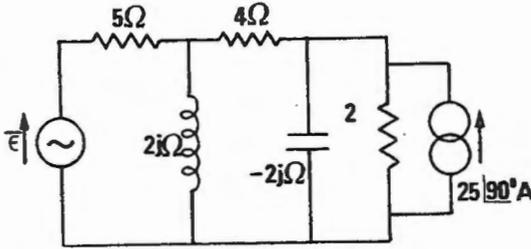
P.24.8. Dado el circuito de la figura, calcular el valor de  $\bar{\mathcal{E}}$  para que no circule corriente por la resistencia de  $5\ \Omega$ . (Utilizar el método de las mallas).



**SOLUCIÓN**

P.24.8

$$\bar{\mathcal{E}} = 42'9 \angle 144'5^\circ\text{ V}$$

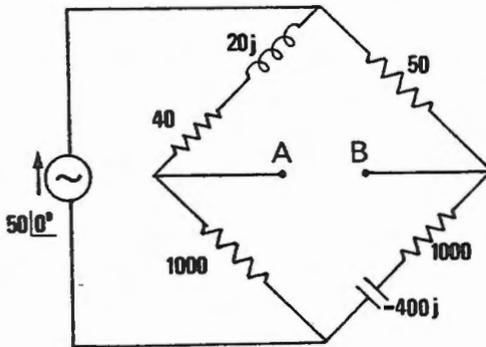


P.24.9

P.24.9. Dado el circuito de la figura, determinar el valor de la f.e.m.  $\bar{E}$  para que la intensidad de la resistencia de  $4 \Omega$  sea nula. Utilizar el método de las tensiones en los nudos.

**SOLUCIÓN**

$$\bar{E} = 95'2 \angle -23'2^\circ \text{ V}$$



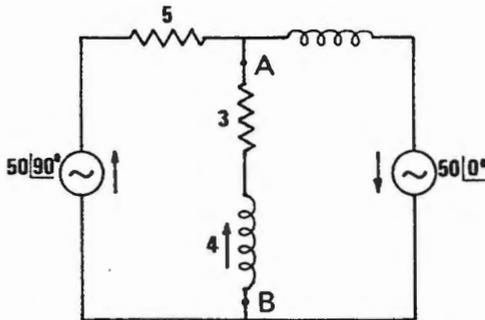
P.24.10

P.24.10. Hallar el circuito equivalente de Thevenin en los terminales AB del circuito.

**SOLUCIÓN**

$$\bar{E}_T = 0'2 \angle -36'9^\circ \text{ V}$$

$$\bar{Z}_T = 88'2 \angle 11'55^\circ \Omega$$



P.24.11

P.24.11. En el circuito de la figura, calcular la intensidad que circula por la impedancia  $3 + 4j$ , sustituyendo el circuito entre A y B por su equivalente de Norton.

**SOLUCIÓN**

$$\bar{Z}_N = 3'53 \angle 45^\circ \Omega$$

$$\bar{I}_N = 20 \angle -90^\circ \text{ A}$$

$$\bar{I} = 8'3 \angle 265'2^\circ \text{ A}$$

# CAPÍTULO 25

## RESONANCIA. FILTROS. CUADRIPOLOS

### 25.1. Resonancia en un circuito RLC serie

Sea un circuito RLC como el de la figura 25.1, sometido a una ddp alterna senoidal  $u = U_m \cos \omega t$ .

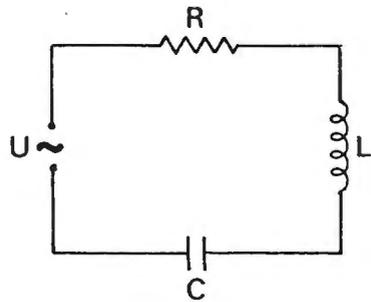


Fig. 25.1

La impedancia compleja del circuito es, como se ha visto en las lecciones anteriores

$$\bar{Z} = R + j(L\omega - 1/\omega C)$$

es decir, es una función de la pulsación de la corriente. Si se representan  $R$ ,  $X$  y  $Z$  en función de  $\omega$ , resulta una gráfica como la mostrada en la figura 25.2, donde queda patente que la resistencia del dipolo no depende de la frecuencia, la reactancia inductiva es proporcional a  $\omega$  y la reactancia capacitiva inversamente proporcional a la pulsación. La reactancia se anula para un determinado valor de  $\omega$ ,  $\omega_r$ , denominada pulsación de resonancia.

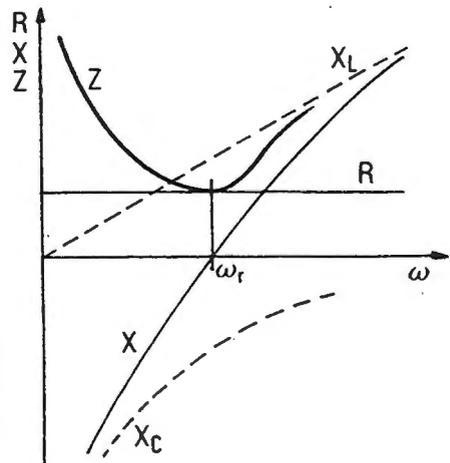


Fig. 25.2

Cuando la pulsación de la corriente es  $\omega_r$ , la impedancia es mínima,  $Z = R$ , y el circuito se encuentra en resonancia.

El valor de  $\omega_r$  depende de los dipolos del circuito. Su determinación es sencilla a partir de la condición de reactancia nula

$$L \omega_r = \frac{1}{C \omega_r} \rightarrow \omega_r = (LC)^{-1/2} \quad (25.1)$$

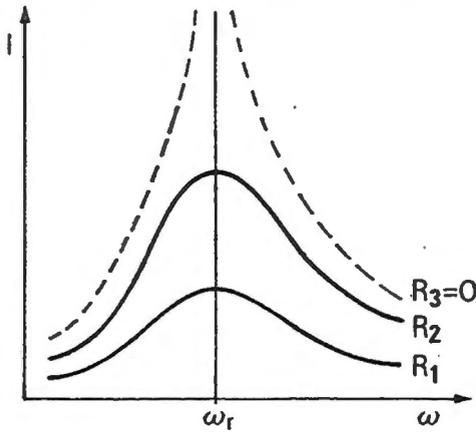
La frecuencia de resonancia es, por tanto,

$$\nu_r = \omega_r / 2\pi = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{1}{LC}} \quad (25.2)$$

Para un valor dado de la tensión eficaz de bornes del circuito  $U$ , la intensidad de corriente varía en función de la frecuencia, de manera inversa a la impedancia

$$I = U/Z$$

siendo  $I$  máxima para la pulsación de resonancia. En la figura 25.3 se muestra la variación  $I(\omega)$  para distintos valores de  $R$ . Obsérvese que  $I$  tiende a infinito en las proximidades de  $\omega_r$  cuando la resistencia del circuito es nula.



*Fig. 25.3*

En el estudio de circuitos RLC en resonancia son importantes los siguientes parámetros asociados a las características del mismo: su factor de calidad y la anchura de la banda pasante.

**a) Factor de calidad**

Se define como factor de calidad del circuito, para la pulsación de resonancia, a la relación

$$Q = 2\pi \frac{W_a}{W_d} \quad (25.3)$$

donde  $W_a$  es la energía máxima almacenada en el condensador o en la autoinducción, y  $W_d$  es la energía disipada en un período. En el circuito RLC serie, y para la pulsación de resonancia,  $W_a$  y  $W_d$  toman los siguientes valores

$$W_a = LI^2 = CU^2 \quad (25.4)$$

$$W_d = RI^2 T = 2\pi RI^2 / W_r \quad (25.5)$$

Sustituyendo (25.4) y (25.5) en (25.3), y teniendo en cuenta el valor de  $W_r$  dado por (25.1) resulta inmediato que

$$Q = \frac{W_r L}{R} = \frac{1}{W_r CR} = \frac{1}{R} \left( \frac{L}{C} \right)^{1/2} \quad (25.6)$$

**b) Anchura de la banda pasante**

Se denomina banda pasante al intervalo de pulsaciones  $[w_1, w_2]$  en la cual la potencia disipada en el circuito se mantiene por encima de la mitad de la potencia máxima. Evidentemente, en un circuito RLC serie, la máxima potencia disipada ocurre para  $w = w_r$ , ya que la intensidad es máxima en el circuito resonante y la resistencia  $R$  no depende de la pulsación.

Por tanto,  $P_{max} = I_r^2 R$ , donde  $I_r$  es la intensidad eficaz del circuito resonante. La potencia disipada para otra pulsación cualquiera es  $P = I^2 R$  en definitiva, la potencia  $P$  es la mitad de la máxima cuando la intensidad  $I$  es

$$I = I_r / \sqrt{2} \quad (25.7)$$

Sustituyendo  $I = U / Z$  e  $I_r = U / R$ , resulta

$$\frac{U}{[R^2 + (wL - 1/wC)^2]^{1/2}} = \frac{U}{R\sqrt{2}} \quad (25.8)$$

Igualando denominadores, introduciendo la variable  $x = w / w_r$  y teniendo en cuenta que, a partir de la definición de factor de calidad,  $w L = x Q R$  y  $1/w C = Q R/x$ , la expresión (25.8) puede escribirse como

$$1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2 = 2$$

o bien

$$x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Resolviendo esta ecuación se obtienen los valores de  $x_1$  y  $x_2$  (correspondientes a las pulsaciones  $w_1$  y  $w_2$ ) para los cuales la potencia es la mitad de la máxima, determinándose así la anchura de la banda pasante:

$$x_2 = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right) \tag{25.9}$$

$$x_1 = \frac{1}{2} \left( -\frac{1}{Q} + \sqrt{\frac{1}{Q^2} + 4} \right)$$

de donde se obtiene

$$x_2 - x_1 = \frac{1}{Q} \tag{25.10}$$

o bien, sustituyendo  $x_1 = w_1 / w_r$  y  $x_2 = w_2 / w_r$

$$w_2 - w_1 = \frac{w_r}{Q} \tag{25.11}$$

expresión que pone de manifiesto la relación existente entre el factor de calidad y la anchura de la banda pasante. Así, los circuitos con un factor de

calidad muy grande tienen una anchura de banda pasante pequeña, diciéndose entonces que el circuito es muy selectivo. En la figura 25.3, las curvas  $I(\omega)$  resultan tanto más apuntadas cuanto mayor es  $Q$ .

## 25.2. Tensión en los dipolos $R$ , $L$ y $C$ . Noción de filtro

Sea un circuito RLC serie como el de la figura 25.1, sometido a una tensión alterna senoidal de valor eficaz  $U$ . Tal como se ha visto en la sección anterior, la impedancia  $\bar{Z}$  y la corriente  $I$  que atraviesa dicho circuito son funciones de la pulsación  $\omega$ . Por tanto, la tensión de bornes de cada elemento también dependerá de  $\omega$ . En este apartado se analizarán dichas tensiones y se introducirá la noción de filtro eléctrico.

### 25.2.1. Resistencia

La ddp en bornes de la resistencia,  $U_R$  es

$$U_R = IR = \frac{UR}{Z}$$

y, teniendo en cuenta la expresión  $Z$  en función del factor de calidad y de la variable  $x = \omega / \omega_r$ , puede escribirse como

$$U_R = \frac{U}{\left[1 + Q^2 \left(x - 1/x\right)^2\right]^{1/2}} \quad (25.12)$$

función que toma valores nulos para  $x = 0$  y  $x = \infty$ , y que tiene un máximo en  $x = 1 (\omega = \omega_r)$ . En la figura 25.4 se representan las curvas  $U(x)$  para tres valores distintos del factor de calidad ( $Q > Q' > Q''$ ).

En los tres casos,  $U_R$  toma su valor máximo, igual a  $U$ , cuando la pulsación del circuito es la resonancia. Para frecuencias distintas a la de resonancia,  $U_R$  es menor que  $U$ . En la figura 25.4 queda patente que la anchura de la banda pasante

(pulsaciones para las que  $U_R \geq U\sqrt{2}$ ) es tanto menor cuanto mayor sea el factor de calidad  $Q$ .

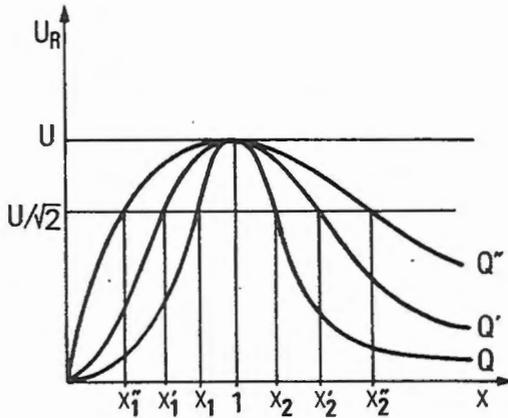


Fig. 25.4

Si en el circuito se toma como salida los bornes de la resistencia, y a la entrada se aplica una tensión alterna no senoidal (que puede ser descompuesta en una serie de señales senoidales de diferentes frecuencias), aquellas componentes con pulsación próxima a la de resonancia tomarán valores elevados, mientras que aquellas otras de pulsación muy diferente a  $w_r$  se verán fuertemente atenuadas en la salida.

En definitiva, el circuito RLC, con salida de bornes de la resistencia, sólo permite el paso de señales de frecuencias próximas a las de resonancia, atenuando fuertemente las restantes. La selectividad del circuito es mayor cuando la banda pasante sea estrecha, esto es, para valores elevados del factor de calidad  $Q$ .

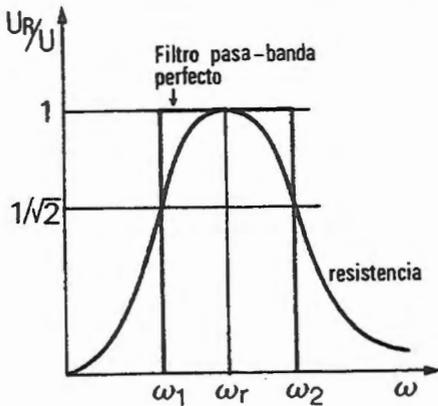


Fig. 25.5

Tal dispositivo recibe el nombre de filtro pasa-banda. En la figura 25.5 se representa la curva tensión salida/tensión entrada en la función de la pulsación para la resistencia y para un filtro pasa-banda perfecto. En el filtro perfecto, las señales con pulsaciones incluidas en la banda pasante no son atenuadas, mientras que las señales con pulsaciones mayores o menores son totalmente atenuadas.

25.2.2. Condensador

La ddp en bornes del condensador es

$$U_c = X_c I = \frac{X_c U}{Z}$$

y, teniendo en cuenta que  $w = w_r x$  y que  $Q = 1/w_r C R$ , se obtiene

$$U_c = U \frac{Q}{[x^2 + Q^2(1-x^2)^2]^{1/2}} \quad (25.13)$$

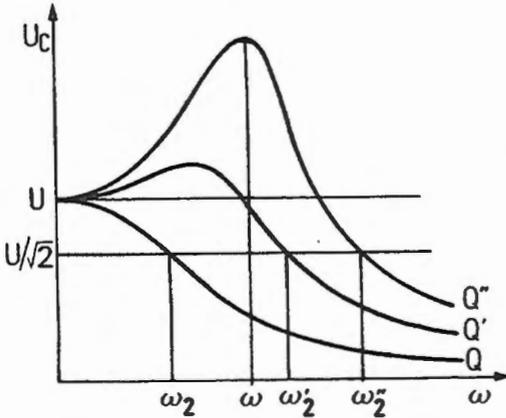


Fig. 25.6

en la que resulta que  $U_c$  es igual al producto de  $U$  por un factor denominado de sobretensión. Este factor depende de  $Q$  y de la pulsación, y puede tomar valores mayores que la unidad.

Para la pulsación de resonancia,  $x = 1$  y  $U_c = U \cdot Q$ , siendo iguales los factores de calidad y de sobretensión. En la figura 25.6 se representan las curvas  $U_c(w)$  para tres valores distintos del factor de calidad ( $Q < Q' < Q''$ ). En todos los casos,  $U_c$  es igual a  $U$  para  $w = 0$  y tiende a cero cuando  $w$  tiende a infinito. Además, si  $Q > \sqrt{2}$  puede demostrarse que la curva  $U_c(w)$  tiene un máximo en

$$w_m = w_r \left( 1 - \frac{1}{2Q^2} \right)^{1/2}$$

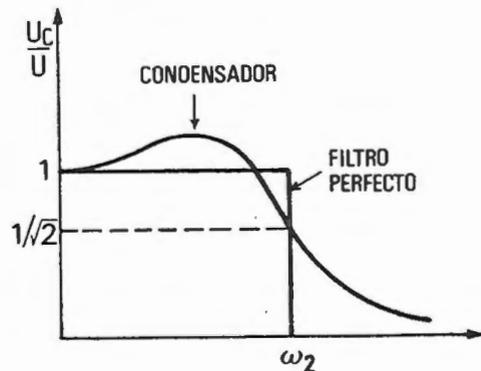


Fig. 25.7

Analizando dicha curva se observa que hay un valor  $\omega_2$  tal que, para  $\omega < \omega_2$ , el factor de sobretensión es mayor que  $1/\sqrt{2}$ . Por tanto, si se toman como salida los bornes del condensador, el dispositivo funcionaría como un filtro de pasa-baja, permitiendo el paso de señales con pulsación inferior a  $\omega_2$ , y atenuando fuertemente las de pulsaciones superiores. En la figura 25.7 se muestran las características de un filtro de pasa-baja perfecto, con una frecuencia de corte determinada, y la correspondiente a un condensador en un circuito RLC.

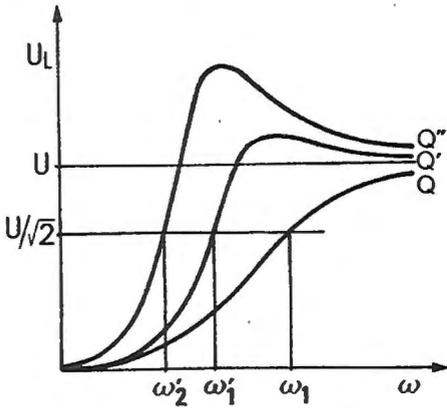


Fig. 25.8

y, siguiendo un razonamiento similar al utilizado en los casos anteriores se obtiene que

$$U_L = x_L I = \frac{\omega L U}{Z}$$

25.2.3. Autoinducción

La ddp en bornes de la autoinducción es

$$U_L = U \frac{Qx}{[1 + Q^2(x - 1/x)^2]^{1/2}} \tag{25.14}$$

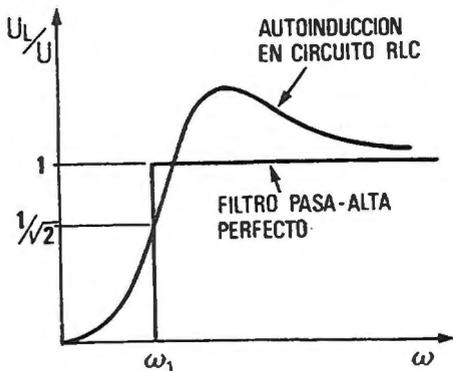


Fig. 25.9

en la que resulta que  $U_L$  es el producto de  $U$  por un factor de sobretensión, función de  $Q$  y de  $x$ .

Comparando (25.14) con (25.13) se puede ver que  $U_L(x)$  es igual a  $U_c(1/x)$ . Por tanto, la curva  $U_L(x)$  será similar a las mostradas en la figura 25.8. En ellas se observa que existe una pulsación  $\omega_1$  por debajo

de la cual  $U_L$  es inferior a  $U/\sqrt{2}$ . Es decir, un circuito RLC, en el que se tome como salida los bornes de la autoinducción, se comporta como un filtro de pasa-alta, que atenúa las señales de pulsación inferior a una dada,  $w_1$ , y transmite las de frecuencia superior. En la figura 25.9 se representa la curva característica de un filtro de pasa-alta perfecta, con frecuencia de corte  $w_1$ .

### 25.3. Resonancia en un circuito RLC paralelo. Circuito anti-resonante

Sea un circuito RLC con los tres elementos asociados en paralelo, y sometido a una ddp alterna senoidal de pulsación  $w$ . La admitancia del circuito es

$$\bar{Y} = \frac{1}{R} + j\left(Cw - \frac{1}{Lw}\right)$$

Se dice que el circuito se encuentra en resonancia cuando la susceptancia es nula

$$Cw_r = \frac{1}{w_r L}$$

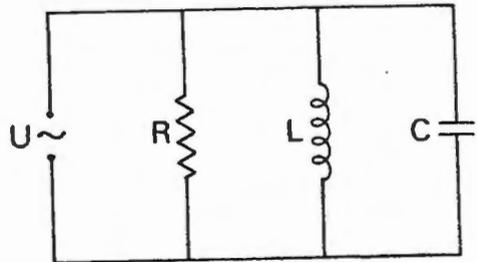


Fig. 25.10

es decir, la resonancia ocurre para la pulsación

$$w_r = (L C)^{-1/2} \tag{25.15}$$

igual a la del circuito RLC serie. Para dicha pulsación, la admitancia del circuito es mínima  $Y = 1/R$ , y la intensidad, supuesta constante  $U$ , es también mínima ( $I = Y U$ ):

$$I_{\min} = \frac{U}{R} \tag{25.16}$$

Obsérvese que, si  $R$  es muy grande, la intensidad que atraviesa el circuito puede ser muy pequeña para frecuencias próximas a las de resonancia. Por ello, a este circuito se le denomina circuito tapón o antirresonante. El factor de calidad es

$$Q' = \frac{R}{L \omega_r} \tag{25.17}$$

o sea, el inverso del obtenido para el circuito en serie.

En el circuito paralelo las intensidades juegan un papel análogo a las tensiones en el circuito en serie. Así, la corriente  $I_R$  es  $I_R = U / R$ , mientras que en  $L$  y  $C$  las corrientes  $I_L$  e  $I_C$  se calculan como el producto de la corriente total  $I$  por un factor de sobreintensidad que depende de  $Q$  y de  $x$ .

### 25.4. Circuito doblemente sintonizado

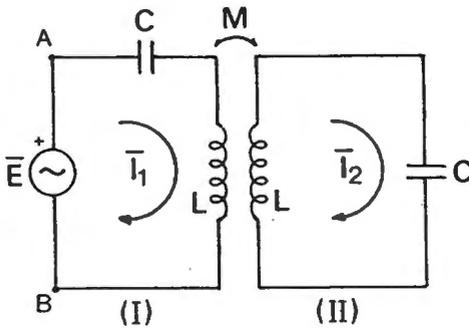


Fig. 25.11

Un caso interesante de resonancia es la que se produce en dos circuitos acoplados magnéticamente. En este apartado se analizará el caso más simple, representado en la figura 25.11, en el que los circuitos tienen resistencia nula y sus elementos  $L$  y  $C$  son idénticos. En estas condiciones, las pulsaciones de resonancia para cada circuito por separado son iguales  $\omega_r = (L C)^{-1/2}$ , diciéndose entonces que el circuito es doblemente sintonizado.

Para determinar las condiciones de resonancia es preciso calcular la impedancia equivalente del circuito en función de la pulsación. Así, escribiendo las ecuaciones de las dos mallas

$$\bar{E} = \left( \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) \bar{I}_1 + jM\omega \bar{I}_2$$

$$0 = \left( \frac{1}{jC\omega} + jL\omega \right) \bar{I}_2 + jM\omega \bar{I}_1$$

y, eliminando  $\bar{I}_2$  se obtiene

$$\bar{\epsilon} = \left[ j \frac{(Lw - 1/Cw)^2 - M^2 w^2}{(Lw - 1/Cw)} \right] \bar{I}_1 = \bar{Z} \bar{I}_1 \quad (25.18)$$

La impedancia equivalente del circuito es, por tanto,

$$\bar{Z} = j \frac{(Lw - 1/Cw)^2 - M^2 w^2}{(Lw - 1/Cw)} \quad (25.19)$$

es decir, no tiene parte real y su módulo toma valores nulos cuando

$$Lw - \frac{1}{wC} = \pm Mw$$

o sea, para las pulsaciones

$$w_1 = [(L + M)C]^{1/2} \quad (25.20)$$

$$w_2 = [(L - M)C]^{1/2}$$

soluciones válidas ya que  $M \leq L$ .

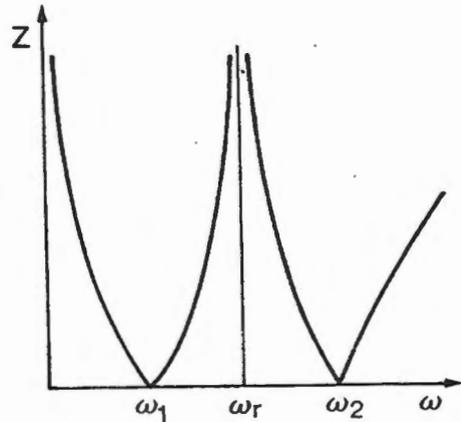


Fig. 25.12

Por otra parte,  $Z$  tiende a infinito para tres valores de  $w$ :  $w = 0$ ,  $w \rightarrow \infty$  y  $w = w_r = (LC)^{-1/2}$ . En la figura 25.12 se representa el módulo de  $\bar{Z}$  en función de  $w$  para un circuito doblemente sintonizado.

El circuito se encuentra en resonancia cuando la impedancia sea mínima, es decir para las pulsaciones  $w_1$  y  $w_2$  anteriormente calculadas. Obsérvese que dichas pulsaciones son, respectivamente, inferior y superior a la pulsación de resonancia,  $w_r$ , correspondiente a cada circuito por separado.

Cuando la señal aplicada tenga la pulsación  $w_r$ , entonces la impedancia del circuito es infinita y éste se comporta como un circuito tapón.

### 25.5. Cuadripolos

Se denomina cuadripolo a un circuito con dos pares de terminales EE' y SS' denominadas de entrada y salida respectivamente.

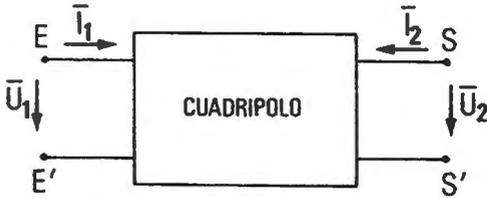


Fig. 25.13

El esquema utilizado para representar un cuadripolo está reflejado en la figura 25.13. Se denomina corriente de entrada,  $I_1$ , a la intensidad que entra por E y sale por E'. Del mismo modo,  $I_2$  es la corriente que entra por S y sale por S'. La tensión de entrada es  $\bar{U}_1 = \bar{U}_E - \bar{U}_{E'}$ ,

mientras que la de salida es  $\bar{U}_2 = \bar{U}_S - \bar{U}_{S'}$ .

En este apartado se limitará el estudio de cuadripolos al caso de cuadripolos pasivos y lineales, es decir, constituidos por elementos lineales y sin generadores.

Las relaciones entre tensiones y corrientes en cuadripolo pueden establecerse teniendo en cuenta la linealidad de sus componentes. Así, las relaciones entre las tensiones y corrientes son de la forma

$$\bar{U}_1 = \bar{Z}_{11} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{12} \bar{I}_2 \tag{25.21}$$

$$\bar{U}_2 = \bar{Z}_{21} \bar{I}_1 + \bar{Z}_{22} \bar{I}_2$$

donde los coeficientes  $\bar{Z}_{ij}$  reciben los siguientes nombres:

$$\bar{Z}_{11} = \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_1} \right|_{\bar{I}_2 = 0} \quad = \text{Impedancia de entrada con la salida en circuito abierto}$$

$$\bar{Z}_{12} = \left. \frac{\bar{U}_1}{\bar{I}_2} \right|_{\bar{I}_1 = 0} \quad = \text{Impedancia de transferencia con la entrada a circuito abierto}$$

$$\bar{Z}_{21} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_1} \Big|_{\bar{I}_2=0} \quad = \text{Impedancia de transferencia con la salida a circuito abierto}$$

$$\bar{Z}_{22} = \frac{\bar{U}_2}{\bar{I}_2} \Big|_{\bar{I}_1=0} \quad = \text{Impedancia de salida con la entrada a circuito abierto}$$

De modo similar, pueden expresarse las corrientes de entrada y salida en función de las tensiones:

$$\bar{I}_1 = \bar{Y}_{11} \bar{U}_1 + \bar{Y}_{12} \bar{U}_2 \tag{25.22}$$

$$\bar{I}_2 = \bar{Y}_{21} \bar{U}_1 + \bar{Y}_{22} \bar{U}_2$$

donde  $\bar{Y}_{11}$ ,  $\bar{Y}_{12}$ ,  $\bar{Y}_{21}$  e  $\bar{Y}_{22}$  son, respectivamente, las admitancias de entrada (con salida en cortocircuito), de transferencia (con entrada en cortocircuito), de transferencia (con salida en cortocircuito) y de salida (con entrada en cortocircuito).

En numerosos casos, es conveniente expresar la tensión y corriente de entrada en función de la tensión y corriente de salida:

$$\bar{U}_1 = \bar{A} \bar{U}_2 - \bar{B} \bar{I}_2 \tag{25.23}$$

$$\bar{I}_1 = \bar{C} \bar{U}_2 - \bar{D} \bar{I}_2$$

donde  $\bar{A}$ ,  $\bar{B}$ ,  $\bar{C}$ , y  $\bar{D}$  son los denominados coeficientes de transmisión, cuyos valores pueden ser fácilmente despejados de (25.21), obteniéndose

$$\bar{A} = \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Z}_{21}} \quad \bar{B} = \frac{\bar{Z}_{11} \bar{Z}_{22} - \bar{Z}_{12} \bar{Z}_{21}}{\bar{Z}_{21}}$$

$$\bar{C} = \frac{1}{\bar{Z}_{21}} \quad \bar{D} = \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Z}_{21}}$$

Las ecuaciones (25.22) pueden escribirse matricialmente de la forma

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{U}_2 \\ -\bar{I}_2 \end{bmatrix} \tag{25.24}$$

donde

$$\bar{T} = \begin{bmatrix} \bar{A} & \bar{B} \\ \bar{C} & \bar{D} \end{bmatrix} \tag{25.25}$$

es la matriz de transmisión del cuadripolo.

**25.5.1. Asociación de cuadripolos**

Los cuadripolos pueden asociarse **en serie**, cuando tienen la misma intensidad de entrada (y la misma de salida), en **paralelo**, cuando las tensiones de entrada y salida son iguales, y en **cascada**.

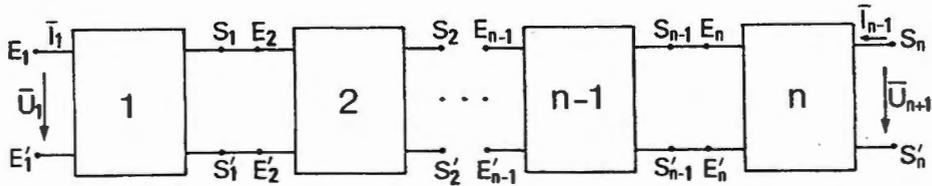


Fig. 25.14

La asociación de cascada consiste en conectar la salida de un cuadripolo a la entrada del siguiente, tal como se muestra en la figura 25.14. Para determinar la matriz de transmisión del cuadripolo equivalente a una asociación en cascada basta con escribir la ecuación correspondiente al cuadripolo \$k\$-ésimo.

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_{kE} \\ \bar{I}_{kE} \end{bmatrix} = \bar{T}_k \begin{bmatrix} \bar{U}_{kS} \\ -\bar{I}_{kS} \end{bmatrix}$$

donde  $\bar{T}_k$  es su matriz de transmisión. Ahora bien, en una asociación en cascada,  $\bar{U}_{kS} = \bar{U}_{k+1,E}$  y  $-\bar{I}_{kS} = \bar{I}_{k+1,E}$  y, sustituyendo desde el cuadripolo  $n$  hasta el 1, resulta

$$\begin{bmatrix} \bar{U}_1 \\ \bar{I}_1 \end{bmatrix} = \bar{T} \begin{bmatrix} \bar{U}_{n+1} \\ -\bar{I}_{n+1} \end{bmatrix} \quad (25.26)$$

donde  $\bar{T}$  es la matriz de transmisión de la asociación

$$\bar{T} = \bar{T}_1 \cdot \bar{T}_2 \dots \bar{T}_n = \prod_{k=1}^n \bar{T}_k \quad (25.27)$$

### 25.5.2. Impedancias imágenes

Se denominan impedancias imágenes  $\bar{Z}_{O1}$  y  $\bar{Z}_{O2}$ , de un cuadripolo a aquellas impedancias tales que, al conectar  $\bar{Z}_{O2}$  a la salida, la impedancia equivalente  $\bar{Z}_{EE}$ , es igual a  $\bar{Z}_{O1}$  y, al conectar  $\bar{Z}_{O1}$  en la entrada, la impedancia equivalente  $\bar{Z}_{SS}$ , es igual a  $\bar{Z}_{O2}$ .

Para que se cumplan estas dos condiciones, las impedancias imágenes deben valer

$$\bar{Z}_{O1} = \left( \frac{\bar{A}\bar{B}}{\bar{C}\bar{D}} \right)^{1/2} \quad (25.28)$$

$$\bar{Z}_{O2} = \left( \frac{\bar{D}\bar{B}}{\bar{A}\bar{C}} \right)^{1/2} \quad (25.29)$$

o bien, en función de las impedancias y admitancias

$$\bar{Z}_{O1} = \left( \frac{\bar{Z}_{11}}{\bar{Y}_{11}} \right)^{1/2} \quad (25.30)$$

$$\bar{Z}_{O2} = \left( \frac{\bar{Z}_{22}}{\bar{Y}_{22}} \right)^{1/2}$$



## PROBLEMAS

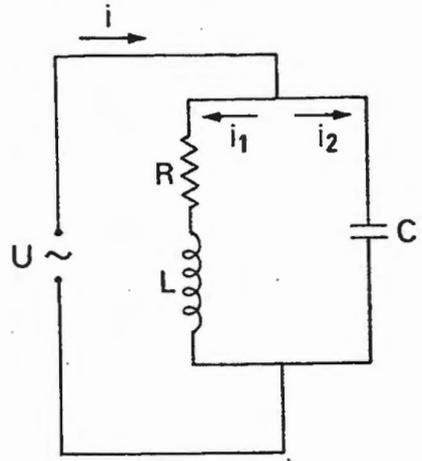
P.25.1. Dado el circuito antirresonante de la figura, calcular:

- a) Factor de calidad.
- b) Pulsación de resonancia.

**SOLUCIÓN**

a) 
$$Q = \frac{L\omega_r}{R}$$

b) 
$$\omega_r = (LC)^{-1/2} \left( 1 - \frac{R^2 C}{L} \right)^{1/2}$$

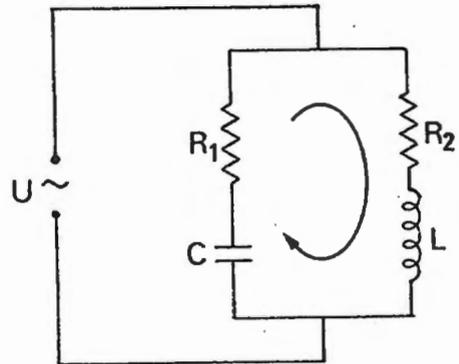


P.25.1

P.25.2. En el circuito antirresonante de la figura, obtener la relación entre  $R_1$ ,  $R_2$ ,  $L$  y  $C$  para que sea antirresonante a todas las frecuencias.

**SOLUCIÓN**

$$R_1 = R_2 = (L / C)^{1/2}$$

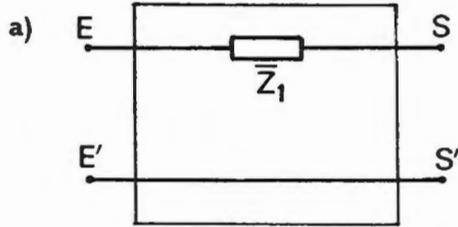


P.25.2

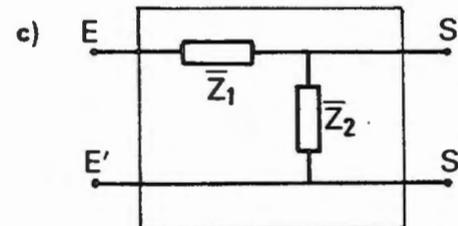
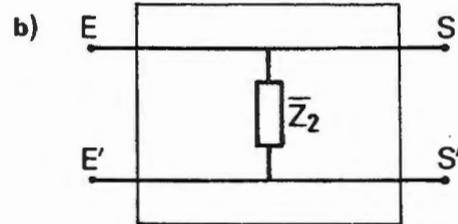
P.25.3. Demostrar que en un circuito RLC serie, la función  $U_c(\omega)$  sólo tiene un máximo relativo cuando  $Q > 1/\sqrt{2}$

P.25.4. Demostrar que en un cuadripolo pasivo  $\bar{Y}_{12} = \bar{Y}_{21}$  (Aplicar el teorema de reciprocidad).

P.25.5. Teniendo en cuenta el resultado del problema anterior, demostrar que en un cuadripolo pasivo, el determinante de la matriz de transmisión vale la unidad.



P.25.6. Calcular la matriz de transmisión de los cuadripolos de la figura.



**SOLUCIÓN**

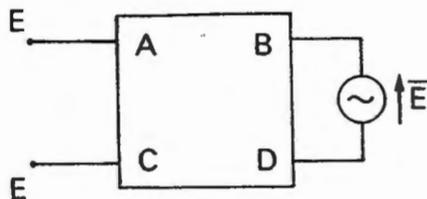
a) 
$$\bar{T}_a = \begin{bmatrix} 1 & \bar{Z}_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) 
$$\bar{T}_b = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1/\bar{Z}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

c) 
$$\bar{T}_c = \begin{bmatrix} 1 + \bar{Z}_1/\bar{Z}_2 & \bar{Z}_1 \\ 1/\bar{Z}_2 & 1 \end{bmatrix}$$

P.25.6

P.25.7. Dado el circuito de la figura, calcular el generador equivalente de Thevenin entre E y E'.



P.25.7

**SOLUCIÓN**

$$\bar{E}_T = -\left(\bar{A} - \frac{\bar{B}\bar{C}}{\bar{D}}\right)\bar{E}$$

$$\bar{Z}_T = \frac{\bar{B}}{\bar{D}}$$



# CAPÍTULO 26

## MÁQUINAS ELÉCTRICAS

### 26.1. Máquinas de corriente continua

Las máquinas de corriente continua más importantes son los generadores (dinamos) y los motores de corriente continua, que transforman energía mecánica en energía eléctrica y viceversa.

Se trata de dispositivos de constitución semejante a la del alternador, anteriormente descrito, en el que una bobina gira en el interior de un campo magnético.

Constan de una pieza cilíndrica giratoria (rotor) en el que va enrollada una bobina o conjunto de bobinas denominadas inducido. El campo magnético es creado mediante una bobina (inductor) arrollada sobre una pieza fija (estátor).

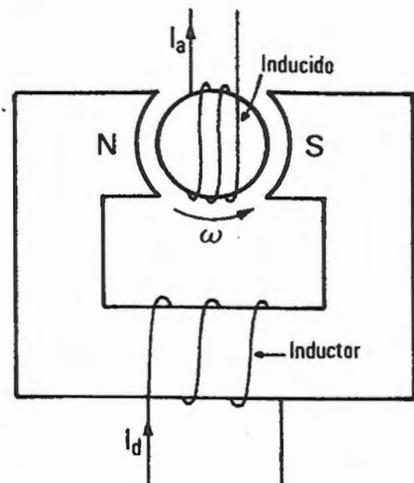


Fig. 26.1

#### 26.1.1. Dinamo

Si la corriente del inductor,  $I_d$  se mantiene constante, de forma que el campo magnético entre los polos del estátor sea uniforme, y se hace girar al rotor con velocidad angular constante,  $\omega$ , el inducido será atravesado por un flujo variable

$$\phi = N \phi_m \cos \omega t \quad (26.1)$$

donde  $N$  es el número de espiras del inducido y  $\phi_m$  es el flujo máximo que atraviesa a cada espira.

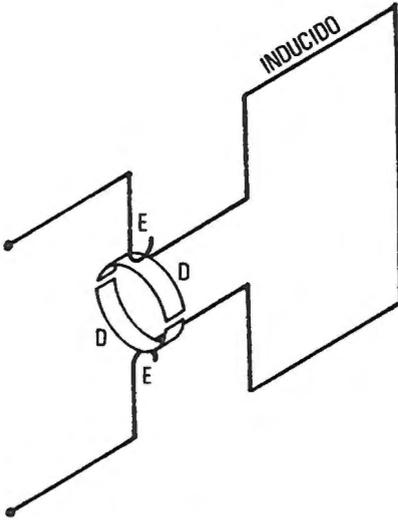


Fig. 26.2

aislados entre sí. Cada delga está en contacto con una escobilla, conectadas a los terminales del circuito de utilización. Cada media vuelta del rotor, las delgas cambian de polaridad, pero en el instante en que lo hacen también de escobilla, de forma que estas mantienen siempre la misma polaridad. En la figura 26.3 se muestra la variación  $\mathcal{E}(t)$  obtenida mediante el sistema de delgas y escobillas.

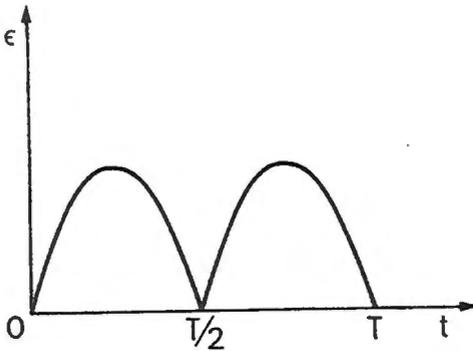


Fig. 26.3

La f.e.m. inducida es, suponiendo que  $\phi_m = \text{cte}$ ,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = N\phi_m \omega \sin \omega t \quad (26.2)$$

es decir, la f.e.m. producida es alterna senoidal, con pulsación igual a la velocidad de giro del rotor.

Para conseguir una f.e.m. de la misma polaridad se utiliza un artificio consistente en dos semianillos metálicos, denominados delgas, unidos invariablemente a cada uno de los extremos de la bobina inductora y aislados entre sí. Cada delga está en contacto con una escobilla, conectadas a los terminales del circuito de utilización. Cada media vuelta del rotor, las delgas cambian de polaridad, pero en el instante en que lo hacen también de escobilla, de forma que estas mantienen siempre la misma polaridad. En la figura 26.3 se muestra la variación  $\mathcal{E}(t)$  obtenida mediante el sistema de delgas y escobillas.

El valor medio de la f.e.m. en un semiperíodo es

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{T/2} \int_0^{T/2} N\phi_m \omega \sin \omega t \, dt = \\ &= \frac{4N\phi_m}{T} = \frac{2N}{\pi} \phi_m \omega \quad (26.3) \end{aligned}$$

expresión muy particularizada ya que ha sido obtenida para el caso de un inductor con dos polos y un inducido constituido por una bobina plana de  $N$  espiras. En general, la expresión de  $\mathcal{E}_m$  depende del tipo de devanado del inducido y del número de polos del inductor, saliendo su deducción de los objetivos de este texto.

En cualquier caso, si la corriente que circula por el inductor es constante, también lo será  $\phi_m$ , y entonces  $\mathcal{E}_m$  resulta proporcional a la velocidad de giro

$$\mathcal{E}_m(\omega) = k \omega \quad (26.4)$$

La diferencia de potencial entre los bornes del generador es

$$V = \mathcal{E} - I_a r \quad (26.5)$$

donde  $I_a$  es la corriente del inducido y  $r$  su resistencia interna.

### 26.1.2. Motor de corriente continua

La constitución de un motor de corriente continua es, en esencia, idéntica a la de una dinamo, (Fig. 26.1). Así, si la corriente del inductor,  $I_d$ , es la misma que en el caso de la dinamo y por el inducido se hace circular una corriente  $I_a$ , suministrada por un circuito exterior, la bobina del inducido se verá sometida a un par que la pone en movimiento. De esta forma se transforma energía eléctrica (suministrada por el circuito exterior al inducido) en energía mecánica.

Si la corriente del inductor es constante, la f.c.e.m. media del motor toma el mismo valor obtenido para la f.e.m. en el caso de la dinamo (26.4), es decir proporcional a la velocidad angular

$$\mathcal{E}' = k \omega \quad (26.6)$$

donde  $k$  es una característica que depende de la constitución del motor. La potencia eléctrica transformada en potencia mecánica es

$$P = \mathcal{E}' I_a = M \omega$$

donde  $M$  es el par mecánico que actúa sobre el inducido. Despejando  $M$  y teniendo en cuenta el valor de  $\mathcal{E}'$  dado por (26.6) resulta

$$M = k I_a \tag{26.7}$$

es decir, el par mecánico es proporcional a la corriente que circula por el inducido.

## 26.2. Máquinas síncronas

### 26.2.1. Alternador

En las lecciones anteriores se ha visto como el alternador elemental está formado por una bobina que gira en un campo magnético uniforme, induciéndose en sus extremos una f.e.m. alterna senoidal.

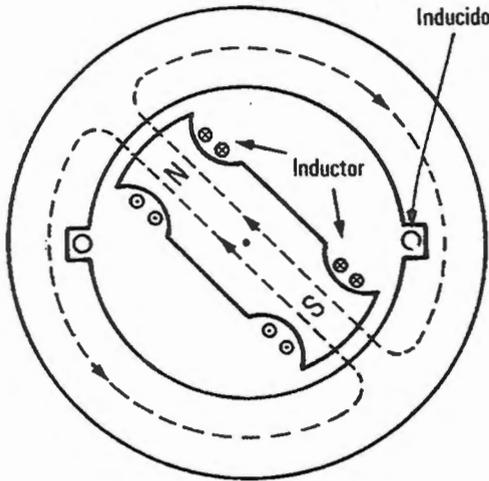


Fig. 26.4

Los alternadores comerciales tienen una constitución muy semejante a la de las dinamos, pero presentan una serie de particularidades que los simplifican. Puesto que la f.e.m. alterna inducida no tiene que ser rectificada, no es necesario dividir el colector en delgas, lo cual permite que el inducido sea enrollado en el estátor mientras que el inductor es móvil. En la figura 26.4 se ha representado un alternador muy simple, constituido por un inductor con dos polos y un inducido de una sola bobina. Al girar el rotor con velocidad angular  $w$ , el flujo que atraviesa el inducido es

$$\phi = N \phi_m \cos wt$$

donde  $N$  es el número de espiras. La f.e.m. inducida es, por tanto,

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = N \phi_m w \sin wt$$

En general, el inductor consta de más de un par de polos y el inducido está formado por varias bobinas conectadas de forma que la f.e.m. inducida tenga en

todas ellas el mismo sentido. Si el número de pares de polos del rotor es  $p$ , la f.e.m. cambiará de signo  $p$  veces en cada revolución del mismo. Por tanto, la frecuencia,  $f$ , de la corriente alterna producida es

$$f = p \cdot v \quad (26.8)$$

donde  $v$  es la frecuencia del giro del rotor.

El alternador descrito hasta ahora recibe el nombre de alternador monofásico, ya que la f.e.m. inducida en las diferentes bobinas del inducido están en fase. Éste presenta un único par de terminales y la corriente así producida se denomina monofásica.

Para producir corrientes **polifásicas** es preciso montar en el inducido varias bobinas independientes separadas el mismo ángulo. Así, si el estátor consta de dos bobinas independientes que forman 90 grados, el flujo que atraviesa a las mismas estará desfasado en  $\pi/2$  radianes. La f.e.m. inducida en las dos bobinas son idénticas en cuanto a frecuencia y amplitud, pero están desfasadas en  $\pi/2$  radianes.

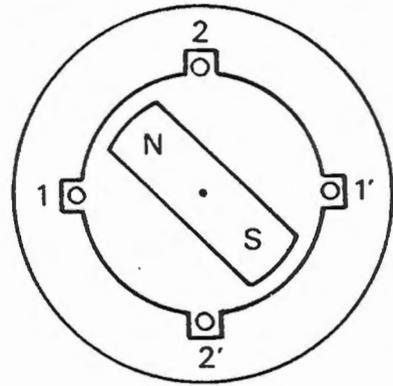


Fig. 26.5

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \text{ sen } \omega t$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_m \text{ sen } \left( \omega t - \frac{\pi}{2} \right)$$

Un alternador como el indicado se denomina bifásico, presentando su inducido 2 pares de terminales, una para cada sistema de bobinas

Si se disponen en el estátor tres grupos de bobinas, formando entre sí un ángulo de 120 grados, las f.e.m. inducidas en ellas se llama trifásica, estando desfasada  $2\pi/3$  radianes en cada grupo de bobinas

$$\mathcal{E}_1 = \mathcal{E}_m \text{ sen } \omega t$$

$$\mathcal{E}_2 = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{2\pi}{3}\right)$$

$$\mathcal{E}_3 = \mathcal{E}_m \operatorname{sen}\left(\omega t - \frac{4\pi}{3}\right)$$

Este generador se denomina trifásico, y su inductor tiene 3 pares de terminales.

### 26.2.2. Motor síncrono

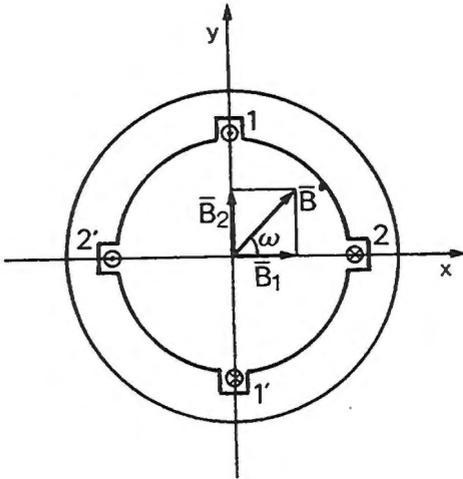


Fig. 26.6

El funcionamiento del motor síncrono está basado en la acción que un campo magnético giratorio ejerce sobre un imán que gira. El campo giratorio se produce mediante corrientes polifásicas.

Así, en la figura 26.6 se representa el inducido de un alternador bifásico, con dos pares de bobinas, 11' y 22'. Si por dichas bobinas se hace circular una corriente bifásica, de intensidad  $I$  y pulsación  $\omega$ , el campo magnético creado por cada una de ellas en el punto  $O$  es

$$\vec{B}_1 = k I \cos \omega t \vec{i}$$

$$\vec{B}_2 = k I \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) \vec{j}$$

donde  $k$  es un factor de proporcionalidad que depende del número de espiras del inducido y de su forma geométrica. El campo resultante en  $O$  es

$$\vec{B} = \vec{B}_1 + \vec{B}_2 = k I (\cos \omega t \vec{i} + \operatorname{sen} \omega t \vec{j}) \quad (26.9)$$

es decir, se trata de un campo magnético de módulo constante,  $B = K I$ , que forma con el eje  $OX$  un ángulo variable  $\varphi = \omega t$ . En definitiva, se consigue un campo magnético giratorio, obtenido mediante dos bobinas inmóviles recorridas por corrientes bifásicas.

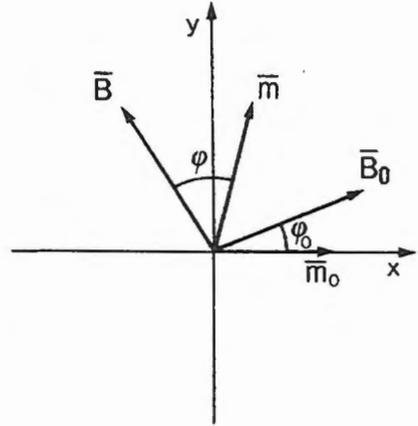


Fig. 26.7

Una vez analizada la forma de crear un campo magnético giratorio mediante un inducido polifásico, estudiemos la acción que éste ejerce sobre el rotor. Para ello supondremos que la velocidad de giro del campo  $\vec{B}$  es  $\omega_0$ , mientras que la velocidad angular del rotor es  $\omega$ . Admitiremos que el rotor es una bobina o un imán dipolar, cuyo momento magnético es  $\vec{m}$ . En el instante  $t = 0$ , el campo  $\vec{B}$  y el rotor ocupan las posiciones dadas por los vectores  $\vec{B}_0$  y  $\vec{m}_0$  respectivamente, siendo su desfase inicial  $\varphi_0$ . Al cabo de un tiempo  $t$ , el desfase entre  $\vec{B}$  y  $\vec{m}$  es

$$\varphi = \omega_0 t - \omega t + \varphi_0 = (\omega_0 - \omega)t + \varphi_0 \quad (26.10)$$

Por tanto, el momento ejercido por  $\vec{B}$  sobre el rotor es

$$M = m \cdot B \text{ sen } \varphi = m B \text{ sen} [(\omega_0 - \omega)t + \varphi_0] \quad (26.11)$$

Si  $\omega_0 \neq \omega$ , el valor medio del momento durante un período es nulo, y el momento resistente debido a las fuerzas de rozamiento hace disminuir la velocidad angular del rotor  $\omega$ . Se pueden considerar dos casos:

- a) Si  $\omega < \omega_0$ , la velocidad de giro va disminuyendo hasta que el rotor acaba por detenerse.
- b) Si  $\omega > \omega_0$ , la velocidad  $\omega$  disminuye, pero no hasta cero sino que se estabiliza en  $\omega = \omega_0$ , denominada velocidad de sincronismo.

Cuando se alcanza la velocidad de sincronismo, el valor medio del momento ejercido sobre el rotor no es nulo, sino que toma el valor

$$M_1 = mB \operatorname{sen}|\varphi_1| \quad (26.12)$$

donde  $\varphi_1$  es el desfase entre  $\bar{m}$  y  $\bar{B}$ , cuyo valor puede calcularse teniendo en cuenta que al alcanzarse la velocidad de sincronismo deben ser iguales los pares electromagnéticos y resistente,  $M_r = M_1$ . Por tanto

$$\operatorname{sen}|\varphi_1| = \frac{M_r}{mB} \quad (26.13)$$

El giro del motor en estas condiciones es estable si  $0 < \varphi_1 < \pi/2$ . En efecto si se produce un aumento del par resistente, disminuirá la velocidad de giro del rotor por lo que, según (26.11), aumenta  $\varphi_1$  y el momento  $M_1$ , alcanzándose un nuevo equilibrio entre el par motor y el par resistente. Del mismo modo, si disminuye el par resistente, aumenta  $w$ , disminuyendo  $\varphi_1$  y, por tanto, el par  $M_1$ .

Por el contrario, si  $\pi/2 < \varphi_1 < \pi$ , puede demostrarse que la rotación del motor es inestable.

### 26.3. Motor asíncrono

El motor **asíncrono polifásico** (bifásico o trifásico) tiene el inductor en el estátor, el cual produce un campo magnético giratorio de la misma forma que el creado por el estátor de un motor síncrono. La diferencia con el motor síncrono se encuentra en el rotor, que en el motor asíncrono consiste en una bobina que no va conectada a ninguna fuente.

Si el campo  $B$  gira con velocidad angular  $w_0$  y el rotor con velocidad  $w$ , el flujo que atraviesa la bobina del rotor es

$$\phi = \bar{B} \cdot \bar{S} = BS \cos \varphi = BS \cos(w_0 - w)t \quad (26.14)$$

donde se ha supuesto que, en  $t = 0$ ,  $\bar{B}$  y  $\bar{S}$  son paralelos.

El flujo variable induce en la bobina del rotor una f.e.m. de valor

$$\mathcal{E} = -\frac{d\phi}{dt} = BS(\omega_0 - \omega) \text{sen}(\omega_0 - \omega) t \quad (26.15)$$

Si la bobina tiene resistencia  $R$  y autoinducción  $L$ , la intensidad que circula por ella tiene un valor máximo

$$I_m = \frac{BS(\omega_0 - \omega)}{[R^2 + L^2(\omega_0 - \omega)^2]^{1/2}} \quad (26.16)$$

y un desfase con la f.e.m.,

$$\text{tg } \alpha = \frac{L(\omega_0 - \omega)}{R} \quad (26.17)$$

Finalmente, el momento magnético del rotor viene dado por la expresión

$$m = S I$$

El momento que el campo magnético  $\vec{B}$  ejerce sobre la bobina del rotor es

$$M = m B \text{sen}(\omega_0 - \omega) = B S I_m \text{sen}[(\omega_0 - \omega) t + \alpha] \text{sen}(\omega_0 - \omega) t \quad (26.18)$$

que puede escribirse como

$$M = \frac{B S I_m}{2} [\cos \alpha - \cos[2(\omega_0 - \omega) t + \alpha]] \quad (26.19)$$

En definitiva, el valor medio del momento durante una vuelta es

$$M_{me} = \frac{B S I_m}{2} \cos \alpha \quad (26.20)$$

En la figura 26.8 se representa el par electromagnético (par motor)  $M_{me}$ , en función de la velocidad de giro del rotor,  $\omega$ .

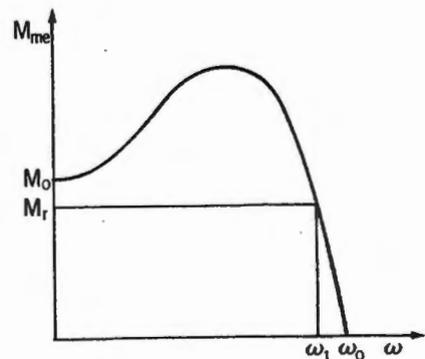


Fig. 26.8

Al conectar el motor,  $w = 0$ , siendo el par motor  $M_o$ . Si el par resistente  $M_r$ , es inferior a  $M_o$ , el motor comenzará a girar sin necesidad de ser lanzado, aumentando la velocidad angular hasta el punto de funcionamiento,  $w = w_1$ , en la que se igualan los pares motor y resistente.

### 26.4. Motor paso a paso

Los motores paso a paso son máquinas eléctricas capaces de transformar impulsos eléctricos en giros o desplazamientos finitos. En este apartado se analizará el funcionamiento de los motores paso a paso rotatorios de imán permanente. Su constitución es similar a la de un motor síncrono pero con algunas modificaciones.

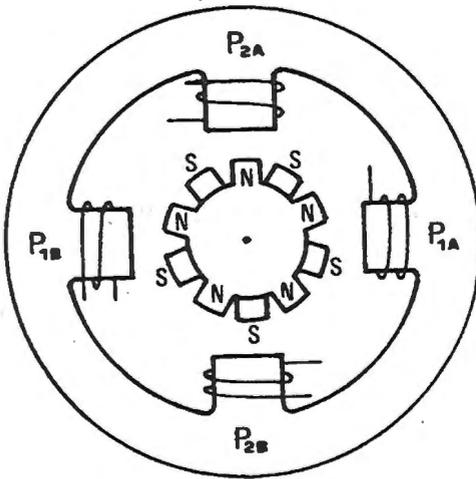


Fig. 26.9

hay una diferencia  $D$ , igual a

$$D = \frac{360}{2p} - \frac{360}{q} = \frac{q - 2p}{2pq} 360 \tag{26.21}$$

En el ejemplo de la figura,  $D = 18^\circ$ , que es el giro mínimo del rotor en uno u otro sentido, según sea el impulso eléctrico aplicado a las bobinas del estátor.

El estátor es polifásico y tiene  $p$  pares de bobinas enfrentadas, a las que se conectan las distintas fases. Así, en la figura 26.9 se ha representado un estátor con 2 pares de bobinas. El rotor es un cilindro en uno de cuyos extremos hay distribuidos radialmente  $q$  polos norte; en el otro extremo se distribuyen, intercalados con los anteriores,  $q$  polos sur. En la figura aparece un rotor con  $q = 5$ .

El paso polar del estátor es  $360^\circ/2p$  (en el ejemplo,  $90^\circ$ ) y el del rotor  $360^\circ/q$  (en el ejemplo  $72^\circ$ ). Entre ambos pasos polares

En la figura 26.10 se han representado extendidos los polos del rotor y del estátor. Supóngase que se introduce un impulso en la fase 1 que produce N en  $P_{1A}$  y S en  $P_{1B}$ . El rotor gira  $18^\circ$  hacia la izquierda hasta que se enfrentan  $P_{1A}$  con S y  $P_{1B}$  con N. En esta nueva posición se puede producir otro giro de  $18^\circ$  activando convenientemente la fase 2. Elijiendo adecuadamente p y q se puede obtener cualquier paso.

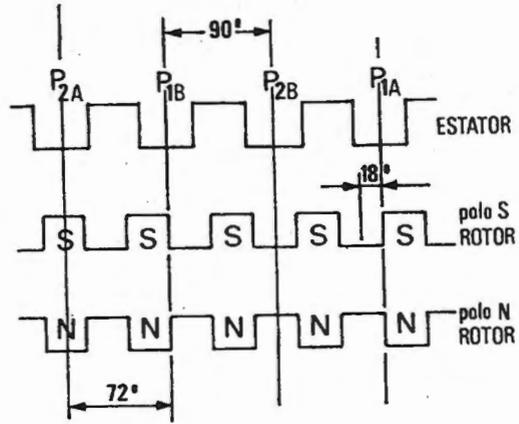


Fig. 26.10

## 26.5. Transformadores

El transformador estático es un dispositivo capaz de transferir potencia de un circuito a otro, modificando la amplitud de las tensiones aplicadas.

Un transformador está constituido por dos bobinas acopladas magnéticamente, con un coeficiente de acoplamiento muy próximo a la unidad. Esto puede conseguirse arrollando ambas bobinas a un mismo circuito magnético de muy alta permeabilidad magnética.

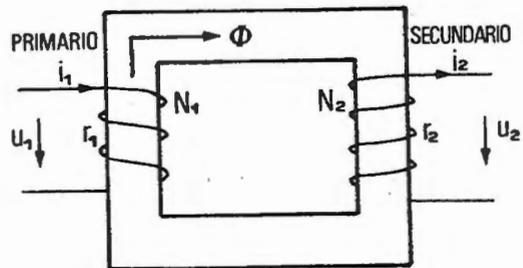


Fig. 26.11

Con una de las bobinas, que recibe el nombre de primario, se conecta a un circuito de entrada que contiene al menos un generador. La otra bobina, llamada secundario, se conecta al circuito de utilización.

Supóngase un transformador como el mostrado en la figura 26.11. Denominaremos  $N_1$  y  $N_2$  al número de espiras del primario y secundario, respectivamente. El sentido de las corrientes se ha elegido de forma que ambas produzcan un flujo del mismo signo, mientras que el sentido de las tensiones es el mostrado en la figura. De ahora en adelante se admitirá que las resistencias  $r_1$  y  $r_2$ , del primario y secundario, son lo suficientemente pequeñas para que las caídas ohmicas de tensión sean despreciables. Asimismo, se despreciarán las pérdidas de energía por histéresis y por corrientes de Foucault y se admitirá que el flujo  $\phi$  es el mismo a través de cualquier sección del núcleo. En estas condiciones el transformador se llama transformador sin pérdidas.

### 26.5.1. Tensiones y flujo

Si en el primario se aplica una tensión alterna senoidal de pulsación  $\omega$ , por él circulará una corriente alterna, también de pulsación  $\omega$ , siendo el flujo otra magnitud alterna senoidal. En definitiva, el flujo variable induce en el secundario una f.e.m. alterna de valor

$$\mathcal{E}_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

o, en notación compleja

$$\bar{\mathcal{E}}_2 = -jN_2 \omega \bar{\phi} \quad (26.22)$$

donde  $\bar{\phi} = \phi_m \exp(j\omega t)$  es el flujo a través de una sección transversal del núcleo.

Las tensiones en bornes de cada bobina son, teniendo en cuenta que  $r_1 = r_2 = 0$ ,

$$u_1 = N_1 \frac{d\phi}{dt}$$

$$u_2 = -N_2 \frac{d\phi}{dt}$$

o, en forma compleja

$$\bar{U}_1 = jN_1 w \bar{\phi} \quad (26.23)$$

$$\bar{U}_2 = -jN_2 w \bar{\phi}$$

es decir las tensiones en el primario y secundario están en oposición de fases, y en cuadratura con el flujo. La relación entre sus módulos

$$\frac{U_2}{U_1} = \frac{N_2}{N_1} \quad (26.24)$$

es igual a la relación entre los números de espiras de las bobinas, y recibe el nombre de **razón de transformación**. Si  $N_1 > N_2$ , entonces  $U_1 > U_2$ , el transformador reduce la tensión y se llama reductor; por el contrario, si  $N_1 < N_2$ , la tensión a la salida es superior a la de entrada y el transformador es un elevador.

A partir de (26.23) se puede calcular la relación existente entre el flujo  $\phi$  y la tensión del primario

$$\bar{\phi} = -\frac{j\bar{U}_1}{N_1 w} \quad (26.25)$$

### 26.5.2. Corrientes

Las corrientes en el primario y secundario están relacionadas mediante la ley de Hopkinson

$$R \phi = F$$

donde  $R$  es la reluctancia del circuito y

$$F = N_1 i_1 + N_2 i_2$$

es la fuerza magnetomotriz.

En definitiva,

$$N_1 i_1 + N_2 i_2 = R \phi \quad (26.26)$$

o, en forma compleja

$$N_1 \bar{I}_1 + \bar{N}_2 \bar{I}_2 = R\bar{\phi} \quad (26.27)$$

donde se admite implícitamente que la reluctancia no es función del flujo. A continuación se evaluarán las corrientes  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$  en dos casos: secundario en circuito abierto y secundario a plena carga.

### a) Secundario abierto

En este caso  $\bar{I}_2 = 0$ , mientras que la corriente del primario, que se denomina corriente de vacío, vale  $\bar{I}_0$ . A partir de (26.27) se deduce que

$$\bar{I}_0 = \frac{R\bar{\phi}}{N_1} \quad (26.28)$$

y, teniendo en cuenta el valor de  $\bar{\phi}$  dado por (26.25), resulta

$$\bar{I}_0 = -j \frac{\bar{U}_1}{N_1^2 w} \quad (26.29)$$

es decir, la intensidad de vacío está retrasada 90 grados con la tensión del primario y, por tanto, en fase con el flujo. Su módulo es

$$I_0 = \frac{U_1}{N_1^2 w} \quad (26.30)$$

Puesto que  $\bar{I}_0$  y  $\bar{U}_1$  son perpendiculares, el transformador en vacío no consume potencia, resultando que sólo es aceptable bajo las hipótesis antes enunciadas.

### b) Secundario en carga

Supóngase ahora que el secundario se cierra mediante una impedancia  $\bar{Z}$ . Si la tensión del primario no cambia, el flujo tampoco se modificará

(obsérvese que, según (26.25), en un transformador sin pérdidas  $\bar{\phi}$  sólo depende de  $\bar{U}_1$ ). Por tanto, el flujo  $\bar{\phi}$  será el mismo que en el transformador en vacío, es decir

$$R\bar{\phi} = N_1 \bar{I}_0$$

y, aplicando la ecuación (26.27) resulta

$$N_1 \bar{I}_0 = N_1 \bar{I}_1 + N_2 \bar{I}_2 \quad (26.31)$$

Despejando  $\bar{I}_1$ , se obtiene

$$\bar{I}_1 = \bar{I}_0 - \frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 \quad (26.32)$$

Es decir, en el transformador en carga, la corriente del primario es igual a la de vacío más un término opuesto a  $\bar{I}_2$  y cuyo módulo es  $I_2$  dividido por la razón de transformación.

En numerosos casos, la reluctancia del circuito magnético es muy pequeña, por lo cual  $\bar{I}_0$  es despreciable frente a  $\bar{I}_1$ , pudiendo escribirse entonces

$$\bar{I}_1 = -\frac{N_2}{N_1} \bar{I}_2 \quad (26.33)$$

### 26.5.3. Representación fasorial

Supongamos un transformador en el que se conoce la tensión aplicada al primario y la impedancia  $\bar{Z}_2$  conectada en el secundario. Se trata de obtener las corrientes  $\bar{I}_1$  e  $\bar{I}_2$ , el flujo y la tensión del primario. Para resolver este problema utilizaremos los diagramas fasoriales explicados en lecciones anteriores.

Así, conocido  $\bar{U}_1$ , puede determinarse  $\bar{U}_2$  mediante la relación (26.24). La corriente del secundario se obtiene como

$$\bar{I}_2 = \frac{\bar{U}_2}{\bar{Z}_2}$$

La corriente  $\bar{I}_1$  puede ser calculada a partir de la expresión (26.29), donde  $\bar{I}_0$  está en cuadratura con  $U_1$  y su módulo viene dado por (26.27).

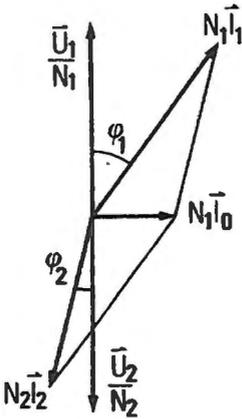


Fig. 26.12

En la figura 26.12 se representa el diagrama fasorial correspondiente. A partir del mismo es fácil comprobar que, en un transformador sin pérdidas, toda la potencia suministrada por el primario es transferida al secundario. En efecto, teniendo en cuenta el valor de  $\bar{I}_0$  dado por (26.28) y que su proyección sobre el eje de las  $\bar{U}$  es nula, resulta evidente que

$$N_1 I_1 \cos \varphi_1 = -N_2 I_2 \cos \varphi_2$$

y, multiplicando los dos miembros de esta ecuación por  $U_1 / N_1 = U_2 / N_2$ , resulta

$$U_1 I_1 \cos \varphi_1 = -U_2 I_2 \cos \varphi_2$$

c.q.d.

# CAPÍTULO 27

## MOVIMIENTO ONDULATORIO

### 27.1. Movimiento ondulatorio

Numerosos fenómenos que se dan en la naturaleza requieren, para su explicación física, recurrir al modelo de movimiento ondulatorio. Las ondas que se producen en la superficie del agua, las ondas sonoras o las ondas electromagnéticas constituyen buena prueba de ello. Asimismo, como se verá en lecciones posteriores, incluso las partículas materiales en movimiento tienen asociado un carácter ondulatorio.

Si bien el mecanismo físico que caracteriza a cada uno de estos procesos es muy distinto, en todos ellos se presenta un patrón de comportamiento común: se trata de perturbaciones que se producen en un punto y se propagan a través del espacio, implicando un transporte de energía sin transporte de materia.

Un ejemplo sencillo de movimiento ondulatorio es el mostrado en la figura 27.1: una onda que se origina en una cuerda tensa cuando en uno de sus extremos se produce un movimiento transversal. Aquí, la perturbación que se propaga es el desplazamiento transversal de los distintos

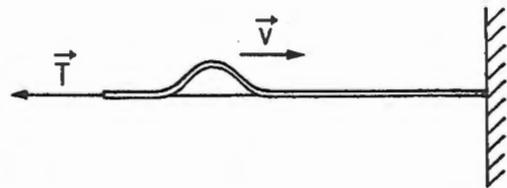


Fig. 27.1

puntos de la cuerda. Cada punto oscila alrededor de la posición de equilibrio (línea horizontal), de forma que arrastra a los vecinos, que también oscilan. El resultado es un "pulso" que se propaga a lo largo de la cuerda. Obsérvese que los puntos que constituyen la cuerda no se desplazan junto con la perturbación: tan sólo oscilan alrededor de su posición de equilibrio de manera que no hay un transporte de materia.

Un proceso similar ocurre en las ondas que se producen en la superficie del agua o en las ondas sonoras: la perturbación que se origina en un punto hace oscilar a los puntos vecinos y éstos a sus contiguos y así sucesivamente de forma que la perturbación se propaga.

Existen ondas que precisan de un medio material para su generación y propagación. Tal es el caso de las ondas denominadas mecánicas (ondas sonoras, ondas superficiales en líquidos, ondas transversales de una cuerda, ondas en un muelle, etc.), en las cuales la perturbación que se propaga es un cambio en las posiciones de equilibrio de los puntos materiales que constituyen el medio. Por el contrario, las ondas electromagnéticas pueden producirse y propagarse en el vacío; en este caso la perturbación que se propaga es un campo electromagnético caracterizado por los vectores  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .

En este capítulo se estudiarán algunas características comunes a todo fenómeno ondulatorio, particularizando, en el siguiente, dicho estudio al caso de las ondas electromagnéticas.

### ***27.2. Ondas longitudinales y transversales***

La perturbación que se propaga en un movimiento ondulatorio puede caracterizarse por una magnitud escalar o por una magnitud vectorial. Así, en las ondas sonoras se pueden asociar la presión o la densidad del medio, mientras que en las ondas electromagnéticas, las magnitudes que se propagan son los campos vectoriales  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$ .

Si la dirección de variación de la magnitud que se propaga coincide con la dirección de propagación de la perturbación, la onda se llama **longitudinal**. Son ondas longitudinales las de desplazamiento asociadas al sonido. Por el contrario, si la dirección de oscilación de la magnitud considerada es perpendicular a la dirección de propagación, las ondas son **transversales**, como en el caso de las que se producen en un cuerda tensa o de las ondas electromagnéticas.

### ***27.3. Descripción matemática de un movimiento ondulatorio unidimensional. (No amortiguado)***

#### ***27.3.1. Propagación de un pulso***

Consideremos una onda de naturaleza cualquiera, que se propaga en la dirección del eje OX. Sea  $u$  la magnitud asociada a la onda (presión en el caso del

sonido, desplazamientos transversales en el caso de la cuerda tensa, campo  $\vec{E}$  o  $\vec{B}$  en el caso de la onda electromagnética, etc.) Evidentemente, para describir completamente el movimiento ondulatorio es preciso conocer el estado de la magnitud  $u$  en todos los puntos y en cualquier instante: la perturbación  $u$  es una función de  $x$  y de  $t$ ,  $u = f(x,t)$ . Estudiemos el tipo de relación que existen entre  $x$  y  $t$  en un movimiento ondulatorio.

Para ello supongamos que la perturbación ondulatoria en el instante  $t = 0$  viene dada por una curva como la indicada en la figura 27.2

$$u(x, 0) = f(x')$$

Puesto que la perturbación se mueve hacia la derecha sin deformarse y con una velocidad  $v$ , al cabo de un tiempo  $t$ , la curva se habrá desplazado una distancia  $vt$ . A partir de la figura 27.2 resulta evidente que  $x' = x - vt$  y que

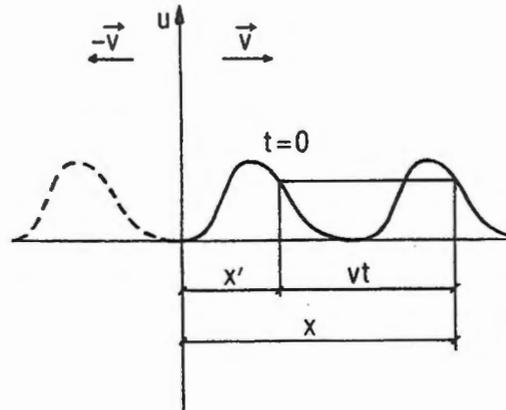


Fig. 27.2

$$u(x, 0) = u(x, t) = f(x')$$

Por tanto, la función que representa a la perturbación en el instante  $t$  es

$$u(x, t) = f(x - vt) \tag{27.1}$$

La perturbación también puede propagarse, con la misma velocidad hacia la izquierda. En tal caso, la función que representa a la perturbación es

$$u(x, t) = f(x + vt) \tag{27.2}$$

En definitiva, el tipo de ecuación que describe la propagación de una perturbación en una dirección es

$$u(x, t) = f(x \pm vt) \tag{27.3}$$

expresión que pone de manifiesto que una perturbación se traslada en la dirección del eje OX, sin cambiar de forma, sólo si las variables  $x$  y  $t$  se presentan en la relación  $(x \pm vt)$ .

La magnitud  $(x \pm vt)$  recibe el nombre de **fase de la onda**. La velocidad de propagación de la perturbación se denomina **velocidad de fase**.

La expresión (27.3) que describe el movimiento ondulatorio unidimensional puede escribirse de la forma

$$u(x, t) = f(x \pm vt) = f\left[-v\left(t \pm \frac{x}{v}\right)\right] = F\left(t \pm \frac{x}{v}\right) \quad (27.4)$$

donde el signo menos corresponde a la programación en el sentido positivo del eje OX. En dicha ecuación queda patente que la perturbación llega a un punto situado en la abscisa  $x$  con un retraso  $x/v$ , ya que éste es el tiempo que la onda, que se mueve con velocidad  $v$ , tarda en recorrer el espacio  $x$ .

### 27.3.2. Ecuación diferencial del movimiento ondulatorio

En la sección anterior se ha establecido la ecuación (27.3), que representa la propagación de una perturbación, sin deformación y con velocidad  $v$ , a lo largo del eje OX. En este apartado se obtiene la ecuación diferencial del movimiento ondulatorio en una dirección. Así, al estudiar la propagación de una perturbación determinada, si ésta verifica dicha ecuación, se está en condiciones de afirmar que su propagación obedece a ecuaciones de la forma dada por las (27.1) o (27.2).

Para ello, derivemos dos veces (27.1) con respecto al tiempo

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{df}{d(x-vt)} \frac{\partial(x-vt)}{\partial t} = -v \frac{df}{d(x-vt)}$$
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = v^2 \frac{d^2 f}{d(v-vt)^2} \quad (27.5)$$

Por otra parte, si derivamos (27.1) dos veces con respecto a  $x$  resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{d^2 f}{d(x - vt)^2} \quad (27.6)$$

y, eliminando en (27.5) y (27.6) la derivada  $d^2 f / d(x - vt)^2$  resulta

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (27.7)$$

expresión a la que se habría llegado igualmente a partir de la función  $f(x + vt)$ . La (27.7) recibe el nombre de ecuación de onda y caracteriza la propagación de una perturbación de la magnitud  $u$  en la dirección del eje  $x$ , sin distorsión y con una velocidad definida  $v$ .

Como se ha visto, las (27.1) y (27.2) son soluciones de esta ecuación de onda. Dado el carácter lineal de ésta, también es una solución cualquier combinación lineal de funciones de ese tipo. En definitiva, la solución general ha de ser de la forma

$$u(x, t) = f_1(x - vt) + f_2(x + vt) \quad (27.8)$$

donde  $f_1$  y  $f_2$  son dos funciones cualesquiera.  $f_1$  representa la propagación de una onda en el sentido positivo del eje  $OX$  (onda progresiva), mientras que  $f_2$  se propaga en sentido contrario.

### 27.3.3. Ondas sinusoidales

Tal como se ha indicado anteriormente, cualquier función del tipo mostrado en la ecuación (27.8) es una solución de la ecuación de onda y, por tanto, corresponde a la propagación de una onda. Un caso particular, especialmente importante, de funciones que satisfacen la ecuación de onda es aquel en el que la perturbación es una función senoidal

$$u(x, t) = A \cos k(x - vt) \quad (27.9)$$

donde  $A$  es la amplitud de la perturbación.

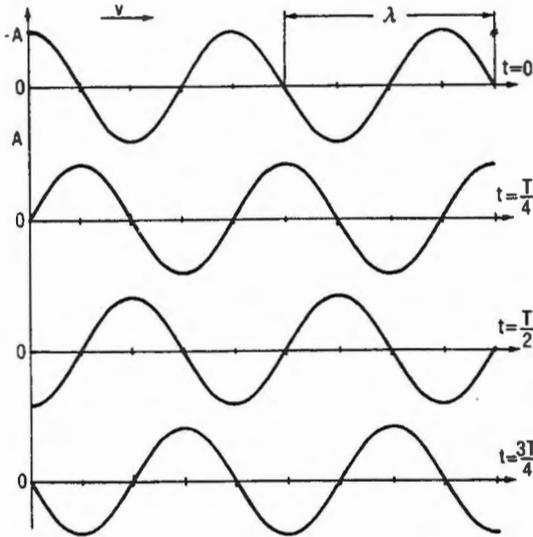


Fig. 27.3

tos consecutivos con el mismo estado de perturbación,  $x_1$  y  $x_2$ . Entonces

$$k(x_1 - vt) + 2\pi = k(x_2 - vt)$$

y, despejando  $x_2 - x_1$ , resulta

$$\lambda = x_2 - x_1 = \frac{2\pi}{k} \tag{27.10}$$

Al factor  $k$  se le denomina número de onda y representa el número de longitudes de onda en una distancia  $2\pi$ .

Para calcular el período  $T$  basta con tener en cuenta que en un punto cualquier dado se debe cumplir que

$$u(x, t) = u(x, t + T)$$

Por tanto

$$k(x - vt) = k(x - vt - vT) + 2\pi$$

Es importante señalar el hecho de que una onda senoidal o armónica presenta dos periodicidades: una periodicidad espacial (en un instante dado, la onda se repite a partir de una distancia dada, llamada longitud de onda  $\lambda$ ) y otra temporal (en un punto dado, el estado de perturbación se repite al cabo de un intervalo de tiempo denominado período  $T$ ). Calculemos  $\lambda$  y  $T$  a partir de (27.9).

Para calcular la longitud de onda consideremos, en un instante cualquiera  $t$ , dos puntos

y, despejando  $T$ , resulta

$$T = \lambda / v \quad (27.11)$$

La inversa del período recibe el nombre de frecuencia,  $f$ ,

$$f = \frac{1}{T} = \frac{v}{\lambda} \quad (27.12)$$

Finalmente, la frecuencia angular o pulsación de la perturbación se define como

$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{\lambda} v = kv \quad (27.13)$$

A partir de las ecuaciones (27.11), (27.12) o (27.13) resulta evidente la relación existente entre los períodos espacial y temporal:

$$\lambda = Tv \quad (27.14)$$

es decir, la longitud de onda es el espacio recorrido por la onda durante un período.

Por otra parte, teniendo en cuenta (27.14), la ecuación de la onda senoidal (27.9) puede escribirse como

$$u(x, t) = A \cos 2\pi \left( \frac{x}{\lambda} - \frac{t}{T} \right) \quad (27.15)$$

o, bien

$$u(x, t) = A \cos (kx - \omega t) \quad (27.16)$$

Las ecuaciones (27.9), (27.15) y (27.16) se refieren a la propagación de una onda armónica en el sentido positivo del eje  $OX$ . La propagación en sentido contrario vendría dada por una función similar

$$u(x, t) = A \cos (kx + \omega t)$$

**Ejemplo 27.1. Ondas transversales en una cuerda tensa**

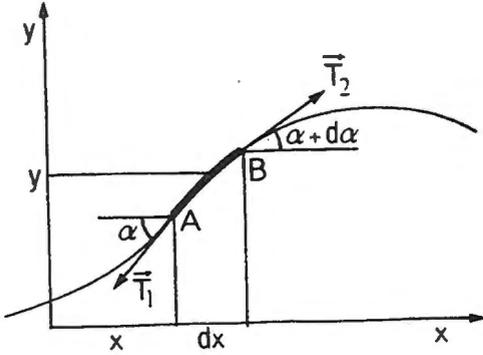


Fig. 27.4

Sea una cuerda que se mantiene tensa mediante una fuerza  $T$ , referida a un sistema de forma que, en su estado de equilibrio, coincida con el eje  $OX$  (figura 27.1).

Si se separa una porción de la cuerda de su posición de equilibrio, tal como se muestra en la figura 27.4, ésta se propagará a lo largo de la cuerda con una velocidad cuyo valor se pasa a determinar.

Con vistas a simplificar el problema, admitiremos que los desplazamientos de la cuerda se producen únicamente en la dirección  $OY$ . En este caso, la onda correspondiente es una onda transversal polarizada linealmente.

Supongamos que en el instante  $t$ , una porción de cuerda, de longitud  $dx$  y situada en la abscisa  $x$ , se ha separado una distancia  $y$  de la posición de equilibrio ( $y = 0$ ). Las fuerzas que actúan sobre los extremos de esta porción son  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$ , con  $|\vec{T}_1| = |\vec{T}_2| = T$ . No obstante, las direcciones de  $\vec{T}_1$  y  $\vec{T}_2$  no son iguales ya que la cuerda está curvada.

Así, en el punto  $A$ , es

$$T_{1x} = -T \cos \alpha$$

$$T_{1y} = -T \sin \alpha$$

mientras que en  $B$

$$T_{2x} = T \cos (\alpha + d\alpha) \approx T \cos \alpha - T \sin \alpha d\alpha$$

$$T_{2y} = T \sin (\alpha + d\alpha) \approx T \sin \alpha + T \cos \alpha d\alpha$$

Ahora bien, si la curvatura de la cuerda es pequeña, el ángulo  $\alpha$  será muy pequeño y, entonces,

$$F_x = T_{1x} + T_{2x} = -T \operatorname{sen} \alpha \, d\alpha \approx 0$$

$$F_y = T_{1y} + T_{2y} = -T \operatorname{cos} \alpha \, d\alpha \approx T \, d\alpha$$

Como vemos, la componente en la dirección del eje OX de las fuerzas aplicadas es nula, por lo que no habrá aceleración en esa dirección. Sin embargo, en la dirección del eje OY, se cumple que

$$T \, d\alpha = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} dx$$

donde  $m$  es la densidad lineal de la cuerda. En definitiva, la ecuación anterior puede escribirse como

$$T = \frac{\partial \alpha}{\partial x} = m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Por otra parte, resulta evidente que  $\operatorname{tg} \alpha = \partial y / \partial x$ , con lo cual, si se deriva esta expresión con respecto a  $x$ , se obtiene que

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\operatorname{cos}^2 \alpha} \frac{\partial \alpha}{\partial x}$$

Sustituyendo esta expresión en la ecuación anterior y teniendo en cuenta que  $\operatorname{cos} \alpha \approx 1$ , resulta

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{m}{T} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

ecuación formalmente similar a la (27.7), que pone de manifiesto que la perturbación transversal en la cuerda se propaga a lo largo de la misma con una velocidad

$$v = \sqrt{T/m}$$

**Ejemplo 27.2. Onda de tensión a lo largo de una línea ideal**

A título de ejemplo, estudiemos ahora la propagación de una onda no mecánica como es la onda de tensión a lo largo de una línea de transmisión ideal. Dicha línea puede estar constituida por dos hilos paralelos, un cable coaxial o, en general, dos conductores separados por un dieléctrico. La línea está caracterizada por un coeficiente de autoinducción uniformemente distribuido a lo largo de la misma (véase ejemplo 19.4, para el caso de un cable coaxial) y por una capacidad, también distribuida uniformemente. Admitiremos que la resistencia de la línea es nula.

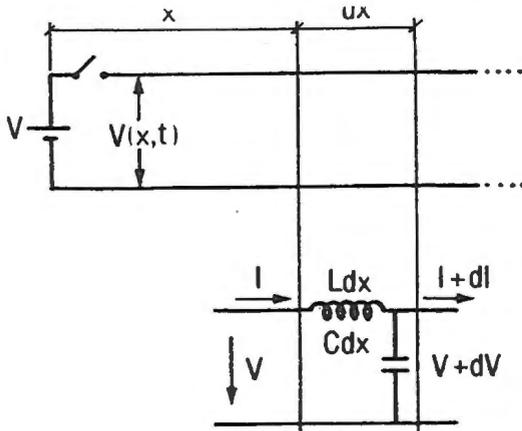


Fig. 27.5

Consideremos la situación mostrada en la figura 27.5: uno de los extremos de la línea está conectado a una fuente de tensión. En el momento de cerrar el interruptor, la ddp en dicho extremo será  $V$ , pero esta tensión

no se establece instantáneamente en cualquier sección de la línea, sino que se propaga a lo largo de la misma con una velocidad que se calcula a continuación.

Para ello supondremos una longitud diferencial de la línea,  $dx$ . El coeficiente de autoinducción de esa porción es  $L dx$  ( $L$  es el coeficiente por unidad de longitud) mientras que la capacidad es  $C dx$  ( $C$  representa la capacidad por unidad de longitud). Denominaremos  $V$  e  $I$  a la tensión e intensidad correspondientes a la abscisa  $x$ , mientras que  $V + dV$  e  $I + dI$  son las que corresponden a  $x + dx$ . Evidentemente se tiene que,

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx \quad \text{y} \quad dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx$$

Ahora bien,  $dV$  es igual a la caída de tensión en la autoinducción cambiada de signo

$$dV = \frac{\partial V}{\partial x} dx = -(L dx) \frac{\partial I}{\partial t}$$

mientras que  $dI$  es la corriente que deriva por la capacidad  $Cdx$ ,

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x} dx = -(C dx) \frac{\partial V}{\partial t}$$

Eliminando  $dx$  en las dos ecuaciones anteriores se obtiene

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -L \frac{\partial I}{\partial t} \tag{a}$$

$$\frac{\partial I}{\partial x} = -C \frac{\partial V}{\partial t} \tag{b}$$

y, si se deriva (a) con respecto a  $x$  y (b) con respecto a  $t$  resulta

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = -L \frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x \partial t} = -C \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

y, eliminando

$$\frac{\partial^2 I}{\partial t \partial x}$$

queda

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}$$

ecuación que pone de manifiesto que la onda de tensión se propaga a lo largo de la línea con una velocidad

$$V = 1/\sqrt{LC}$$

Análogamente, derivando (a) con respecto a  $t$  y (b) con respecto a  $x$  y operando, se obtendría la ecuación

$$\frac{\partial^2 I}{\partial x^2} = LC \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}$$

es decir, la onda de intensidad se propaga con idéntica velocidad.

Con vistas a estimar el orden de magnitud de la velocidad de propagación de una onda de tensión (o de corriente) en una línea ideal consideraremos que ésta es un cable coaxial, cuya capacidad por unidad de longitud, según lo establecido en la lección 13 para el caso del condensador cilíndrico, es

$$C = 2\pi \epsilon_0 / \ln(R_2 / R_1)$$

mientras que el coeficiente de autoinducción es, según el ejemplo 19.4,

$$L = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln(R_2 / R_1)$$

Por tanto, la velocidad de propagación es

$$v = 1/\sqrt{LC} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} = c \approx 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

donde  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío.

## 27.4. Reflexión y refracción de ondas

### 27.4.1. Ondas tridimensionales. Frente de onda

Las ondas estudiadas hasta ahora son unidimensionales y su ecuación de propagación es

$$u(x, t) = f(x - vt)$$

Del mismo modo, es posible definir ondas en dos o en tres dimensiones como perturbaciones que vienen definidas por funciones del tipo

$$u = u(x, y, x, t)$$

Así, las ondas de sonido emitidas por un altavoz o las ondas luminosas emitidas por una bombilla son ondas en tres dimensiones.

Para describir geoméricamente una onda tridimensional es conveniente introducir el concepto de **frente de onda**. Se denomina así al lugar geométrico de los puntos del medio en los cuales la fase de la onda es la misma.

Este lugar geométrico es, en general, una superficie.

Estudiando la evolución de los frentes de onda con el tiempo se puede llegar a obtener una clara representación de la propagación de la onda tridimensional.

Así, por ejemplo, si el foco que da lugar a la perturbación es un punto y el medio de propagación es homogéneo e isótropo, la onda se propagará con la misma velocidad en todas direcciones. En este caso los frentes de ondas son superficies esféricas y la onda se llama esférica (Fig. 27.6.c).

Si el foco emisor es una recta de longitud infinita (Fig. 27.6.b), la onda que se produce es cilíndrica y su propagación se efectúa a lo largo de los radios del eje del cilindro.

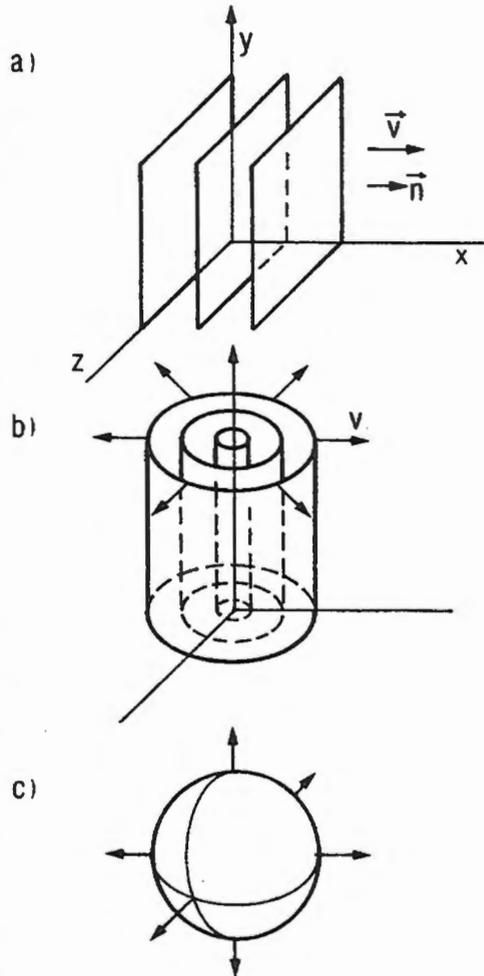


Fig. 27.6

En las ondas planas (Fig. 27.6.a), los frentes de onda son planos perpendiculares a la dirección de propagación. En la práctica, las ondas esféricas o cilíndricas pueden considerarse como planas cuando la distancia al foco sea suficientemente grande.

Hay que señalar que la ecuación de propagación de una onda plana es similar a la de la onda unidimensional antes estudiada. En efecto, si la dirección de propagación es la del eje  $OX$ , la ecuación para la onda plana será del tipo (27.1), ya que todos los puntos con la misma abscisa están en el mismo estado de perturbación. En general si la dirección de propagación viene dada por el versor  $\vec{n}$ , entonces la distancia del origen al frente de onda será  $\vec{r} \cdot \vec{n}$ , por lo que la ecuación (27.1) se escribe como

$$u(\vec{r}, t) = f(\vec{r} \cdot \vec{n} - vt) \quad (27.17)$$

que representa a una onda plana que se propaga con velocidad  $v$  en la dirección, del vector  $\vec{n}$ .

Si la onda plana es senoidal, entonces su ecuación es

$$u = A \cos k(\vec{r} \cdot \vec{n} - vt) = A \cos(\vec{r} \cdot \vec{k} - \omega t) \quad (27.18)$$

Al vector  $\vec{k} = k \vec{n}$  se le denomina vector de onda o vector de propagación.

Finalmente, hay que señalar que la ecuación diferencial (27.7) que corresponde a una onda unidimensional debe modificarse en el caso de propagación en tres dimensiones. Así, la ecuación más general de propagación de ondas es

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (27.19)$$

o bien

$$\Delta u = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \quad (27.20)$$

**27.4.2. Principio de Huygens**

Las leyes de la reflexión y de la refracción de las ondas pueden ser deducidas a partir de un estudio de la propagación de la perturbación siguiendo los sucesivos frentes de onda. Para ello resulta de gran interés el denominado principio de Huygens que establece que todo punto de un frente de onda se puede considerar como un nuevo foco de ondas secundarias que se propagan en todas direcciones; la envolvente de todas las ondas secundarias es el nuevo frente de onda.

La figura 27.7 muestra la aplicación del principio de Huygens en el caso de una onda esférica. Cualquier punto del frente de onda se considera como un nuevo emisor de ondas. Así, los puntos  $A_1, B_1, \dots$  pertenecientes al mismo frente de onda emiten simultáneamente ondas secundarias. Al cabo de un tiempo  $t$ , los radios de dichas ondas secundarias son  $vt$ , y su envolvente constituirá un nuevo frente de onda ( $A_2, B_2, \dots$ ) que ha avanzado una distancia  $vt$  con respecto al anterior.

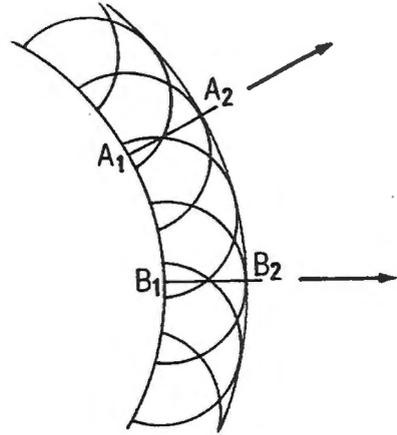


Fig. 27.7

**27.4.3. Reflexión y refracción de ondas planas**

Cuando una onda que se propaga por un medio llega a la superficie de separación con otro, da lugar a dos nuevas ondas que parten de la superficie de separación: una, que se propaga en el mismo medio que la onda incidente y recibe el nombre de onda reflejada y otra que atraviesa la superficie de separación y se propaga en el segundo medio, la onda refractada (Fig. 27.8).

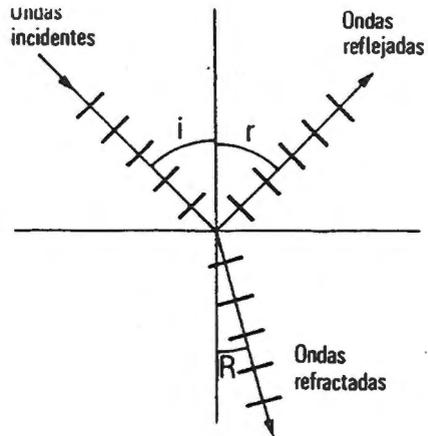


Fig. 27.8

La energía transportada por la onda se reparte entre las ondas reflejada y refractada, dependiendo el reparto de la naturaleza de ambos medios.

Analicemos en primer lugar el fenómeno de **reflexión**. Para ello admitiremos que la onda incidente es plana, así como la separación entre los dos medios.

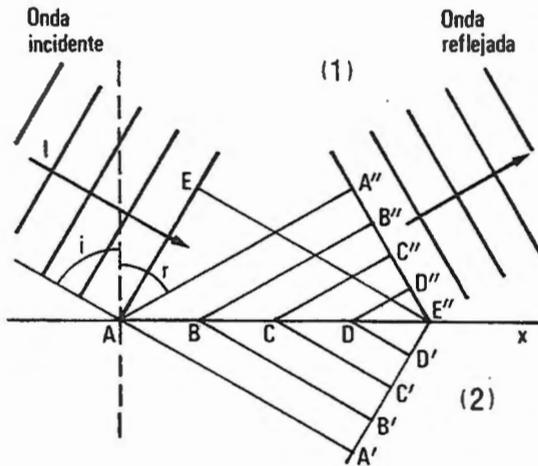


Fig. 27.9

Supongamos que la onda incidente se propaga en la dirección I. Llamaremos ángulo de incidencia  $i$ , al ángulo que forma I con la normal a la superficie (Fig. 27.9).

Sea AE la posición de un frente de onda en un instante dado. Si la superficie de separación no existiese, dicho frente de onda seguiría avanzando en la dirección I y al cabo de un tiempo dado,  $t$ , estaría en la posición A'E'.

Sin embargo, lo que ocurre es que los puntos sobre la superficie de separación entre A y E' son alcanzados sucesivamente por el frente de onda a medida que éste avanza. Así, los puntos A, B, C, D, E se convierten en fuentes de ondas secundarias, que avanzan en el medio (1).

Al cabo del tiempo  $t$  los frentes de las ondas secundarias estarían en A'', B'', C'', D'', y la envolvente A''E'' constituye el frente de la onda reflejada, que se propaga en la dirección R formando un ángulo  $r$  con la normal al plano de separación.

Evidentemente, las distancias AA' y AA'' son iguales, por lo que los triángulos AA'E'' y AA''E'' son simétricos con respecto al eje x. por tanto,

$$i = r \tag{27.21}$$

En definitiva, cuando una onda plana incide sobre una superficie plana, se refleja, siendo el ángulo de incidencia igual al de reflexión.

El fenómeno de **refracción** consiste en el cambio brusco en la dirección de propagación de una onda al atravesar la superficie de separación entre dos medios en los cuales las velocidades de propagación son distintas.

En la figura 27.10 se muestra una onda incidente que se desplaza en el medio (1) con velocidad  $v_1$  y pasa a un medio (2) en el que la velocidad de propagación es  $v_2 (v_1 > v_2)$ .

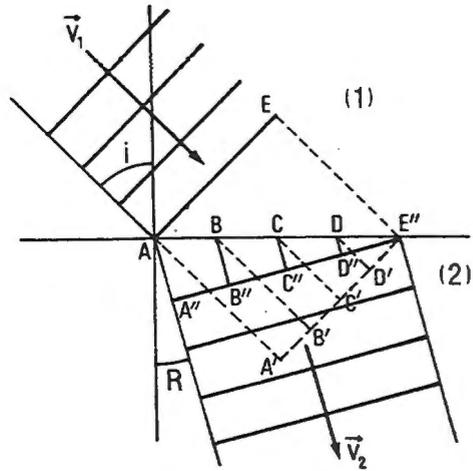


Fig. 27.10

Como en el caso anterior, cada punto A, B, C, D, E'', de la superficie de separación entre dos medios se convierte en una fuente de ondas secundarias, que se propagan en el medio (2). Si la velocidad de propagación fuese la misma en los dos medios, al cabo de un tiempo  $t$ , el frente de onda AE se habría desplazado hasta la posición A'E''. Ahora bien, puesto que  $v_2$  es menor que  $v_1$ , la distancia realmente recorrida por el frente de la onda secundaria que parte desde A, AA'' es

$$AA'' = v_2 t = AA' \frac{v_2}{v_1}$$

y así sucesivamente con los demás puntos desde A hasta E'', En definitiva vemos como se forma una onda refractada que se propaga en una dirección que forma un ángulo  $r$  con la normal al plano de separación. Dicho ángulo se denomina ángulo de refracción.

La relación entre dos ángulos incidente y de refracción es fácil obtener. Para ello basta con tener en cuenta que

$$AA' = v_1 t = AE'' \text{ sen } i$$

y que

$$AA'' = v_2 t = AE'' \text{ sen } r$$

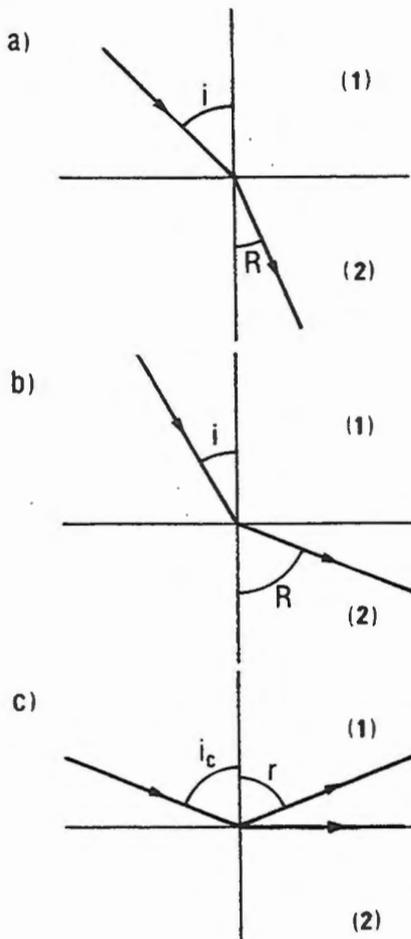
por tanto, dividiendo una expresión por la otra se tiene que

$$\frac{\text{sen } i}{\text{sen } r} = \frac{v_1}{v_2} \tag{27.22}$$

expresión que constituye la **ley de refracción**.

Despejando  $\text{sen } r$  de dicha ecuación se tiene que

$$\text{sen } r = \frac{v_2}{v_1} \text{sen } i \tag{27.23}$$



evidentemente, si  $v_1 > v_2$ , entonces el ángulo de refracción es mayor que el de incidencia. Por el contrario si  $v_2 > v_1$  entonces  $r > i$ . En este segundo caso puede presentarse una situación especial. En efecto, si el ángulo de incidencia es tal que  $\text{sen } i = v_1/v_2$  entonces  $\text{sen } r = 90$  grados, con lo cual resulta que el rayo refractado es paralelo a la superficie de separación entre dos medios. El ángulo de incidencia que verifica esta condición se denomina **ángulo crítico**,  $i_c$ .

Evidentemente si  $i > i_c$ , entonces se tendría que  $\text{sen } r > 1$ , lo cual es evidentemente imposible. Por consiguiente, en este caso no se produce onda refractada y toda la onda se refleja. Este fenómeno se denomina **reflexión total**.

Fig. 27.11

## 27.5. Interferencias

### 27.5.1. Interferencias de ondas armónicas

Si en un medio se propagan dos o más ondas, los efectos de éstas se superponen, de forma que pueden aparecer regiones en las cuales la amplitud de la perturbación sea superior a la de cada una de ellas mientras que en otras zonas la amplitud disminuye, llegando incluso a anularse. A este fenómeno se le conoce con el nombre de interferencia.

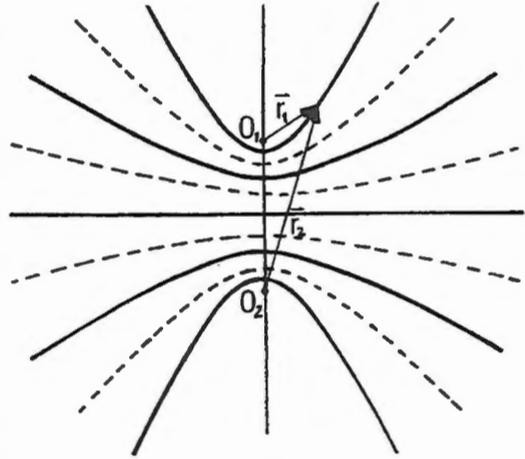


Fig. 27.12

En el estudio de la interferencia nos ceñiremos a un caso muy sencillo mostrado en la figura 27.12: dos centros  $O_1$  y  $O_2$  son emisores de ondas armónicas de la misma frecuencia y amplitud. Admitiremos, además, que el medio de propagación es isótropo y homogéneo.

En estas condiciones, las ondas emitidas por los focos  $O_1$  y  $O_2$  tienen como ecuaciones

$$u_1 = A_1 \cos(k r_1 - \omega t)$$

$$u_2 = A_2 \cos(k r_2 - \omega t)$$

Si la magnitud que oscila es escalar, el valor de la perturbación en un punto determinado y en un instante dado será la suma de los efectos de las dos ondas, es decir

$$u = u_1 + u_2 = A_1 \cos(k r_1 - \omega t) + A_2 \cos(k r_2 - \omega t)$$

es decir, se trata de la superposición de dos ondas armónicas desfasadas un ángulo

$$\varphi = k r_1 - k r_2 = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad (27.24)$$

Usando la notación basada en los vectores giratorios, la onda resultante se puede representar por

$$u = A_1 e^{j(kr_1 - \omega t)} + A_2 e^{j(kr_2 - \omega t)}$$

cuya amplitud es igual a

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1 A_2 \cos \varphi} \quad (27.25)$$

Como vemos, la amplitud  $A$  depende del desfase entre las dos ondas, lo que a su vez es función, únicamente, de la posición del punto considerado.  $A$  puede variar, según la posición, entre los valores

$$|A_1 - A_2| \leq A \leq A_1 + A_2$$

El límite inferior se alcanza en aquellos puntos en los cuales  $\cos \varphi = -1$  o bien  $\varphi = (2n + 1)\pi$ . En este caso, la amplitud es mínima y se dice que la interferencia es destructiva.

Por el contrario, la máxima amplitud se produce en aquellos puntos en los cuales  $\cos \varphi = 1$ , es decir  $\varphi = 2n\pi$ . Esta interferencia es constructiva.

Teniendo en cuenta el valor de  $\varphi$ , dado por (27.24), podemos obtener los lugares geométricos en los que se producen las interferencias constructivas o destructivas. Así, la interferencia destructiva se produce en los puntos  $p$  que verifican

$$r_1 - r_2 = \frac{(2n + 1)\lambda}{2} \quad (27.26)$$

mientras que las interferencias constructivas se producen en los puntos  $D$  tales que

$$r_1 - r_2 = n\lambda \quad (27.27)$$

Ahora bien, la ecuación  $r_1 - r_2 = \text{cte}$  corresponde a superficies hiperbólicas cuyos focos son las fuentes  $O_1$  y  $O_2$ . Las superficies correspondientes a la interferencia destructiva se denominan **nodales**, mientras que las de máxima amplitud se llaman **ventrales**.

### 27.5.2. Ondas estacionarias

Consideremos ahora la interferencia de dos ondas armónicas y planas, de la misma amplitud y frecuencia, que se desplazan en sentidos opuestos.

Tomaremos como dirección de propagación el eje  $x$ , y como origen de coordenadas un punto  $O$  en el cual las ondas se encuentren en fase. El origen de tiempos se tomará de forma que la fase inicial en  $O$  sea nula. De esta forma, las ecuaciones de las dos ondas son

$$u_1 = A \cos(kx - \omega t)$$

$$u_2 = A \cos(kx + \omega t)$$

La onda resultante tiene por ecuación

$$u = u_1 + u_2 = A [\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)]$$

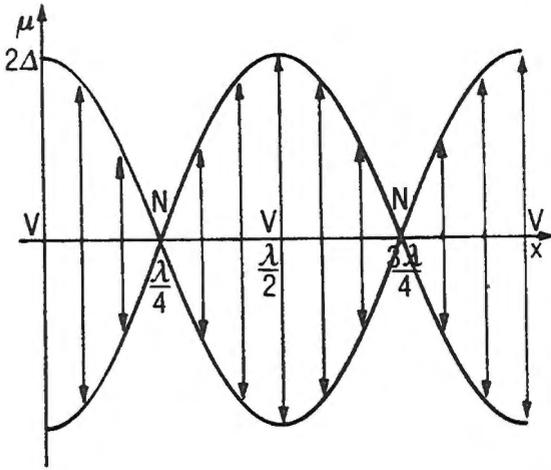
y, operando.

$$u = 2 A \cos kx \cos \omega t \quad (27.28)$$

o bien

$$u = 2 A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \cos \omega t \quad (27.29)$$

Obsérvese que en las ecuaciones anteriores, las variables  $x$  y  $t$  no aparecen relacionadas según la combinación  $(x - vt)$ , por lo que no parece haber propagación alguna de ondas. Por ello a este tipo de movimiento ondulatorio se le denomina de **ondas estacionarias**. En efecto la ecuación (27.29) indica claramente que la oscilación de la magnitud  $u$  se produce, con la misma fase en todos los puntos del espacio: sin embargo, la amplitud de la oscilación depende de la posición según la ley



$$A' = 2A \cos \frac{2\pi x}{\lambda} \quad (27.30)$$

La amplitud máxima vale  $2A$  y se produce en los puntos de abscisa  $x = n\lambda / 2$ . Estos puntos se llaman ventrales, como ya hemos comentado.

La amplitud se anula en los puntos de abscisa  $x = (2n + 1)\lambda / 4$ , que se denominan nudos.

Fig. 27.13

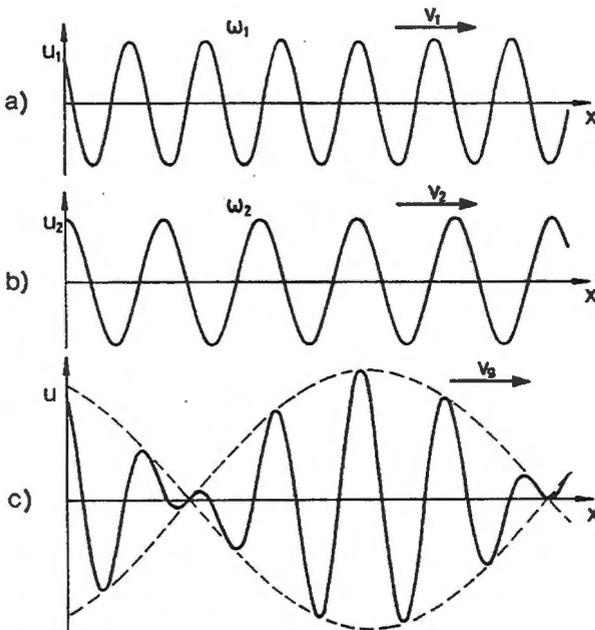


Fig. 27.14

### 27.5.3. Velocidad de grupo

Cuando se superponen ondas que se propagan con velocidad diferente se obtiene, en general, un estado no periódico en cuyo estudio no vamos a entrar. Ahora bien, si las ondas que se propagan tienen frecuencias y velocidades próximas, su composición da lugar a la formación de pulsos o trenes de onda (Fig. 27.14.c). Hay que señalar que la velocidad de propagación de tales pulsos, denominada velocidad de grupo, puede ser distinta

de la velocidad de fase, o velocidad de cada una de las ondas que lo constituyen.

Para analizar esta cuestión consideremos dos ondas armónicas planas, de la misma amplitud, y pulsaciones ligeramente distintas, que se propagan en la dirección del eje OX con velocidades ligeramente distintas

$$u_1 = A \cos(k_1 x - w_1 t)$$

$$u_2 = A \cos(k_2 x - w_2 t)$$

La onda resultante es la superposición de ambas, esto es

$$u = u_1 + u_2 = A [\cos(k_1 x - w_1 t) + \cos(k_2 x - w_2 t)] \quad (27.31)$$

y, teniendo en cuenta que

$$\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2} \cos \frac{\alpha - \beta}{2}$$

resulta

$$u = 2A \cos \left[ \left( \frac{k_1 + k_2}{2} \right) x - \left( \frac{w_1 + w_2}{2} \right) t \right] \cos \left[ \left( \frac{k_1 - k_2}{2} \right) x - \left( \frac{w_1 - w_2}{2} \right) t \right]$$

Si, para simplificar la escritura llamamos,

$$w = \frac{w_1 + w_2}{2} \quad \text{y} \quad k = \frac{k_1 + k_2}{2}$$

$$\Delta w = \frac{w_1 - w_2}{2} \quad \text{y} \quad \Delta k = \frac{k_1 - k_2}{2}$$

Se obtiene finalmente que

$$u = 2A \cos(kx - wt) \cos(\Delta kx - \Delta wt) \quad (27.32)$$

la ecuación (27.32) representa una onda plana de pulsación  $w$  y longitud de onda  $2\pi/k$ , que se propaga en la dirección  $OX$ . La amplitud de esta onda viene dada por

$$A_1 = 2A \cos(\Delta kx - \Delta \omega t) \quad (27.33)$$

es decir, no es constante sino que corresponde a otra onda con pulsación  $\Delta \omega$  y número de onda  $\Delta k$ . Este tipo de movimiento ondulatorio se llama de amplitud modulada.

Es muy importante observar que las velocidades de la onda (27.32) y de la onda de amplitudes son distintas. Así, la onda común se propaga con la velocidad de fase

$$v = \frac{w}{k}$$

mientras que la onda de amplitud se propaga con la llamada velocidad de grupo

$$v_g = \frac{\Delta \omega}{\Delta k} \quad (27.34)$$

Si, como hemos supuesto,  $\Delta \omega$  es pequeño, (27.34) puede escribirse como

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} \quad (27.35)$$

y, teniendo en cuenta que  $w = vk$ , resulta

$$v_g = v + k \frac{dv}{dk} \quad (27.36)$$

ecuación que permite obtener la velocidad de grupo en función de la velocidad de fase. Dicha expresión puede escribirse también en función de la longitud de onda como

$$v_g = v - \lambda \frac{dv}{d\lambda} \quad (27.37)$$

Se dice que el medio es no dispersivo cuando la velocidad de fase es independiente de  $k$  o de  $\lambda$ . En este caso,  $dv/dk = 0$  y la velocidad de grupo es igual a la velocidad de fase.

Por el contrario, en un medio dispersivo, la velocidad de fase es una función del número de onda: cada componente de pulso se propaga con una velocidad distinta y la velocidad de grupo es distinta de la velocidad de fase.

Finalmente, hay que indicar que en la transmisión de señales la información se transmite por la modulación de ondas y no por las propias ondas, es decir, la perturbación que se observa es el pulso y no las ondas individuales que lo constituyen. Por tanto, al hablar de la velocidad con que se transmite la señal nos referimos a la velocidad de grupo y no a la velocidad de fase.



## PROBLEMAS

- P.27.1. Escribir la ecuación de una onda plana armónica, que se propaga en la dirección OX con velocidad  $v = 100$  m/s. La amplitud de la perturbación es  $A = 5$  cm y la longitud de onda  $\lambda = 20$  m.

**SOLUCIÓN**

$$u = 5 \cos\left(\frac{\pi x}{10} - 10\pi t\right) \text{ cm}$$

- P.27.2. Comprobar que la función  $u = A \cos(\vec{r} \cdot \vec{K} - \omega t)$  es una solución de la ecuación de propagación de ondas.

- P.27.3. Sea una línea de transmisión como la descrita en el Ejemplo 27.1. Admitiendo que la onda de tensión es armónica, de la forma  $V = V_0 \cos(Kx - \omega t)$ , determinar

a) Onda de intensidad  $I = I(x, t)$

b) Relación  $Z_0 = V(x, t) / I(x, t)$

**SOLUCIÓN**

a) 
$$I = V_0 \sqrt{\frac{C}{L}} \cos(Kx - \omega t)$$

b) 
$$Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$

P.27.4. Una onda estacionaria tiene por ecuación

$$u = 10 \cos \pi x \cos 20 \pi t$$

donde  $u$  se mide en cm,  $x$  en metros y  $t$  en segundos. Calcular:

- Amplitud y velocidad de las ondas componentes.
- Distancia entre dos nodos consecutivos.

### SOLUCIÓN

- $A = 5 \text{ cm}; \quad v = 20 \text{ m/s}$
- $d = 1 \text{ m}$

P.27.5. En un medio elástico homogéneo se propagan dos ondas planas, una a lo largo del eje  $x$  y otra a lo largo del eje  $y$ :

$$u_1 = A \cos(kx - \omega t)$$

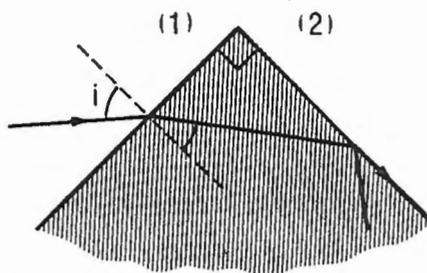
$$u_2 = A \cos(ky - \omega t)$$

Sabiendo que dichas ondas son transversales y que la dirección de oscilación en ambos casos es la del eje  $OZ$ , determinar las ecuaciones de los lugares geométricos con amplitudes máxima y mínima.

### SOLUCIÓN

- $A_{\max}: y = x \pm n\lambda$
- $A_{\min} = 0 \rightarrow y = x \pm \lambda(n+1)/2$  donde  $n$  es un número entero.

- P.27.6. La figura muestra dos caras perpendiculares de un prisma de vidrio que se encuentra inmerso en el vacío. En la cara (1) incide un rayo de luz. Indicar cual debe ser la velocidad de propagación de la luz en el vidrio para que el rayo no salga por la cara (2), independientemente del ángulo de incidencia.



P.27.6

**SOLUCIÓN**

$$v \leq c / \sqrt{2}$$

- P.27.7. La velocidad de fase de una onda viene dada por la ley  $v = c\lambda^{1/2}$ , donde  $c$  es una constante. Determinar la velocidad de grupo.

**SOLUCIÓN**

$$v_g = \frac{1}{2}v$$

- P.27.8. La relación existente entre la frecuencia angular y el número de onda de las ondas electromagnéticas en la ionosfera es del tipo

$$\omega^2 = \omega_0^2 + c^2 k^2; \quad (\omega > \omega_0)$$

donde  $\omega_0$  es una constante y  $c$  es la velocidad de la luz en el vacío. Calcular:

- a) Velocidad de fase de las ondas electromagnéticas.
- b) Velocidad de grupo.
- c) Comprobar que  $v \cdot v_g = c^2$

**SOLUCIÓN**

a) 
$$v = \left[ c^2 + \frac{w_0^2}{k^2} \right]^{1/2}$$

b) 
$$v_g = c^2 \left[ \frac{k^2}{c^2 k^2 + w_0^2} \right]^{1/2}$$

P.27.9. Teniendo en cuenta la velocidad de fase obtenida para las ondas electromagnéticas en la ionosfera, obtenida en el problema anterior, calcular el ángulo crítico para microondas de pulsación  $w$  ( $w > w_0$ ).

(Admitir que tanto la ionosfera como el aire que hay debajo son medios homogéneos e isótropos, y que la separación entre ambos medios es un plano).

**SOLUCIÓN**

$$\cos i_c = w_0 / w$$

# CAPÍTULO 28

## ONDAS ELECTROMAGNÉTICAS

### 28.1. Introducción

Según se ha estudiado en capítulos anteriores, la presencia de cargas eléctricas y corrientes en una región del espacio supone la existencia de campos eléctrico y magnético cuyos valores pueden obtenerse a partir de las ecuaciones de Maxwell. Si las fuentes que dan lugar al campo electromagnético se modifican, éste también sufrirá la correspondiente variación. Ahora bien, las posibles modificaciones de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  no se producen simultáneamente en todos los puntos del espacio sino que cualquier perturbación electromagnética se propaga con una velocidad finita.

A partir de las ecuaciones de Maxwell es posible deducir cual es la ecuación de propagación de una perturbación de este tipo. Como veremos en la siguiente sección, dicha ecuación es similar a la de propagación de una onda, con una velocidad de propagación para el caso del vacío igual a la de la luz. Por tanto, las ecuaciones de Maxwell predicen la existencia de ondas electromagnéticas de las que la luz no es más que un caso particular.

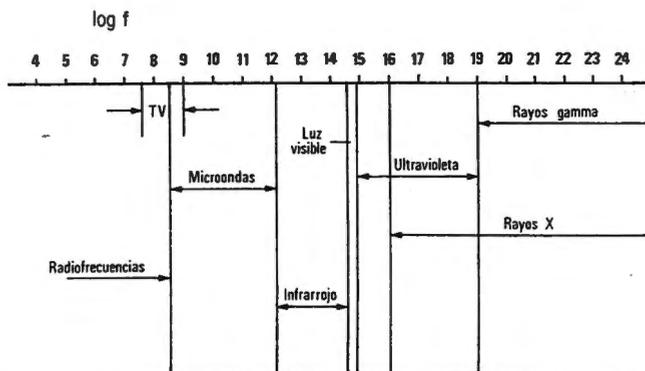


Fig. 28.1

En la figura 28.1. se reflejan los nombres dados a los distintos tipos de radiaciones electromagnéticas en función de su frecuencia.

En este capítulo se estudiarán algunos aspectos importantes de las ondas electromagnéticas y su propagación en medios como el vacío, dieléctricos o conductores. Dicho estudio se limitará al caso de ondas planas y polarizadas linealmente con objeto de eliminar complejidad matemática en la obtención de sus ecuaciones.

### 28.2. Ondas electromagnéticas planas en el vacío

En la sección 21.4 se resumieron las cuatro ecuaciones de Maxwell, cuya expresión particular para el caso del vacío es

$$\operatorname{div} \vec{E} = 0 \quad (28.1)$$

$$\operatorname{div} \vec{B} = 0 \quad (28.2)$$

$$\operatorname{rot} \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (28.3)$$

$$\operatorname{rot} \vec{B} = \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \quad (28.4)$$

Calculando el rotacional de la ecuación (28.3)

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = \operatorname{rot} \left( -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) = -\frac{\partial}{\partial t} (\operatorname{rot} \vec{B})$$

y teniendo en cuenta la (28.4), resulta que

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{E}) = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (28.5)$$

Por otra parte, puede comprobarse por derivación directa que

$$\operatorname{rot}(\operatorname{rot} \vec{A}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} \vec{A}) - \Delta \vec{A}$$

donde  $\vec{A}$  es un campo vectorial cualquiera. Aplicando esta expresión al caso que nos ocupa, y teniendo en cuenta que  $\text{div } \vec{E} = 0$  en el vacío, resulta

$$-\Delta \vec{E} = -\mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}$$

o bien

$$\Delta \vec{E} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2} \quad (28.6)$$

donde el laplaciano de  $\vec{E}$  es un vector cuyas componentes son los laplacianos de las componentes de  $\vec{E}$ .

La (28.6) constituye la ecuación diferencial de propagación del campo eléctrico en el vacío.

De modo similar, puede obtenerse la de propagación del campo magnético

$$\Delta \vec{B} = \epsilon_0 \mu_0 \frac{\partial^2 \vec{B}}{\partial t^2} \quad (28.7)$$

Ambas ecuaciones son similares a la de propagación de las ondas (27.20). Comparándolas con ella se deduce que la velocidad de propagación de una onda electromagnética en el vacío es

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0 \mu_0}} \quad (28.8)$$

cuyo valor resulta ser la velocidad de la luz en el vacío

$$c = 2'998 \cdot 10^8 \text{ m/s}$$

En definitiva, las ecuaciones de propagación de una onda electromagnética en el vacío puede escribirse como

$$\Delta \bar{E} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \quad \text{y} \quad \Delta \bar{B} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \quad (28.9)$$

Estudiemos algunas propiedades de la propagación de los campos  $\bar{E}$  y  $\bar{B}$  a partir del caso más simple de onda: onda armónica plana polarizada linealmente, admitiendo como solución de la (28.6) el campo

$$\bar{E} = \bar{E}_0 \cos(kz - wt) \quad (28.10)$$

donde  $\bar{E}_0$  es un vector constante. Esta ecuación representa la propagación del campo eléctrico en la dirección del eje OZ, con velocidad  $c = w/k$ .

El campo (28.10) debe verificar todas las ecuaciones de Maxwell, por tanto, según la (28.1)

$$\text{div } \bar{E} = 0 \quad \forall (z, t)$$

Como  $\bar{E}$  no depende de  $x$  ni de  $y$ , se puede escribir

$$\frac{\partial E_z}{\partial z} = 0 = -E_{0z} k \sin(kz - wt) \quad \forall (x, t)$$

lo que implica que la componente de  $\bar{E}_0$  en la dirección de propagación es nula. Es decir el campo eléctrico  $\bar{E}$  está contenido, en todo instante y punto, en planos perpendiculares a la dirección de propagación: la onda de propagación  $\bar{E}$  es una **onda transversal**.

Eligiendo un sistema de referencia tal que el plano XZ contenga al campo  $\bar{E}$  (Fig. 28.2), las ecuaciones del campo que se propaga son

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos(kz - wt) \\ E_y &= 0 \\ E_z &= 0 \end{aligned} \quad (28.11)$$

Ahora bien, la propagación de este campo eléctrico variable lleva aparejada, necesariamente, la de un campo magnético.

En efecto, a partir de (28.3) se obtiene que

$$\frac{\partial B_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial B_y}{\partial t} = -\frac{\partial E_x}{\partial z} = E_0 k \operatorname{sen}(kz - \omega t)$$

$$\frac{\partial B_z}{\partial t} = 0$$

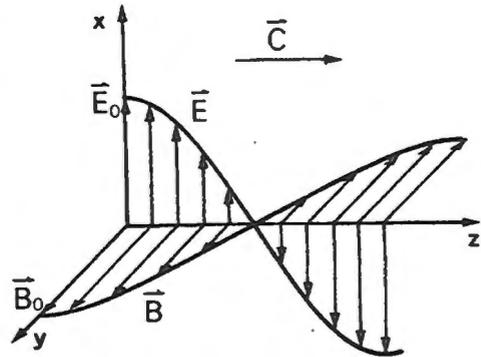


Fig. 28.2

Integrando estas ecuaciones y eliminando las constantes de integración, que representan un campo magnético constante resulta

$$B_x = 0$$

$$B_y = \frac{k}{\omega} E_0 \cos(kz - \omega t) \quad (28.12)$$

es decir, el campo eléctrico va acompañado de un campo magnético, también transversal, que oscila en una dirección perpendicular a la de  $\vec{E}$  y en fase con él. La amplitud de este campo magnético es

$$B_0 = \frac{k}{\omega} E_0 = \frac{E_0}{c} \quad (28.13)$$

En la figura 28.2, se ha representado la onda electromagnética armónica, plana y polarizada linealmente.

Obsérvese que  $\vec{E}$ ,  $\vec{B}$  y  $\vec{c}$  constituyen un triedro a derechas. Por tanto, teniendo en cuenta la relación (28.13), puede escribirse con toda generalidad que

$$\vec{B} = \frac{1}{c} (\vec{u}_k \times \vec{E}) \quad (28.14)$$

donde  $\vec{u}_k$  es el versor correspondiente a la dirección de propagación. También puede escribirse la relación vectorial entre  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  en la forma

$$\vec{E} = (\vec{B} \times \vec{u}_k) c = \vec{B} \times \vec{c} \quad (28.15)$$

### 28.3. Energía de las ondas electromagnéticas

Cualquier movimiento ondulatorio lleva asociado un flujo de energía en la dirección de propagación de la onda. Concretamente, en el caso de las ondas electromagnéticas, la energía transportada puede ser obtenida a partir del vector de Poynting definido en la sección 21.5.

$$\vec{N} = \vec{E} \times \vec{H}$$

De acuerdo con la (28.14), el vector de Poynting, para la onda electromagnética armónica plana y polarizada linealmente, es

$$\vec{N} = \frac{1}{\mu_0} \vec{E} \times \vec{B} = \frac{1}{\mu_0 c} \vec{E} \times (\vec{u}_k \times \vec{E})$$

expresión que, teniendo en cuenta que  $\vec{u}_k \cdot \vec{E} = 0$ , resulta ser

$$\vec{N} = \frac{E^2}{\mu_0 c} \vec{u}_k$$

o bien

$$\vec{N} = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E^2 \vec{u}_k = \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \cos^2(kz - \omega t) \vec{u}_k \quad (28.16)$$

ecuación que pone de manifiesto que el vector  $\vec{N}$  lleva la misma dirección que la de la propagación de la onda. En este caso,  $N$  representa la energía asociada a la onda que atraviesa, por unidad de tiempo, la unidad de superficie normal a la dirección de propagación.

Al valor medio de  $|N|$  durante un período se le denomina **intensidad de la onda electromagnética, I**

$$I = (N)_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \quad (28.17)$$

es decir, la intensidad es proporcional al cuadrado de la amplitud del campo eléctrico.

### ***28.4. Propagación en un dieléctrico lineal, homogéneo e isotropo***

Para analizar la propagación de una onda electromagnética en un medio dieléctrico lineal, homogéneo e isotropo de extensión infinita, caracterizado por una permitividad  $\epsilon$  y una permeabilidad magnética  $\mu$ , basta con seguir un razonamiento idéntico al expuesto en el apartado 28.2, pero sustituyendo en las ecuaciones de Maxwell las constantes  $\epsilon_0$  y  $\mu_0$  por  $\epsilon$  y  $\mu$  respectivamente. Con ello las ecuaciones de propogación resultan

$$\begin{aligned} \Delta \bar{E} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{E}}{\partial t^2} \\ \Delta \bar{B} &= \mu \epsilon \frac{\partial^2 \bar{B}}{\partial t^2} \end{aligned} \quad (28.18)$$

es decir, en un medio de las características citadas, las ondas electromagnéticas se propagan con una velocidad de fase

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}} = \frac{c}{\sqrt{\mu_r \epsilon_r}} \quad (28.18)$$

donde  $\mu_r$  y  $\epsilon_r$  son, respectivamente, la permeabilidad magnética y la permitividad relativas.

Si el medio es no magnético, entonces  $\mu_r = 1$ , por lo que es posible escribir, en la mayoría de los casos, que

$$v = \frac{c}{\sqrt{\epsilon_r}} \quad (28.19)$$

es decir, la velocidad de la onda electromagnética es menor en un dieléctrico que en el vacío. A la relación

$$n = \frac{c}{v} = \sqrt{\epsilon_r \mu_r} \quad (28.20)$$

se le denomina índice de refracción del medio.

Las propiedades de las ondas en un medio dieléctrico ideal son, por lo demás, idénticas a las vistas para el caso del vacío, siendo la relación entre  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$  de la forma

$$\vec{B} = \frac{1}{v} (\vec{u}_k \times \vec{E}) = \frac{n}{c} (\vec{u}_k \times \vec{E}) \quad (28.21)$$

y la intensidad de la onda

$$I = (N)_m = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} E_o^2 \quad (28.22)$$

Hay que señalar que en los dieléctricos reales el comportamiento de las ondas electromagnético difiere del caso ideal expuesto hasta ahora, apareciendo fenómenos de dispersión y de absorción.

En efecto, en general, la permitividad relativa de un dieléctrico real es una función de la frecuencia, y por tanto, la velocidad de fase varía con la misma, apareciendo el fenómeno de dispersión descrito en el apartado 27.5.3. Ello hace necesario que en la propagación de una onda no monocromática (composición de ondas de diferentes frecuencias) se tenga que distinguir entre la velocidad de fase ( $v = w/k$ ) y la velocidad de grupo ( $v_g = dw / dk$ ).

Por otra parte, en su propagación a través del dieléctrico, la onda puede perder energía al excitar transiciones entre niveles de energía. Por ejemplo, los electrones que ocupan determinados niveles de energía pueden absorber parte de la energía

transportada por la onda y pasar a un nivel superior. Así, la intensidad de la onda, y por tanto su amplitud, decrece a medida que se propaga. En general, la atenuación de la onda puede representarse mediante una relación del tipo

$$I = I_0 e^{-\beta z} \quad (28.23)$$

donde  $\beta$  es un coeficiente, llamado coeficiente de absorción que depende de la frecuencia.

### ***28.5. Ondas electromagnéticas en un medio conductor. Efecto pelicular***

La propagación de una onda electromagnética en un medio conductor lleva aparejada la existencia de corrientes eléctricas debidas al campo eléctrico oscilante. Puesto que cualquier corriente exige un aporte de energía, que se disipa en forma de calor por efecto Joule, la onda irá cediendo su energía a medida que avanza a través del medio. En definitiva, en un medio conductor las ondas electromagnéticas son fuertemente atenuadas. En este apartado se determinará esta atenuación y se verán algunas de sus consecuencias prácticas.

La deducción de los campos  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  que pueden existir en un conductor puede efectuarse, de modo general, a partir de las ecuaciones de Maxwell. Sin embargo, los cálculos que lleva aparejados son complejos y se salen de los objetivos de este texto. Nos limitaremos, por tanto, a estudiar un caso sencillo, en el que se parte de una solución posible, comprobando luego su compatibilidad con las ecuaciones de Maxwell.

Sea un medio conductor, homogéneo e isótropo que ocupa el semiespacio  $z > 0$ . Sean  $\sigma$ ,  $\epsilon$  y  $\mu$  la conductividad, permitividad y permeabilidad magnética del medio, respectivamente. Supongamos que la onda se propaga en la dirección del eje OZ y que el campo  $\vec{E}$  oscila en la dirección del eje OX figura 23.8. Como se ha indicado anteriormente, es de esperar que la onda se atenúe a medida que avanza, por lo que la ecuación que la representa no puede ser del tipo (28.10), sino que la amplitud debe decrecer con  $z$ . Ensayemos un campo oscilante de la forma

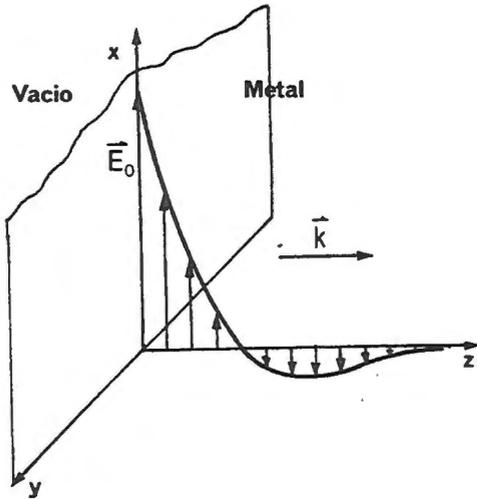


Fig. 28.3

$$E_x = E_0 \exp[-\alpha z] \cos(kz - \omega t) \quad (28.24)$$

donde  $\alpha$  es un coeficiente de atenuación. Comprobaremos a continuación que un campo de este tipo es compatible con las ecuaciones de Maxwell y determinaremos cual es el valor de  $\alpha$ . Por comodidad en los cálculos, se expresa la ecuación (28.4) utilizando la notación basada en los vectores giratorios ( $E_x$  no es periódico en  $z$  pero si en  $t$ ):

$$E_x = \text{Re}(\bar{E}_x) = \text{Re}\{E_0 \exp[-\alpha z] \exp[j(kz - \omega t)]\} \quad (28.25)$$

o bien

$$\bar{E}_x = E_0 \exp[z(-\alpha + jk)] \exp[-j \omega t] \quad (28.26)$$

El campo magnético asociado a este campo eléctrico variable, se calcula mediante la ley de Faraday (28.3) que, desarrollada, da lugar a las ecuaciones

$$\frac{\partial \bar{B}_x}{\partial t} = 0$$

$$\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial t} = -\frac{\partial \bar{E}_x}{\partial z} = (\alpha - jk) \bar{E}_x$$

$$\frac{\partial \bar{B}_z}{\partial t} = 0$$

Integrando estas ecuaciones y eliminando las constantes de integración se obtienen las componentes del campo magnético

$$\bar{B}_x = 0$$

$$\bar{B}_y = j \frac{(\alpha - jk)}{w} \bar{E}_x \quad (28.27)$$

$$\bar{B}_z = 0$$

donde  $B_x = \text{Re}(\bar{B}_x)$ ,  $B_y = \text{Re}(\bar{B}_y)$  y  $B_z = \text{Re}(\bar{B}_z)$ . Las ecuaciones (28.27) ponen de manifiesto que el campo  $\bar{B}$  también es transversal (sólo tiene componente en  $y$ ) y su amplitud decrece con  $z$  según el mismo factor que en el campo eléctrico.

Comprobemos ahora que los campos eléctrico y magnético así obtenidos verifican las otras tres ecuaciones de Maxwell. Así, resulta evidente que

$$\text{div } \bar{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} = 0$$

$$\text{div } \bar{B} = \frac{\partial B_y}{\partial y} = 0$$

ya que tanto  $E_x$  como  $B_y$  sólo dependen de  $z$ . Obsérvese que se está suponiendo que en el conductor no hay densidad volumétrica de carga.

Finalmente, falta por comprobar la ecuación de Ampère-Maxwell que, para el caso de un conductor es

$$\text{rot } \bar{B} = \mu \bar{J} + \mu \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

y, teniendo en cuenta que  $\bar{J} = \sigma \bar{E}$ , resulta

$$\text{rot } \bar{B} = \mu \sigma \bar{E} + \mu \epsilon \frac{\partial \bar{E}}{\partial t}$$

Ahora bien, en un buen conductor, las corrientes de conducción son mucho mayores que las de desplazamiento (ver Ejemplo 21.1) salvo para frecuencias muy

altas. Por tanto despreciaremos las corrientes de desplazamiento. En definitiva, la expresión de la ley de Ampère-Maxwell que hemos de comprobar es

$$\text{rot } \bar{B} = \mu \sigma \bar{E} \quad (28.30)$$

El primer miembro de esta ecuación es, teniendo en cuenta (28.27) y (28.26),

$$(\text{rot } \bar{B})_x = -\frac{\partial \bar{B}_y}{\partial z} = j \frac{(-\alpha + jk)^2}{w} \bar{E}_x \quad (28.31)$$

siendo nulas las otras componentes.

Por tanto, la verificación de la ley de Ampère-Maxwell exige que

$$j \frac{(-\alpha + jk)^2}{w} \bar{E}_x = \mu \sigma \bar{E}_x$$

o bien

$$j \frac{(-\alpha + jk)^2}{w} = \mu \sigma \quad (28.32)$$

operando, esta condición se describe como

$$j \frac{(\alpha^2 - k^2)}{w} + \frac{2\alpha k}{w} = \sigma \mu$$

de donde se deduce que  $\alpha = k$  y que

$$\frac{2\alpha^2}{w} = \sigma \mu$$

En definitiva, los coeficientes  $\alpha$  y  $k$  son iguales y valen

$$k = \alpha = \sqrt{\frac{\sigma \mu w}{2}} \quad (28.33)$$

La inversa de  $\alpha$ ,  $\delta$

$$\delta = \sqrt{\frac{2}{\sigma \mu \omega}} \quad (28.34)$$

recibe el nombre de **profundidad de penetración**, y representa la distancia de la superficie a la cual la amplitud del campo es  $E_0/e$ . Como puede verse en la ecuación (28.34), la profundidad de penetración disminuye con la frecuencia. Esto supone una importante limitación a la hora de diseñar conductores que deban transportar corrientes de frecuencias elevadas. Si el conductor es cilíndrico, el campo eléctrico será paralelo a su eje, y se verá fuertemente atenuado en los puntos interiores.

Puesto que la densidad de corriente es proporcional a  $\vec{E}$ , resulta evidente que en un conductor metálico, a muy altas frecuencias, toda la corriente está distribuida en una estrecha capa próxima a la superficie. Este efecto se conoce con el nombre de efecto de superficie o efecto pelicular.

Si el conductor es ideal ( $\sigma = \infty$ ), la profundidad de penetración es nula, es decir, un conductor ideal resulta absolutamente opaco a las ondas electromagnéticas.



**PROBLEMAS**

P.28.1 Un haz láser de 1 mm. de diámetro transporta una potencia de 1 Kw. Calcular:

- a) Amplitud del campo eléctrico  $E_0$ .
- b) Amplitud del campo magnético  $B_0$ .

**SOLUCIÓN**

a)  $E_0 = 9'8 \cdot 10^5 \text{ V / m}$

b)  $B_0 = 3'3 \cdot 10^{-3} \text{ T}$

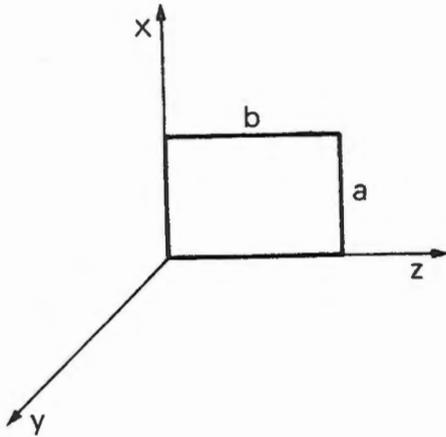
P.28.2. Una onda electromagnética plana se propaga en el vacío. Sabiendo que su frecuencia es  $f = 98'4 \text{ M Hz}$  y que la amplitud del campo eléctrico es  $E_0 = 20 \text{ m V / m}$ . Calcular:

- a) Amplitud de la densidad de corriente de desplazamiento.
- b) Intensidad de la onda.

**SOLUCIÓN**

a)  $J_{D0} = 0'11 \text{ m A / m}^2$

b)  $I = 0'53 \mu \text{ W / m}^2$



P.28.3

P.28.3. La componente eléctrica de una onda electromagnética plana, polarizada linealmente y armónica, que se propaga por el vacío, es

$$E_x = E_0 \cos(kz - \omega t)$$

$$E_y = E_z = 0$$

Calcular:

a) F.e.m. inducida sobre la espira rectangular de lados  $a$  y  $b$ , de la figura.

b) Valor de  $b$  para que la amplitud de dicha f.e.m. sea máxima.

**SOLUCIÓN**

a) 
$$\mathcal{E} = -2a E_0 \operatorname{sen} \frac{kb}{2} \operatorname{sen} \left( \frac{kb}{2} - \omega t \right)$$

b) 
$$b = \lambda(n+1) / 2$$

P.28.4. Una onda electromagnética plana, armónica y polarizada linealmente se propaga en el vacío. Calcular la relación entre las densidades de energía eléctrica y magnética,  $w_E / w_B$

**SOLUCIÓN**

$$w_E / w_B = 1$$

- P.28.5. Una onda electromagnética se propaga en un dieléctrico perfecto de permitividad  $\epsilon$  y permeabilidad  $\mu$ . Demostrar que la intensidad de la onda,  $I$ , puede expresarse como

$$I = \bar{w} \cdot v$$

donde  $\bar{w}$  es el valor medio de la densidad de energía electromagnética y  $v$  es la velocidad de fase.

- P.28.6. En el vacío se establece una onda electromagnética estacionaria cuya componente eléctrica es

$$\begin{aligned} E_x &= E_0 \cos kz \cos wt \\ E_y &= E_z = 0 \end{aligned}$$

Obtener :

- Componente magnética de la onda  $\vec{B}(z, t)$ .
- Vector de Poynting.
- Intensidad de la onda.

### SOLUCIÓN

$$a) \quad B_y = \frac{E_0}{c} \sin kz \sin wt; \quad B_x = B_z = 0$$

$$b) \quad N = \frac{1}{4} \sqrt{\frac{\epsilon_0}{\mu_0}} E_0^2 \sin 2kz \sin 2wt$$

$$c) \quad I = 0$$

P.28.7. Una onda electromagnética de frecuencia  $f = 2 \text{ k Hz}$  incide sobre la superficie del mar. Calcular:

a) Relación entre las amplitudes de las corrientes de conducción y de desplazamiento.

b) Profundidad de penetración.

c) Profundidad para la cual la amplitud del campo eléctrico disminuye hasta un 1% de su valor en la superficie.

Datos:  $\sigma = 4\Omega^{-1}\text{m}^{-1}$ ,  $\epsilon_r = 80$ ,  $\mu = \mu_0$

**SOLUCIÓN**

a)  $J_c / J_d = 4'5 \cdot 10^5$

b)  $\partial = 5'6 \text{ m}$

c)  $z = 25'9 \text{ m}$

P.28.8. Una onda electromagnética de frecuencia  $f = 1 \text{ k Hz}$  penetra en un conductor. Sabiendo que la conductividad  $\sigma = 5 \cdot 10^7 \Omega^{-1} \text{ m}^{-1}$  y que  $\mu_0 = \mu$ , calcular:

a) Desfase entre  $\vec{B}$  y  $\vec{E}$ .

b) Relación E/B.

Establecer una comparación con el caso de propagación en el vacío.

**SOLUCIÓN**

a)  $\varphi = \pi / 4 \text{ rad.}$

b)  $E/B = 10 \text{ m/s.}$  En el vacío,  $\vec{E}$  y  $\vec{B}$  están en fase y la relación  $E/B = c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s}$  es mucho mayor.

# CAPÍTULO 29

## NATURALEZA CORPUSCULAR DE LA RADIACIÓN

### *29.1. Introducción*

A finales del siglo pasado, y desde la óptica que interesa al capítulo que se va a desarrollar, la Física se encontraba en una situación que se podría resumir en lo siguiente:

Por un lado, se había puesto de manifiesto el carácter discontinuo de la materia, que a su vez se extendía a los fenómenos eléctricos con el descubrimiento del electrón.

Por otro, se había afianzado el carácter ondulatorio de la radiación a partir de la teoría de Maxwell, ampliamente confirmada por todas las manifestaciones ondulatorias de la radiación en su propagación (reflexión, difracción, interferencias, etc.).

Sin embargo, respecto a la radiación, una serie de fenómenos concretos quedaban sin explicar a partir de la teoría electromagnética. Las experiencias con la radiación térmica no encontraban justificación teórica. Los resultados medidos en el efecto fotoeléctrico y Compton tampoco se explicaban a partir de las ecuaciones de Maxwell. En definitiva, la teoría desarrollada hasta entonces resultaba insuficiente para explicar los fenómenos citados.

Esta situación de crisis, que no era nueva en el desarrollo de la Física, exigía un nuevo planteamiento teórico asumido por unos nuevos principios que, además de explicar satisfactoriamente estos resultados experimentales, fueran compatibles con toda la teoría desarrollada hasta entonces y confirmada por la experiencia.

La teoría de los cuantos de Planck constituye el postulado que cumple los requisitos antes mencionados, ofreciendo una explicación correcta a la radiación térmica y sirviendo de base para que, posteriormente, Einstein construyera su teoría de los fotones explicando el efecto fotoeléctrico. La descripción de estas experiencias, sus dificultades y su posterior interpretación a partir de los cuantos de Planck es el objeto de este tema.

Posteriormente, y en base al postulado de Planck, Bohr plantea una estructura del átomo que explica los espectros de emisión y absorción. Todo ello lleva a una cuantización de la radiación, es decir a un tratamiento de la onda como corpúsculo.

En 1925, De Broglie introduce lo que podríamos llamar enunciado simétrico al de Planck, por el que pone de manifiesto el carácter ondulatorio de las partículas y es en este contexto de dualidad onda-corpúsculo en el que se plantea la ecuación de Schrödinger, fundamental en el posterior desarrollo de toda la mecánica cuántica.

### ***29.2. La radiación térmica***

Se denomina así a la emisión de ondas electromagnéticas de un cuerpo debido a su temperatura. Todo cuerpo emite radiación hacia su entorno y a su vez la absorbe de él. El balance de esta radiación emitida y absorbida por el cuerpo da un índice de la temperatura del mismo respecto a los que lo rodean, de modo que si un cuerpo se encuentra a una temperatura superior a los que lo rodean, emitirá más radiación de la que absorbe. Cuando la cantidad de radiación absorbida es igual a la emitida, el cuerpo se encuentra en equilibrio térmico.

Si se calienta una barra metálica, se observa que a una temperatura relativamente baja la barra irradia calor pero no presenta ninguna característica visible de su aumento de temperatura. A medida que ésta aumenta, también lo hace la radiación, y empiezan a apreciarse efectos visibles. Así, primero tomará un color rojo que se irá haciendo cada vez más brillante hasta que, a temperaturas muy altas, tomará un color blanco azulado. Si tenemos en cuenta que en el espectro visible la longitud de onda va disminuyendo del rojo al azul, se concluye que la frecuencia de la radiación emitida por un cuerpo aumenta con la temperatura.

El espectro de radiación que resulta de representar la cantidad de radiación total en función de la frecuencia emitida resulta característico para cada material.

Sin embargo, si cuerpos de distinto material se cubren de una capa mate de carbón negro o negro-bismuto, se observa que al realizar el experimento anterior los espectros emitidos son similares. En definitiva, independientemente de su composición, todos los cuerpos con las superficies así tratadas a las mismas temperaturas emiten radiaciones de idéntico espectro.

Este hecho apuntó la conveniencia de estudiar un modelo teórico de estos cuerpos al que se denominó cuerpo negro, cuya superficie absorbe la totalidad de la radiación que incide sobre ella.

El dispositivo que mejor se aproxima a este modelo teórico es la superficie de un pequeño orificio practicado en un recinto cerrado cuyas paredes interiores se han ennegrecido. Un rayo que penetre por el citado orificio sufrirá sucesivas reflexiones en su interior, de modo que en cada una de ellas parte de la energía será absorbida y finalmente sólo una pequeña fracción de ese rayo podrá salir de la cavidad (Fig. 29.1).

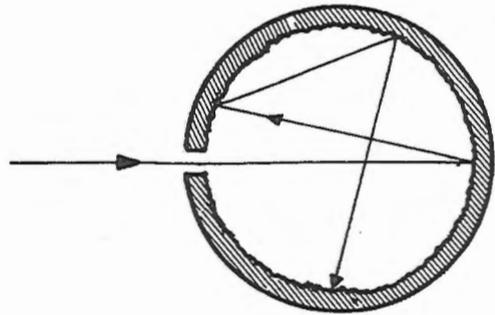


Fig. 29.1

La emisión total del cuerpo negro viene dada por la radiación total,  $R$ , definida como la energía emitida por unidad de superficie y unidad de tiempo. La parte de esta energía transportada por las radiaciones cuyas frecuencias están comprendidas entre  $\nu$  y  $\nu + d\nu$  es

$$R_\nu(\nu, T) d\nu \tag{29.1}$$

donde  $R_\nu$  se denomina radiación espectral.

En 1899, Lummer y Pringsheim, después de un proceso experimental muy laborioso y preciso, llegaron a representar la radiancia espectral en función de la frecuencia emitida para distintas temperaturas, obteniéndose las curvas representadas en la figura 29.2.

Experimentalmente se comprueba que:

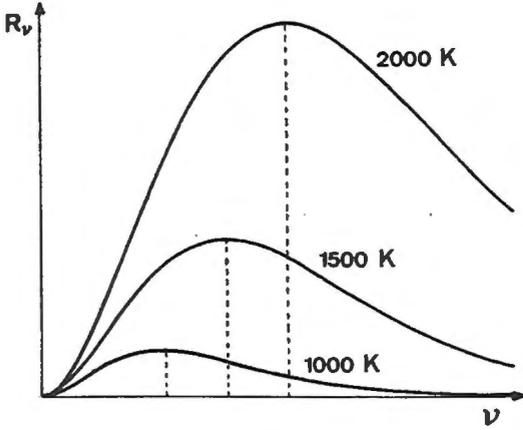


Fig. 29.2

- a) La radiancia espectral depende de la frecuencia y de la temperatura, y es independiente de las propiedades del cuerpo negro considerado.
- b) Para pequeños valores de  $\nu$ ,  $R_\nu$  es proporcional a  $\nu^2$ , mientras que para altos valores de  $\nu$ ,  $R_\nu$  disminuye exponencialmente con el aumento de  $\nu$ .
- c) La radiancia total  $R$  se obtiene mediante la expresión:

$$R = \int_0^\infty R_\nu \, d\nu \tag{29..2}$$

cuyo resultado, medido experimentalmente, constituye la ley de Stefan-Boltzmann

$$R = \sigma T^4 \tag{29.3}$$

siendo

$$\sigma = 5'67 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2 \cdot \text{k}^4$$

la constante de Stefan-Boltzmann.

- d) La frecuencia  $\nu$  para la cual  $R_\nu$  tiene su valor máximo es proporcional a la temperatura absoluta

$$\nu_{\text{max}} = a T \tag{29.4}$$

donde  $a = 196 \text{ c/s} \cdot \text{K}$  ( $c =$  velocidad de la luz en el vacío). La relación (29.4) es la conocida ley de desplazamiento de Wien.

e) La radiancia espectral se puede representar por la expresión

$$R_{\nu} = \frac{\nu^3}{c^2} f\left(\frac{\nu}{T}\right) \quad (29.5)$$

donde  $f$  es una función algebraica que sólo depende de  $(\nu / T)$ .

La forma de la función  $f$  fue deducida, aplicando los principios de la termodinámica estadística, encontrándose dos expresiones, únicamente válidas en diferentes regiones del espectro, y que dieron lugar a dos formas distintas de la ecuación (29.5), a saber:

$$R_{\nu} = \frac{2\pi k \cdot T}{c^2} \nu^2 \quad (29.6)$$

conocida como ecuación de Rayleigh-Jeans, donde  $c$  es la velocidad de la luz y  $k$  la constante de Boltzmann, y que es válida para bajas frecuencias, y

$$R_{\nu} = a_1 \nu^3 e^{-a_2/\nu T} \quad (29.7)$$

para altas frecuencias, donde  $a_1$  y  $a_2$  son constantes independientes de la temperatura.

En definitiva, por aplicación de los principios de la Física Clásica no se podía explicar los resultados experimentales puestos de manifiesto en las curvas de la figura 29.2.

### ***29.3. Teoría de Planck de la cavidad radiante***

En 1900, el físico alemán Max Planck formuló una nueva teoría, a la que denominó teoría de los cuantos, que explica la discrepancia entre teoría y experimento anteriormente citada.

Planck postuló la discontinuidad en la energía intercambiada entre la pared de la cavidad y la onda de frecuencia  $\nu$ , enunciando el siguiente principio:

La radiación intercambiada entre la superficie caliente y su entorno es tal que su energía asociada es un múltiplo entero de la frecuencia de la radiación multiplicada por una constante  $h$ , es decir,

$$E = n h \nu, \quad n = 1, 2, \dots \quad (29.8)$$

A la cantidad de energía elemental,  $h\nu$ , se la denomina cuanto de energía y  $h$  es una constante universal cuyas dimensiones son las de una energía por un tiempo y cuyo valor es

$$h = 6.63 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

A ésta, se la denomina constante de Planck.

Según este principio, los intercambios de energía son siempre números enteros del cuanto de energía, es decir, la energía está cuantizada.

Partiendo de esta nueva hipótesis, Planck obtuvo, para cuantificar la radiancia espectral del cuerpo negro, la expresión

$$R_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} \left[ e^{h\nu/kT} - 1 \right]^{-1} \quad (29.9)$$

que incluye como casos particulares a las fórmulas (29.7) y (29.6). En efecto, para valores pequeños de la frecuencia,  $\nu \ll kT/h$ , es

$$e^{h\nu/kT} - 1 \approx \frac{h\nu}{kT}$$

por lo que

$$R_\nu = \frac{2\pi kT \nu^2}{c^2}$$

expresión que coincide con la (29.6).

Para valores altos de la frecuencia ( $\nu \gg kT/h$ ), el término  $e^{h\nu/kT}$  es muy superior a la unidad, y la expresión (29.9) se transforma en

$$R_\nu = \frac{2\pi h \nu^3}{c^2} e^{-h\nu/kT}$$

ecuación similar a la (29.7).

Todo este proceso por el que una nueva formulación representa una generalización de los resultados clásicos, apareciendo éstos como casos particulares límites, no es único en el avance de la Física de nuestro siglo, sino que constituye toda una metodología de comprobación parcial de los principios o postulados.

### Nota complementaria 29.1. Interpretación del postulado de Planck

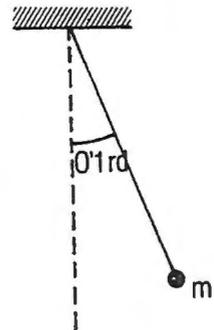
Las radiaciones emitidas por la superficie de la cavidad del cuerpo negro son debidas a las oscilaciones de los átomos de la materia que la constituye; oscilaciones excitadas por el aumento de temperatura.

Según la teoría electromagnética los estados de excitación de estos átomos son continuos y en consecuencia también lo es la energía emitida por ellos.

Planck postula que estas oscilaciones del tipo armónico simple sólo pueden tener energías totales discretas.

Ahora bien, cabría pensar que el comportamiento de ciertos sistemas estudiados en Mecánica, está en desacuerdo con este postulado y que en ellos la energía toma valores continuos. Veamos un ejemplo sencillo y comparemos los resultados con los previstos por la teoría de Planck.

Así, el péndulo simple constituido por un hilo de 0.5 m. de longitud en cuyo extremo tiene una masa puntual de 5 gramos y que se abandona desde una amplitud respecto a la vertical de 0.1 rad. En las sucesivas ondulaciones la energía del péndulo se va disipando por rozamiento. ¿Será continua dicha disipación de energía?



La frecuencia  $\nu$  de oscilación del péndulo es

$$\nu = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{l}} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{9'8}{0'5}} = 0'7 / \text{seg}$$

Según la teoría de Planck la energía está cuantizada de modo que el cuanto de energía disipado es

$$\Delta E = h\nu = 6'63 \times 10^{-34} \times 0'7 = 4'64 \times 10^{-34} \text{ J}$$

La energía total del péndulo es

$$E = mgh = mgl(1 - \cos \theta) = 1'22 \cdot 10^{-4} \text{ J}$$

Según estos resultados, para poder apreciar la cuantización de la energía se necesitaría por de realizar medidas de una precisión al menos igual a

$$\frac{\Delta E}{E} = 2'68 \times 10^{-29}$$

lo que resulta imposible con los equipos de medida de que se dispone.

Este resultado pone de manifiesto que en todos aquellos experimentos en los que el cuanto de energía sea tan pequeño no se puede saber si cumplen o no el postulado de Planck, y todo ello se debe al pequeño valor de la constante  $h$ . Así, en todos los sistemas mecánicos se puede considerar que  $h$  es nula y por tanto que la emisión de energía es continua. Sin embargo en sistemas físicos cuya frecuencia sea tal que su producto por  $h$  sea comparable a la energía que se disipa, es de plena validez la teoría de Planck, como se comprobará en los temas siguientes.

### ***29.4. Propiedades corpusculares de la radiación. Efecto fotoeléctrico***

En este apartado se estudia el proceso de interacción de la radiación con la materia, siendo dos los fenómenos que están más directamente implicados en la comprobación de la naturaleza de esta interacción, a saber: efecto fotoeléctrico y efecto Compton.

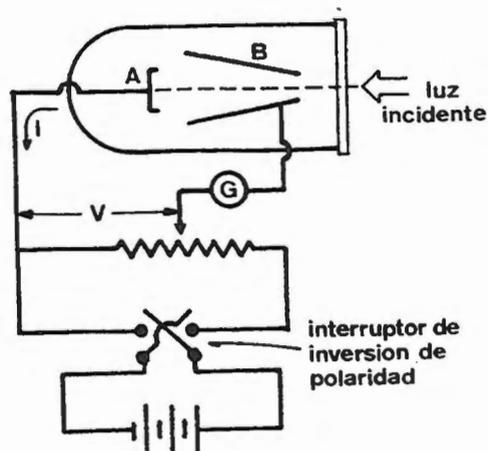
Dada la poca aplicación que el efecto Compton tiene en lo que va a constituir el resto del capítulo, y puesto que su estudio exigiría la utilización de la teoría de la relatividad especial, se estudiará únicamente el efecto fotoeléctrico como fenómeno tipo que también requiere para su correcta interpretación aceptar el postulado de Planck como punto de partida.

Se denomina efecto fotoeléctrico al fenómeno consistente en la emisión de electrones (fotoelectrones) de la superficie de un metal sometido a radiaciones de longitud de ondas cortas.

En 1887, Hertz descubrió, en el transcurso de unas experiencias, que una descarga eléctrica entre dos electrodos ocurre más fácilmente cuando sobre uno de ellos incide la luz ultravioleta. Posteriormente, Llenard demostró que la luz ultravioleta facilita tal descarga porque ocasiona la emisión de electrones desde la superficie del metal.

El dispositivo experimental utilizado para estudiar el efecto fotoeléctrico se esquematiza en la figura 29.3.

La luz incidente monocromática atraviesa la ventana de cuarzo e incide sobre la superficie A del metal, donde se liberan electrones. Estos electrones son atraídos hacia la copa metálica B (mediante la diferencia de potencial aplicada), detectándose una corriente en el galvanómetro G.



*Fig. 29.3*

A medida que aumenta  $V$  también lo hace  $I$ , hasta que ésta alcanza un valor límite (intensidad de saturación), en el que la intensidad se hace independiente de la tensión. Este valor límite refleja la situación de que todos los fotoelectrones emitidos por A llegan a B.

Ahora bien, si disminuye el valor de  $V$  hasta cero, se observa que la intensidad, aunque desciende, no es nula, de modo que para anularla se debe invertir el sentido de  $V$  y llevarlo a un valor  $V_0$  denominado potencial de frenado.

Este hecho pone de manifiesto que los electrones liberados de A poseen una energía cinética  $T$  que hace que algunos alcancen la copa B. Sometiendo dichos electrones al potencial de frenado  $V_0$ , ninguno de ellos alcanzará la copa B. Por tanto

$$T_{\max} = e V_0 \quad (29.10)$$

donde  $T_{\max}$  es la mayor energía cinética de los electrones emitidos.

Experimentalmente se comprueban los siguientes hechos:

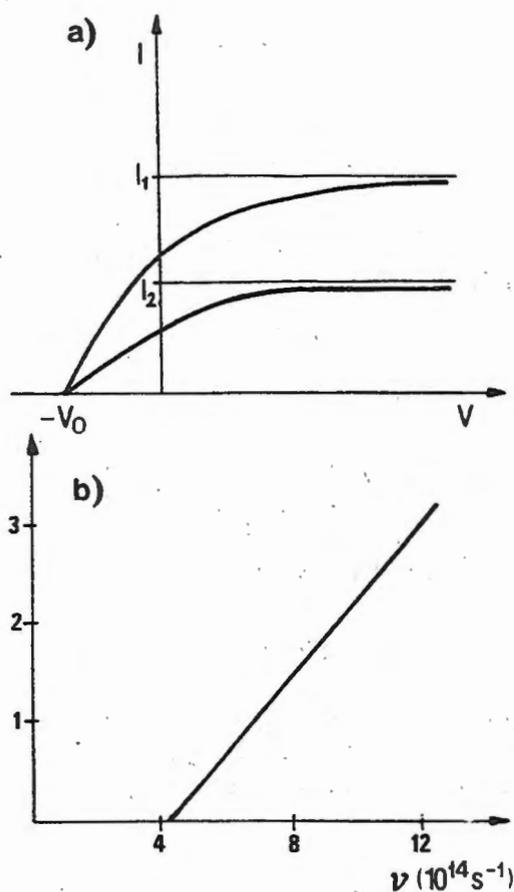


Fig. 29.4

- 1.-  $T_{\max}$  es independiente de la intensidad de la luz monocromática incidente, tal y como se muestra en la figura 29.4.a, en la que cada curva corresponde a una intensidad distinta.
- 2.- Representando los potenciales de frenado  $V_0$  para cada valor de la frecuencia, se observa que existe un valor de ésta,  $\nu_0$ , denominada frecuencia de corte, por debajo de la cual no se produce el efecto fotoeléctrico figura 29.4.b.

Estos resultados no pueden ser explicados según la teoría ondulatoria de la luz. En efecto:

- a) Según la teoría ondulatoria, la fuerza aplicada al electrón es  $\vec{E}_e$  y la energía cinética que adquiere sería, evidentemente, proporcional

a  $\bar{E}$ . Sin embargo, el valor de  $\bar{E}$  (vector eléctrico oscilante de la onda luminosa) aumenta al aumentar la intensidad del haz luminoso. Por tanto,  $T_{\max}$  debería aumentar con el incremento de la intensidad luminosa, resultado éste que no se confirma en la experiencia .

- b) Por otra parte, la teoría ondulatoria establece la proporcionalidad entre la energía del haz luminoso y la intensidad del mismo. Por tanto, no se explica la existencia de una frecuencia de corte, por debajo de la cual no se produce el efecto fotoeléctrico incluso cuando se aumenta la intensidad.

### 29.5. Teoría de los fotones de Einstein

En 1905, Einstein propuso una nueva teoría sobre la naturaleza de la luz según la cual la energía radiante estaba cuantizada en paquetes concentrados a los que denominó fotones, poniendo en crisis la teoría ondulatoria de la luz universalmente aceptada hasta entonces. El efecto fotoeléctrico y su interpretación en base a la nueva teoría fue una aplicación fundamental en la aceptación de la misma.

Según Einstein, las manifestaciones ondulatorias de la luz (difracción, interferencias, etc) tienen lugar en aquellos fenómenos en los cuales el número de fotones es elevado y por tanto los observables son un promedio de los comportamientos individuales de los fotones.

Aplicando la teoría de Planck, supuso que la energía  $E$  del fotón está relacionada con su frecuencia  $\nu$ , mediante la ecuación

$$E = h \nu$$

En el efecto fotoeléctrico, los electrones libres del cátodo absorben un fotón, adquiriendo toda su energía, de modo que la energía cinética  $T$  de los electrones emitidos es

$$T = h\nu - \phi \tag{29.11}$$

donde  $\phi$  es el trabajo necesario para extraer el electrón del metal, venciendo las fuerzas atractivas a que se encuentra sometido el electrón en el metal. Evidentemente existirán electrones que están más ligados al metal que otros; en el caso en que el

enlace con el metal sea el más débil, el fotoelectrón será emitido con la energía cinética máxima  $T_{\max}$ , cumpliéndose

$$T_{\max} = h\nu - \phi_0 \quad (29.12)$$

donde  $\phi_0$  es la función de trabajo y representa la mínima energía necesaria para que el electrón abandone el metal.

Esta teoría propuesta por Einstein explica satisfactoriamente los fallos (a) y (b) observados en el efecto fotoeléctrico y enunciados en el apartado anterior. En efecto:

- En cuanto a la falta de dependencia de  $T_{\max}$  con la intensidad de la luz, resulta explicada por la ecuación (29.12), ya que al aumentar la intensidad luminosa crece el número de fotones, pero no su energía, que sólo depende de  $\nu$ .

- Por otra parte, aparece plenamente justificada la existencia de una frecuencia de corte, correspondiente a la frecuencia de los fotones con la mínima energía suficiente para arrancar un electrón. Haciendo  $T_{\max} = 0$  en (29.12) resulta

$$\nu_0 = \frac{\phi_0}{h} \quad (29.13)$$

Si  $\nu < \nu_0$ , los fotones no podrían comunicar a los electrones la energía suficiente para abandonar el metal, independientemente de la intensidad de la luz.

Sustituyendo (29.10) en (29.12) resulta

$$V_0 = \frac{h\nu}{e} - \frac{\phi_0}{e} \quad (29.14)$$

lo que pone de manifiesto la relación lineal entre el potencial de frenado  $V_0$  y la frecuencia. La pendiente de la recta es

$$\frac{h}{e} = 4'14 \cdot 10^{-15} \text{ V} \cdot \text{S}$$

valor que sirve para calcular experimentalmente la constante Planck.

La Física actual utiliza la hipótesis del fotón no sólo para la luz visible, sino para todo el espectro electromagnético. Así, para una radiación energética como los R-X, la energía del fotón puede ser del orden de Mev siendo dichos fotones capaces de extraer electrones fuertemente ligados a átomos pesados. Los fotones de la luz visible tan sólo son capaces de arrancar electrones débidamente ligados, tales como los electrones de conducción de un metal.



## PROBLEMAS

- P.29.1 Determinar la radiancia total de un cuerpo negro a 500 K. Calcular la relación  $R(1000 \text{ K}) / R(500 \text{ K})$ .

**SOLUCIÓN**

$$R(500 \text{ K}) = 3.544'8 \text{ w / m}^2$$

$$R(1000 \text{ K}) / R(500 \text{ K}) = 16$$

- P.29.2. Obtener las dimensiones de la constante de Planck. Comprobar que sus dimensiones son iguales a las del momento cinético.

**SOLUCIÓN**

$$[h] = \left[ \frac{E}{\nu} \right] = \frac{ML^2T^{-2}}{T^{-1}} = ML^2T^{-1}$$

$$[L] = [mvr] = MLT^{-1}L = ML^2T^{-1} = [h]$$

- P.29.3. Demostrar que  $R = \sigma T^4$ . Calcular el valor de  $\sigma$ .

$$\left( \text{Nota: } \int_0^{\infty} \frac{x^3}{e^x - 1} dx = \frac{\pi^4}{15} \right)$$

**SOLUCIÓN**

$$\sigma = 5'67 \cdot 10^{-8} \text{ W / m}^2\text{K}^2$$

- P.29.4. Demostrar, a partir de la ecuación (29.9), la ley de desplazamiento de Wien. Calcular el valor de la constante  $a$ .

**SOLUCIÓN**

$$a = 196 \text{ c s}^{-1} \text{ K}^{-1}$$

- P.29.5. Sabiendo que el máximo de  $R_\nu$ , correspondiente a la luz solar antes de atravesar la atmósfera, se produce para la frecuencia  $\nu_m = 3'6 \cdot 10^{14} \text{ s}^{-1}$ , calcular la temperatura del sol.

**SOLUCIÓN**

$$T = 6122 \text{ K}$$

- P.29.6. Determinar la energía, en eV, de un fotón cuya longitud de onda es  $1000 \text{ \AA}$ .

**SOLUCIÓN**

$$E = 12'4 \text{ eV}$$

- P.29.7. Determinar la longitud de onda de un fotón tal que su energía sea igual a la energía cinética de un electrón que se mueve a una velocidad  $v = 10^6 \text{ m/s}$ .

**SOLUCIÓN**

$$\lambda = 4365 \text{ \AA}$$

# CAPÍTULO 30

## ESTRUCTURA DEL ÁTOMO

### 30.1. El átomo de Bohr

En 1913, el físico danés Niels Bohr propuso una teoría del átomo de hidrógeno que marcó el inicio de una nueva era en la historia de la física. Según esta teoría, el átomo de hidrógeno está constituido por un núcleo de carga  $+e$ , en el cual está concentrada la práctica totalidad de la masa del átomo, y por un electrón de carga  $-e$  y masa despreciable frente a la del núcleo, girando alrededor de éste en una órbita circular de radio  $r$ .

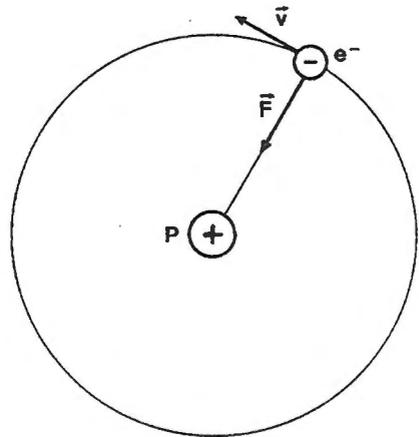


Fig. 30.1

Puesto que las cargas de estas dos partículas son de signo contrario, el núcleo que supondremos fijo, ejerce una fuerza de atracción sobre el electrón

$$\vec{F} = k \frac{ee}{r^2} \vec{u} \quad (30.1)$$

Y, si el electrón describe un movimiento circular uniforme, de radio  $r$  y velocidad  $v$ , se cumple que  $\vec{F} = m\vec{a}_N$ , o bien

$$k \frac{ee}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad (30.2)$$

Como vemos, la expresión (30.2) relaciona el radio de la órbita con la velocidad del electrón.

Ahora bien, en su movimiento alrededor del núcleo, el electrón está sometido a una aceleración (aceleración normal) por lo que, según la teoría clásica del electromagnetismo, debe emitir radiación electromagnética. La emisión de ondas electromagnéticas supone una pérdida de energía del electrón, que de esta forma iría precipitándose sobre el núcleo. Vemos, pues, que el modelo planetario es incompatible con las leyes del electromagnetismo, al ser imposible justificar de esta forma la estabilidad de los átomos.

Para resolver este problema, Bohr aportó una justificación ad hoc, suponiendo que las leyes clásicas del electromagnetismo no son válidas a la escala atómica. En rotunda oposición con las mismas, Bohr formuló los siguientes postulados:

- a) El electrón puede conservar un estado estacionario, sin emitir radiación ni perder energía, cuando describe determinadas órbitas circulares muy definidas.
- b) La transición de un estado estacionario, caracterizado por un nivel de energía  $E_1$ , a otro estado estacionario, de energía  $E_2$  está acompañada por una emisión o absorción de energía en forma de radiación de frecuencia

$$\nu = \frac{|E_2 - E_1|}{h} \quad (30.3)$$

donde  $h$  es la constante de Planck

$$h = 6'62 \cdot 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$$

- c) La fuerza que mantiene ligado el electrón al núcleo es, como muestra la ecuación (30.1), electrostática y por tanto central. Es evidente, según los principios de la mecánica clásica, que el momento cinético del electrón debe ser constante en cada una de las órbitas correspondientes a un estado estacionario.

$$\vec{L}_o = m \vec{r} \times \vec{v} = \text{cte} \quad (30.4)$$

Ahora bien, Bohr postula que  $\bar{L}_0$  no puede tomar cualquier valor, sino determinados valores discretos. Así, en este tercer postulado se define cuales son las órbitas estacionarias a partir de la cuantización del momento cinético: "Los estados estacionarios corresponden a órbitas para las cuales el momento cinético del electrón es un múltiplo entero de  $h / 2\pi$ , es decir,

$$m v r = \frac{nh}{2\pi} \quad (30.5)$$

donde n es un número entero que recibe el nombre de número cuántico principal.

Eliminando v de las ecuaciones (30.2) y (30.5) se obtiene

$$r = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m e^2 k} \quad (30.6)$$

La expresión (30.6) permite calcular los radios de las órbitas estacionarias. Para  $n = 1$  se obtiene la órbita o estado fundamental, cuyo radio es

$$r_1 = 0.529 \cdot 10^{-10} \text{ m} = 0.529 \text{ \AA}$$

Pasemos a calcular las energías asociadas a cada una de las órbitas estacionarias. En cada estado posible, el electrón tiene una energía igual a la suma de las energías cinéticas, T, y potencial, U.

$$E = T + U \quad (30.7)$$

La energía potencial del electrón depende de su posición en el campo electrostático creado por el núcleo, siendo su valor

$$U = -k \frac{e^2}{r} \quad (30.8)$$

La energía cinética puede calcularse, en función del radio, a partir de la expresión (30.2)

$$T = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{k e^2}{2r} \quad (30.9)$$

Por tanto, la energía total del electrón es

$$E = -\frac{ke^2}{2r} \quad (30.10)$$

Introduciendo en (30.10) los diferentes radios posibles, dados por (30.6) se obtienen los niveles de energía que pueden existir en el seno de un átomo de hidrógeno

$$E_n = -\frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{n^2 h^2} \quad (30.11)$$

El signo menos de la ecuación (30.11) aparece como consecuencia de haber tomado como origen de energías potenciales la que correspondería a un electrón infinitamente alejado del núcleo.

Sustituyendo las constantes que aparecen en (30.11) por los valores numéricos

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C} \quad m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg}$$

$$h = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js} \quad k = 9 \cdot 10^9 \text{ Nm}^2 / \text{c}^2$$

Se obtiene que

$$E_n = -\frac{21.76 \cdot 10^{-19}}{n^2} \text{ J}$$

valor que puede ser expresado en eV sin más que dividir por  $1.6 \cdot 10^{-19}$

$$E_n = -\frac{13.6}{n^2} \text{ eV}$$

La figura 30.2, muestra los niveles de energía del átomo de hidrógeno.

Denominaremos **energía de enlace** al valor absoluto de  $E_n$ ,  $|E_n|$ , y representa la energía que hay que suministrar al electrón para que éste se desplace desde la órbita en que se encuentra hasta el infinito.

Para  $n = 1$  se obtiene el mayor valor posible de la energía de enlace. El estado correspondiente es estable y recibe el nombre de **estado fundamental**. Los estados correspondientes a valores de  $n > 1$  se denominan excitados.

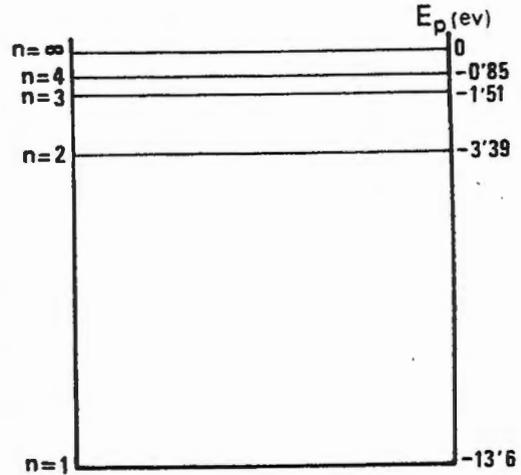


Fig. 30.2

La transición desde el estado fundamental, de energía  $E_1$ , hasta otro estado excitado, con energía  $E_n$  exige el aporte de la energía  $E_n - E_1$ . Supongamos, por ejemplo, que el electrón absorbe una energía de 15 eV (mediante colisión con un electrón libre,

colisión con otros átomos, o incidencia de un fotón, etc.). Puesto que para ionizar el átomo basta con una energía de 13'6 eV, el electrón será arrancado del átomo, conservando una energía de 1'4 eV en forma de energía cinética.

Si la energía aportada es inferior a 13'6 eV, ésta sólo podrá ser absorbida si corresponde a la transición a uno de los estados permitidos. En este caso, el átomo no es ionizado, sino tan sólo excitado, es decir, elevado a un estado de energía superior. Los estados excitados son muy inestables y los electrones tienen una fuerte tendencia a pasar a las órbitas de menor energía, emitiendo energía en forma de (fotón) radiación de frecuencia.

$$\nu = \frac{E_n - E_m}{h} \quad (m < n) \quad (30.12)$$

Y, sustituyendo (30.11) en (30.12) se obtienen frecuencias de la luz emitida por el hidrógeno

$$\nu = \frac{E_m - E_n}{h} = \frac{2\pi^2 k^2 e^4 m}{h^3} \left( \frac{1}{m^2} - \frac{1}{n^2} \right) \quad (30.13)$$

expresión que proporciona valores de frecuencias que coinciden exactamente con los observados experimentalmente en el espectro de emisión del hidrógeno.

Nota complementaria 30.1. Experimento de Franck-Hertz

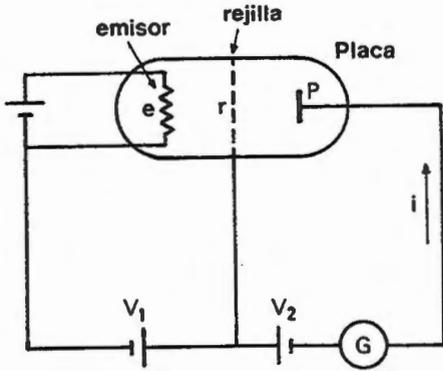


Fig. 30.3

La figura 30.3, muestra un dispositivo para comprobar directamente la existencia de niveles de energía discretos en los átomos. En el interior de una ampolla en la que se ha practicado el vacío, se introduce una muestra de la sustancia a estudiar en forma gaseosa. La ampolla lleva instalada un filamento incandescente (e) que emite electrones, una rejilla (r) conectada a un potencial  $V$ , positivo con respecto al filamento y una placa (p) ligeramente negativa con respecto a la rejilla.

Los electrones emitidos por e son acelerados por el campo existente entre e y r y llegan a la rejilla con una energía cinética  $eV$ . Puesto que el campo decelerador existente entre r y p es muy débil, casi todos los electrones llegan a la placa, dando lugar a una corriente  $i$  que se mide mediante el galvanómetro G.

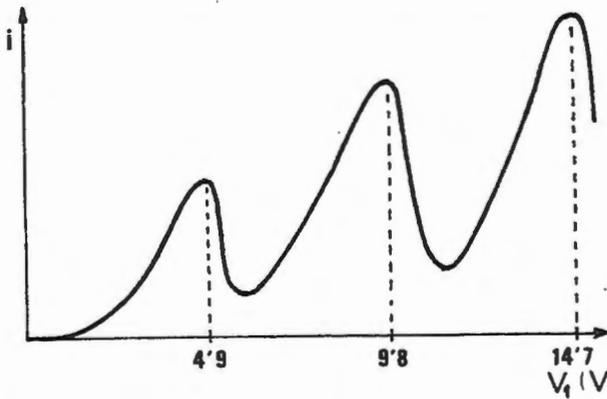


Fig. 30.4

La experiencia de Franck y Herz consiste en medir la corriente de placa,  $i$ , en función del potencial acelerador  $V_1$ . A medida que  $V_1$  crece, la corriente de placa aumenta, ya que los

electrones llegan a la rejilla con una energía cinética creciente.

Ahora bien, cuando  $eV_1$  se aproxima a la diferencia,  $(E_1 - E_2)$  existente entre dos niveles energéticos permitidos de los átomos estudiados, los electrones poseen energía suficiente para producir, mediante colisión con los átomos, la transición del estado  $E_1$  al  $E_2$ . Por tanto, los electrones atravesarán la rejilla con

una energía cinética casi nula y muy pocos llegarán a la placa; la corriente  $i$  desciende rápidamente.

Si  $V$  sigue aumentando, aunque los electrones pierden su energía antes de llegar a la rejilla, todavía se mantiene alguna aceleración y la intensidad  $i$  aumenta. Cuando  $eV_1$  se aproxima a  $2(E_2 - E_1)$  los electrones podrán provocar una transición y llegar a la rejilla con energía  $(E_2 - E_1)$ , excitando otra nueva transición: vuelve a descender  $i$ . Este resultado se repetiría para valores de

$$V_1 = \frac{(E_2 - E_1)}{e} n$$

La figura 2.4, muestra los resultados obtenidos para el caso del mercurio.

### 30.2. Nociones de mecánica ondulatoria

El modelo atómico propuesto por Bohr, y completado por otros investigadores, obtuvo resonantes éxitos en cuanto a la explicación de los espectros de emisión de algunos átomos sencillos (Hidrógeno, Helio). Ahora bien, sus fundamentos teóricos dejan bastante que desear desde el punto de vista lógico, ya que en sus desarrollos se superponen razonamientos propios de las concepciones clásicas con unos postulados que, introducidos de forma arbitraria, son completamente contradictorios con aquellas.

Por otra parte, el descubrimiento de nuevos fenómenos, inexplicables según las teorías clásicas modificadas por los postulados de Bohr, impulsó el desarrollo de una nueva mecánica: la mecánica cuántica u ondulatoria.

Los principios fundamentales de esta nueva doctrina fueron expuestos por Luis de Broglie en 1924 y desarrollados por otros investigadores como Schrödinger, Heisenberg, Pauli y Dirac.

La mecánica cuántica aparece como la teoría adecuada para el estudio de los fenómenos a escala atómica; además, sus resultados son perfectamente compatibles con los predichos por la mecánica clásica para aquellos fenómenos que ocurren a nuestra escala. En este apartado estudiaremos las líneas generales de estas teorías.

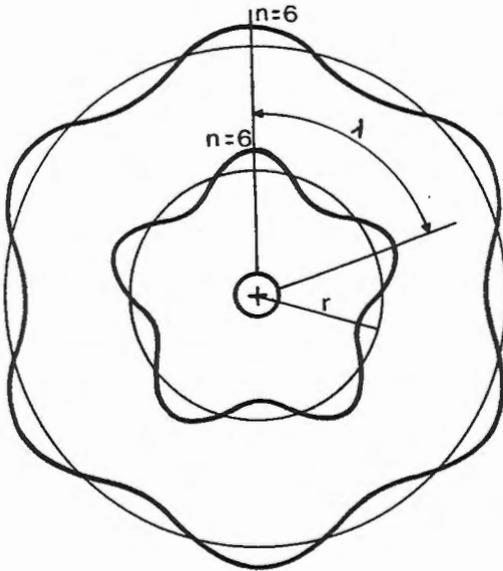
El principio fundamental de la mecánica ondulatoria está basado en la asociación, a cada partícula de masa  $m$  que se mueve con una velocidad  $v$ , de una onda de probabilidad cuyas características y significado discutiremos más adelante.

En efecto, a principios del siglo era un hecho aceptado que la luz posee una doble naturaleza, a la vez ondulatoria (difracción, interferencias) y corpuscular (efecto fotoeléctrico). Así una radiación de frecuencia  $\nu$  estaría compuesta por fotones de energía  $E = h\nu$ . Por otra parte, según la conocida ecuación de Einstein  $E = mc^2$ , se puede asignar una masa a cada fotón, y teniendo en cuenta que  $\lambda\nu = c$ , podemos expresar la longitud de onda del fotón en función de su cantidad de movimiento.

$$E = h\nu = mc^2 = \frac{hc}{\lambda} \tag{30.14}$$

luego

$$\lambda = \frac{h}{mc} = \frac{h}{p} = \lambda \tag{30.15}$$



**Fig. 30.5**

De una forma análoga, se puede extender esta dualidad onda partícula a cualquier partícula material, dotada de una cantidad de movimiento  $p = mv$ , asignándole una onda cuya longitud de onda es

$$\lambda = \frac{h}{p} = \frac{h}{mv} \tag{30.16}$$

ecuación que constituye la relación de Broglie.

El principio de dualidad onda-partícula, aplicado al electrón, permite justificar de una forma lógica el postulado de Bohr relativo a la cuantización del momento cinético del electrón.

En efecto, si suponemos que las órbitas estables son aquellas para las cuales la onda asociada es estacionaria, esto es, si la longitud de la órbita es múltiplo entero de la longitud de onda  $\lambda$ , se obtiene.

$$2\pi r = n\lambda = \frac{nh}{mv} \quad (30.17)$$

ecuación idéntica a la (30.5). La figura 30.5, muestra las ondas estacionarias asociadas a las órbitas estacionarias de Bohr para  $n = 5$  y  $n = 6$ .

Veamos a continuación que la hipótesis ondulatoria entraña una limitación fundamental de la precisión con que se puede conocer la posición y velocidad de una partícula. Para ello, intentemos representar una partícula en movimiento mediante su onda asociada.

Evidentemente, una representación como la indicada en la figura 30.6.a, mediante una onda monocromática de longitud de onda  $\lambda = h/mv$ , es totalmente insuficiente, ya que una onda de este tipo se repite de forma periódica en el espacio y no ofrece ninguna información acerca de la posición de la partícula a la que representa.

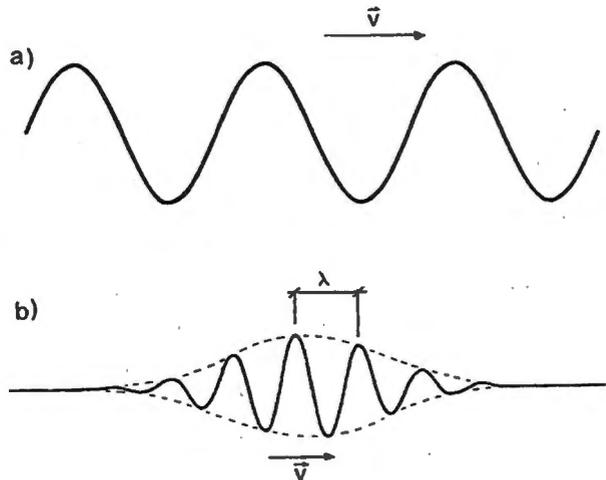


Fig. 30.6

Más razonable parece la representación mostrada en la figura 30.6.b, mediante un tren de ondas localizado en una pequeña región del espacio, que se desplaza con una velocidad de grupo igual a la de la partícula. Ahora bien, un paquete de ondas como éste sólo se puede obtener a partir de la superposición de infinitas ondas sinusoidales con frecuencias  $\nu$  próximas a una frecuencia fundamental  $\nu_0$ . Por ello, no se puede definir de una forma exacta la longitud de onda de este paquete y, según la relación (30.16), tampoco se conocerá su cantidad de movimiento.

En definitiva, la hipótesis ondulatoria implica que no se puede conocer, de forma simultánea, la posición y la cantidad de movimiento de una partícula. Esta limitación queda cuantificada por la relación de incertidumbre de Heisenberg

$$\Delta x \Delta v_x \geq \frac{h}{2\pi m} \quad (30.18)$$

donde

$\Delta x$  = Error cuadrático medio en la posición.

$\Delta v_x$  = Error cuadrático medio en la velocidad.

Vemos, pues, que la mecánica ondulatoria nos obliga a abandonar la idea de las partículas materiales como puntos geométricos que describen trayectorias perfectamente determinadas. En su lugar es preciso introducir una noción estadística que representa la probabilidad de hallar a la partícula en cada punto del espacio.

Con vistas a precisar el significado de esta naturaleza probabilística que afecta al movimiento de las partículas, comentaremos brevemente un fenómeno óptico: la interferencia .

Supongamos un montaje como el de la figura 30.7, donde  $F$  es una fuente puntual de luz monocromática. La luz emitida por  $F$  se propaga hasta una pantalla  $P$  en la que se han practicado sendas ranuras  $A$  y  $B$ , muy estrechas y paralelas. La luz que atraviesa a  $A$  y  $B$  se recibe en la pantalla  $P'$ , apareciendo las conocidas franjas de interferencia.

La explicación de este fenómeno es muy sencilla si se tiene en cuenta la naturaleza ondulatoria de la luz. Así, las ranuras  $A$  y  $B$  se comportan como nuevas fuentes de luz. Las ondas emitidas por  $A$  y  $B$  se encuentran en fase en determinados lugares (línea continua), originando las franjas claras que aparecen en  $P'$ . En otros puntos (rectas a trazos), las ondas emitidas por  $A$  y  $B$  están en oposición de fases, dando lugar a las franjas oscuras. La teoría ondulatoria de la luz permite calcular no sólo la posición de estas franjas de interferencia, sino además la intensidad luminosa en cada punto de  $P'$ , Dicha intensidad resulta ser proporcional al cuadrado de  $\psi$ , amplitud de la onda resultante.

Ahora bien, si tenemos en cuenta la naturaleza corpuscular de la luz, ¿cómo interpretar este fenómeno?. Para ello, supondremos que algunos de los fotones emitidos por la fuente F atraviesan las ranuras A o B y llegan a la pantalla P'. Cada uno de estos fotones puede manifestarse en cualquier punto de P'.

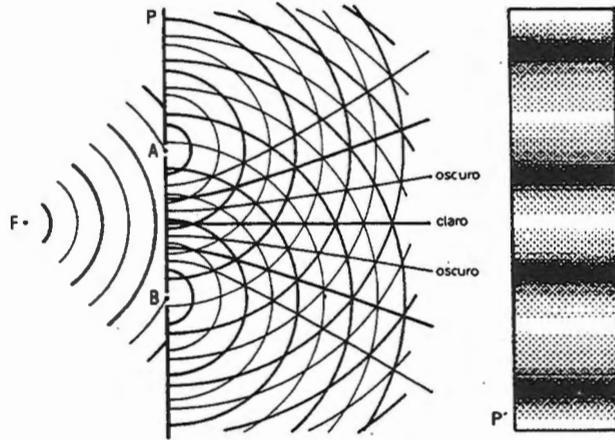


Fig. 30.7

No obstante, la probabilidad de aparición de un fotón no es la misma en todos los puntos de la pantalla: si pudiésemos emitir los fotones uno a uno e ir siguiendo su acumulación sobre la pantalla, obtendríamos una evolución como la que se muestra en la figura 30.8. Hay una fuerte tendencia de los fotones a incidir sobre determinadas zonas y, puesto que la intensidad luminosa es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda luminosa, podemos interpretar el comportamiento de los fotones suponiendo que la probabilidad de que un fotón aparezca en un punto es proporcional al cuadrado de la amplitud de la onda asociada a él.

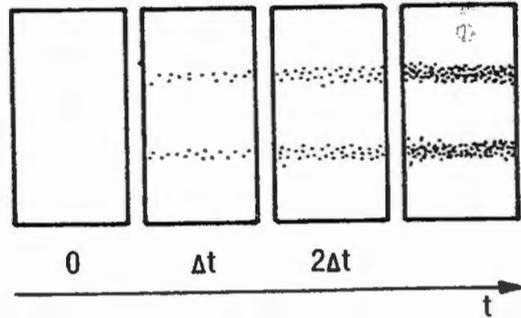


Fig. 30.8

Los fenómenos de interferencia no son exclusivos de las partículas luminosas. Se pueden obtener resultados muy similares repitiendo el experimento con haces de electrones o de protones.

En definitiva, podemos suponer que, para el caso de una partícula material, la onda asociada es de tal naturaleza que el cuadrado de su amplitud es proporcional a la probabilidad de que la partícula se encuentre en el punto  $x, y, z$ , en el instante  $t$ .

Concretamente, si representamos dicha onda mediante la función de onda  $\psi(x, y, z, t)$ , la probabilidad de encontrar a la partícula en un instante  $t$ , en el elemento de volumen  $d\tau$ , que rodea el punto  $x, y, z$ , es

$$dP = |\psi(x, y, z, t)|^2 d\tau \quad (30.19)$$

Los problemas en la mecánica de plantean, pues, en términos de obtener la función de onda asociada a una partícula.

La función de onda de una partícula es la solución de la ecuación de onda correspondiente. Para deducir la forma de esta ecuación de onda, nos remontaremos a la ecuación diferencial definida al estudiar el movimiento ondulatorio, y que para una dimensión es

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} \quad (30.20)$$

donde

$\psi$  = Amplitud de la onda considerada.

$x$  = Distancia en una dirección.

$v$  = Velocidad de propagación de la onda.

$t$  = tiempo.

La amplitud  $\psi$  puede referirse a numerosas magnitudes: elongación de un punto de una cuerda vibrante, campos eléctrico o magnético de una onda electromagnética, presión del aire en una onda sonora, etc. En general,  $\psi$  es una función de  $x$  y de  $t$ ; si la onda es estacionaria,  $\psi$  puede separarse en dos factores

$$\psi(x, t) = \phi(x) T(t) \quad (30.21)$$

donde  $\phi(x)$  es una función que sólo depende de  $x$  (función espacial) y  $T(t)$  es una función que sólo depende de  $t$  (función temporal). Supongamos que  $T(t)$  es una función de tipo senoidal

$$T(t) = \text{sen } \omega t \quad (30.22)$$

expresión que, sustituida en (30.21) y (30.20) da lugar a

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} \text{sen } \omega t = -\left(\frac{\omega^2}{v^2}\right) \varphi \text{sen } \omega t \quad (30.23)$$

y como

$$\omega = \frac{2\pi v}{\lambda}$$

resulta

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \left(\frac{2\pi}{\lambda}\right)^2 \varphi = 0 \quad (30.24)$$

Ahora bien, en el caso de las ondas de De Broglie, se verifica que

$$\lambda = \frac{h}{p}$$

luego

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{4\pi^2 p^2}{h^2} \varphi = 0 \quad (30.25)$$

y, expresando la cantidad de movimiento  $p$ , en función de la energía de la partícula

$$p^2 = 2mT = 2m(E - U) \quad (30.26)$$

resulta

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \varphi = 0 \quad (30.27)$$

que constituye la denominada ecuación de Schrödinger en una dimensión e independiente del tiempo. Esta ecuación sólo se aplica a los estados estacionarios, con energía constante. (Existe otra ecuación de Schrödinger que permite prever la evolución de los sistemas no estacionarios).

Generalizando la (30.27) al caso en que  $\psi$  sea una función de  $x, y, z$  y  $t$ , se obtiene la expresión

$$\Delta \varphi + \frac{8\pi^2 m}{h^2} (E - U) \varphi = 0 \quad (30.28)$$

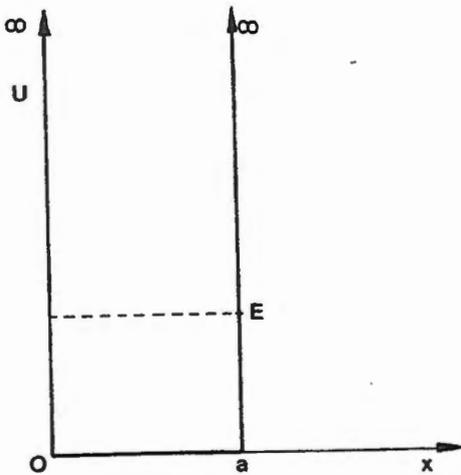


Fig. 30.9

Apliquemos la ecuación de Schrödinger unidimensional a un problema sencillo: el movimiento de una partícula a lo largo del eje OX en la región comprendida entre  $x = 0$  y  $x = a$ . Veremos como aparecen los niveles de energía discretos sin más que resolver la ecuación (30.27).

Un problema de este tipo puede representarse físicamente mediante una distribución de energías potenciales como la que se muestra en la figura 30.9. Para  $x = 0$ , la energía potencial toma un valor infinito.

En el intervalo  $0 < x < a$ ,  $V$  es nula, y en  $x = a$  aparece otro escalón de energía potencial.

Planteemos (30.27) en la región  $0 \leq x \leq a$ , suponiendo una energía total de la partícula  $E$ .

$$\frac{d^2 \varphi}{dx^2} + \frac{8\pi^2 m}{h^2} E \varphi = 0 \quad (30.29)$$

La solución de (30.29) es del tipo

$$\varphi = \varphi_0 \text{ sen } k x \quad (30.30)$$

siendo

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 m}{h^2} E} \quad (30.31)$$

Ahora bien,  $\varphi^2$  es proporcional a la probabilidad de encontrar a la partícula en un punto determinado. Como ésta se encuentra confinada en la región  $0 < x < a$ , se debe verificar que

$$\varphi(x=0) = 0 \quad (30.32)$$

$$\varphi(x=a) = 0 \quad (30.33)$$

con  $\varphi \neq 0$ , ya que la partícula se halla en algún lugar de  $0 < x < a$ .

De (30.33) y (30.30) se deduce que

$$ka = n\pi \quad (n = 1, 2, \dots) \quad (30.34)$$

y teniendo en cuenta el valor de  $k$  dado por (30.31)

$$a \sqrt{\frac{8\pi^2 m E}{h^2}} = n\pi \quad (30.35)$$

y, despejando  $E$

$$E_n = \frac{n^2 h^2}{8ma^2} \quad (30.36)$$

Es decir, para que la ecuación de onda tenga soluciones aceptables, es preciso que la energía de la partícula tome determinados valores discretos, que vienen dados por (30.36). En definitiva, la energía de la partícula confinada en un pozo de potencial infinito está cuantizada.

Nota complementaria 30.2. Penetración en barrera. Efecto túnel

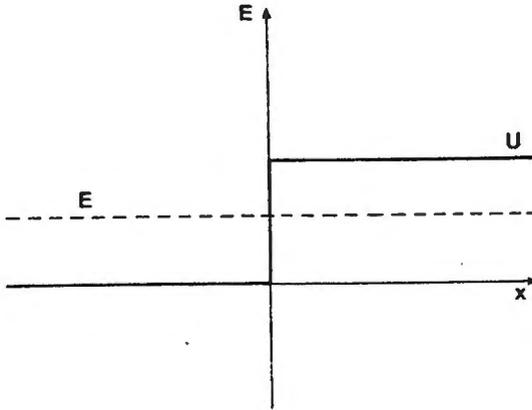


Fig. 30.10

Consideremos una partícula que puede moverse sobre el eje OX en una región del espacio en la que hay un campo como el que se muestra en la figura 30.10.

Para valores de  $x < 0$ , la energía potencial es 0. Para valores de  $x > 0$ , la energía potencial es U. Denominaremos E a la energía total de la partícula, con  $E < U$ .

Según los principios de la mecánica clásica, la partícula podría moverse en la zona negativa del eje OX, con energía cinética  $T = E$ . Ahora bien, al llegar a  $x = 0$ , la partícula debería “rebotar” en el escalón de energía potencial, siendo su paso imposible ya que su ubicación en la parte positiva implicaría valores negativos de T.

Estudiemos este problema a partir de la ecuación de Schrödinger. La ecuación (30.27) toma la siguiente forma en cada una de las dos regiones definidas en la figura 30.10.

$$a) \quad x > 0 \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2} (U - E)\varphi = 0 \quad (30.37)$$

$$b) \quad x < 0 \quad \frac{d^2\varphi}{dx^2} - \frac{8\pi^2m}{h^2} E\varphi = 0 \quad (30.38)$$

La solución de la ecuación (30.37) es de la forma

$$\varphi_1 = A_1 e^{-\alpha x} + B_1 e^{+\alpha x} \quad (30.39)$$

donde  $A_1$  y  $B_1$  son constantes. Ahora bien, el coeficiente  $B_1$  debe ser nulo, ya que la probabilidad de encontrar a la partícula, determinada por  $\varphi_1^2$  no puede aumentar indefinidamente al desplazarnos sobre el eje  $OX$ . Por tanto

$$\varphi_1 = A_1 e^{-\alpha x} \quad (30.40)$$

siendo

$$\alpha = \sqrt{\frac{8\pi^2 m(U - E)}{h^2}} \quad (30.41)$$

La solución de la ecuación (30.38) es de la forma

$$\varphi_2 = A_2 e^{-jkx} + B_2 e^{jkx} \quad (30.42)$$

con

$$k = \sqrt{\frac{8\pi^2 mE}{h^2}} \quad (30.43)$$

solución admisible ya que módulo de  $\varphi_2$  no aumenta indefinidamente cuando  $x$  tiende a  $-\infty$ .

Para relacionar las constantes de integración  $A_1$ ,  $A_2$  y  $B_2$  hay que tener en cuenta que  $\varphi_1$  y  $\varphi_2$  representan a la misma función de onda en dos regiones distintas, y que dicha función debe ser continua y derivable, es decir

$$\varphi_1(x=0) = \varphi_2(x=0) \quad (30.44)$$

$$\left. \frac{d\varphi_1}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\varphi_2}{dx} \right|_{x=0} \quad (30.45)$$

Y, teniendo en cuenta (30.40) y (30.42), resulta

$$A_2 + B_2 = A_1 \quad (30.46)$$

$$jk(B_2 - A_2) = -\alpha A_1$$

Por tanto

$$A_2 = \frac{(1 + j\alpha/k)}{2} A_1 \tag{30.47}$$

$$B_2 = \frac{(1 - j\alpha/k)}{2} A_1$$

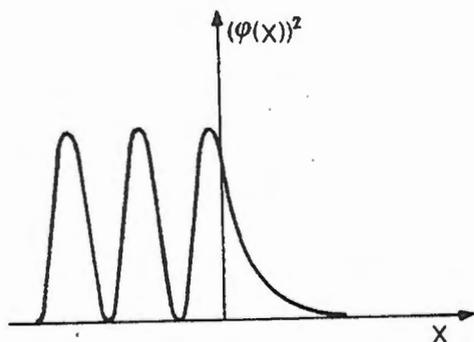


Fig. 30.11

tados que se obtendrían según la mecánica clásica. Naturalmente, la probabilidad decrece a medida que aumenta  $x$ , tal como indica la ecuación (30.40). En la figura

30.11, se muestra como varía  $|\varphi_1(x)|^2$  en función de  $x$ .

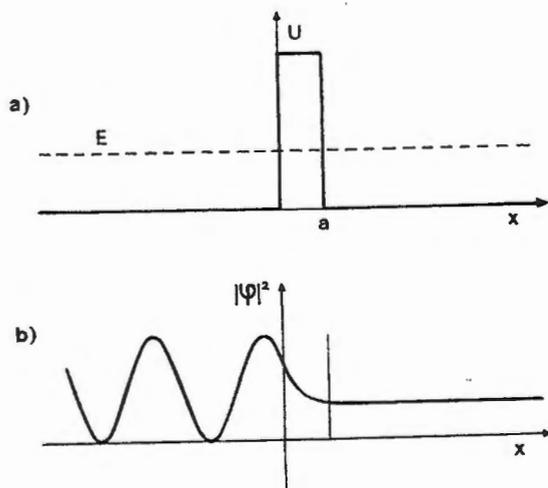


Fig. 30.12

Las ecuaciones (30.47) nos muestran que  $A_1$  no puede ser nula, ya que en este caso también lo serían  $A_2$  y  $B_2$  y la probabilidad de encontrar a la partícula en cualquier punto del espacio sería cero. Pero si  $A_1$  no es nula entonces, para valores de  $x > 0$ , tampoco lo es  $|\varphi_1(x)|^2$ . Es decir, existe una probabilidad no nula de que la partícula atraviese el escalón de potencial  $U$ , en contra de los resultados que se obtendrían según la mecánica clásica.

Los valores de  $x > 0$  para los cuales  $|\varphi_1|^2$  toma valores apreciables son muy pequeños (téngase en cuenta el elevadísimo valor de  $\alpha$  dado por (30.41)).

No obstante, si suponemos que la barrera de potencial no se extiende a lo largo de todo el semieje positivo, sino tan sólo en una estrecha zona, como la que se muestra

en la figura 30.12.a, es de esperar que la partícula pueda atravesar esta estrecha barrera.

En efecto, la figura 30.12.b, muestra que la amplitud de probabilidad de que esto suceda no es nula. Este fenómeno se denomina efecto túnel y es la base de la emisión de electrones de un metal por efecto de campo y del funcionamiento de los diodos túnel.

### 30.3. El átomo de hidrógeno en la mecánica cuántica

En el átomo de hidrógeno, la carga del núcleo es  $+e$  y la del electrón  $-e$ . Si tomamos un sistema de referencia cuyo origen coincide con el núcleo, la energía potencial  $U$  del electrón dependerá de su distancia al origen de coordenadas,  $r$

$$U = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

La ecuación de Schrödinger toma, para este caso, la forma

$$\Delta\phi + \frac{8\pi^2m}{h^2} \left( E + \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} \right) \phi = 0 \quad (30.48)$$

cuya resolución presenta dificultades matemáticas que se escapan de los objetivos de este libro. Nos limitaremos, por tanto a considerar sus resultados.

#### a) Niveles de energía

La solución exacta de la ecuación (30.48) implica la existencia de niveles de energía discretos para el electrón. Estos niveles vienen dados por la ecuación

$$E_n = -\frac{1}{n^2} \frac{me^4}{8\epsilon_0^2 h^2} \quad (30.49)$$

donde  $n = 1, 2, 3, \dots$  es el número cuántico principal.

Como vemos, la expresión (30.49) conduce a los mismos valores de los niveles de energía predichos por la teoría de Bohr, pero mientras en la teoría de Bohr eran postulados, aquí aparecen como consecuencia de la resolución de la ecuación de Schrödinger.

### b) Cuantización del momento cinético

Al resolver la ecuación de Schrödinger se obtiene otro resultado importante: a cada valor de  $n$ , (excepto el 1), es decir a cada estado de energía discreto (excepto el fundamental), le corresponden  $n^2$  soluciones posibles de la función de onda  $\psi$ . Esta diferencia que existe entre los  $n^2$  estados con la misma energía se debe, según la mecánica cuántica, a la cuantización del módulo del momento cinético del electrón y a la de la proyección de éste sobre un eje. Esta cuantización obliga a introducir dos nuevos números cuánticos, el número cuántico azimutal,  $l$ , y el número cuántico magnético  $m_l$ .

Para cada valor de  $n$ ,  $l$  puede tomar los valores enteros  $0, 1, 2, \dots, (n-1)$ . Para cada valor de  $l$ ,  $m_l$  puede tomar los valores  $-l, -(l-1), \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, (l-1), l$ . Por ejemplo para  $n=2$  podemos obtener los siguientes valores de los números cuánticos

$$m=2 \left[ \begin{array}{l} l=0 \left[ m_l=0 \right. \\ \\ l=1 \left[ \begin{array}{l} m_l=-1 \\ m_l=0 \\ m_l=1 \end{array} \right. \end{array} \right.$$

en total cuatro combinaciones.

### c) Spin del electrón

Para definir completamente el estado cuántico de un electrón no basta con fijar valores de los números cuánticos  $n$ ,  $l$  y  $m_l$ . Además, es preciso

añadir un cuarto número cuántico asociado a la cuantización del momento cinético intrínseco que aparece como consecuencia del movimiento del electrón alrededor de su propio centro de masas. Este número recibe el nombre de spin,  $m_s$ , y puede tomar los valores de  $\pm 1/2$ .

En la tabla 30.1. aparece una clasificación de las funciones de onda de un átomo hasta  $n = 3$ . El conjunto de funciones correspondientes a un valor dado de  $n$  constituye lo que se denomina una capa electrónica. Así, para  $n = 1, 2, 3, 4$  se tienen las capas K, L, M y N respectivamente. Del mismo modo, se llaman subcapas al conjunto de funciones que tienen el mismo valor de  $l$  (subcapas s, p, d, f para valores de  $l = 0, 1, 2, 3$ ).

### 30.4. Configuraciones electrónicas

En la sección anterior se han estudiado los posibles estados cuánticos de los electrones en función de los números cuánticos. Ahora, estableceremos la distribución de los electrones de un átomo en las diferentes capas y subcapas alrededor del núcleo.

La repartición de electrones está gobernada por el **principio de exclusión de Pauli**: “En un sistema electrónico cualquiera, no puede haber dos electrones que tengan iguales los cuatro números cuánticos”. Este principio limita el número de electrones correspondiente a cada capa y subcapa. Así, para la capa K

$$n = 1 \quad l = 0 \quad m_l = 0 \quad m_s = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

sólo puede haber 2 electrones.

Para la capa L

$$n = 2 \quad l = 0 \quad m_l = 0 \quad m_s = \begin{bmatrix} +1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$l = 1 \quad m_l = -1 \quad m_s = \begin{bmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{bmatrix}$$

$$m_l = 0 \quad m_s = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

$$m_l = 1 \quad m_s = \begin{bmatrix} 1/2 \\ -1/2 \end{bmatrix}$$

sólo puede haber 8 electrones. En la capa M caben 18 electrones, en la N 32, así sucesivamente.

n	Capa	l	Subcapa	$m_l$	$m_s$	Estado	Nº Electrones	
1	K	0	s	0	$\pm 1/2$	1s	2	2
2	L	0	s	0	$\pm 1/2$	2s	2	8
				1	$\pm 1/2$	2p	6	
		1	$\pm 1/2$					
		-1	$\pm 1/2$					
3	M	0	s	0	$\pm 1/2$	3s	2	18
				1	$\pm 1/2$	3p	6	
		1	$\pm 1/2$					
		-1	$\pm 1/2$					
		2	d	0	$\pm 1/2$	3d	10	
				1	$\pm 1/2$			
				-1	$\pm 1/2$			
				2	$\pm 1/2$			
				-2	$\pm 1/2$			

**TABLA 30.1**

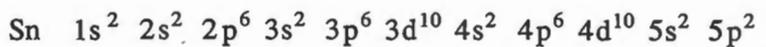
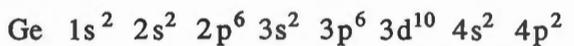
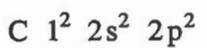
En la tabla 30.1 se resume la distribución de electrones por capas y subcapas para valores de  $n = 1, 2$  y  $3$ .

A modo de ejemplo, estudiemos la configuración electrónica del Silicio, que tiene 14 electrones. Teniendo en cuenta que, en primer lugar se llenan las capas de menor energía (menores valores de  $n$ ), podemos deducir la siguiente estructura electrónica

- 2 Electrones en la capa K, subcapa s
- 2 Electrones en la capa L, subcapa s
- 6 Electrones en la capa L, subcapa p
- 2 Electrones en la capa M, subcapa s
- 2 Electrones en la capa M, subcapa p

o, de forma abreviada  $1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^2$

De forma análoga, podrían determinarse las configuraciones electrónicas del C, Ge y Sn.



Finalmente hay que señalar la extraordinaria importancia que tiene la última capa de un átomo, también denominada capa de valencia. Esta es la responsable de muchas de las propiedades químicas de los elementos.

Así, en el caso de los cuatro elementos antes citados C, Si, Ge y Sn, que ocupan el grupo 4A de la tabla periódica, la última capa tiene 4 electrones (dos en la subcapa s y dos en la subcapa p). Por ello se dice que son tetravalentes.

No obstante, sus propiedades físicas son notablemente distintas. Así, el C es un aislante, el Ge y Si son semiconductores y el Sn es un conductor. En las próximas lecciones explicaremos el por qué de estas diferencias.



**PROBLEMAS**

- P.30.1. Determinar la velocidad angular de un electrón situado en la órbita  $n$ -ésima de un ion hidrogenoide. Calcular esta cantidad para un ion  $\text{He}^+$  con  $n = 2$ . ( $m_{\text{He}} = 2m_{\text{H}}$ ).

**SOLUCIÓN**

$$\omega = 2'07 \cdot 10^{16} \text{ rad / S}$$

- P.30.2. Suponiendo que el movimiento del electrón alrededor del núcleo de hidrógeno puede asociarse a una corriente eléctrica continua, calcular el campo magnético en el centro de la órbita  $n = 1$ .

**SOLUCIÓN**

$$B = 12'5 \text{ T} = 125 \text{ KG}$$

- P.30.3. Determinar el número cuántico principal,  $n$ , correspondiente a un estado excitado del átomo de hidrógeno si, al pasar al fundamental, se emiten dos fotones consecutivos de longitudes de onda  $4887 \text{ \AA}$  y  $1216 \text{ \AA}$ .

**SOLUCIÓN**

$$n = 4$$

P.30.4. Calcular las longitudes de onda de De Broglie para:

- a) Un electrón.
- b) Un protón
- c) Un átomo de calcio.

Todas las partículas tienen una energía cinética de 100 eV.

### SOLUCIÓN

- a)  $\lambda_e = 1'23 \text{ \AA}$
- b)  $\lambda_p = 0'029 \text{ \AA}$
- c)  $\lambda_{ca} = 4'5 \cdot 10^{-3} \text{ \AA}$

P.30.5. Calcular la energía que hay que comunicar a un electrón en movimiento para que la longitud de su onda asociada pase de  $\lambda_1 = 2 \text{ \AA}$  a  $\lambda_2 = 1 \text{ \AA}$ .

### SOLUCIÓN

$$\Delta T = 113 \text{ eV}$$

P.30.6. Calcular las incertidumbres mínimas en la velocidad de:

- a) Un electrón.
- b) Un protón.
- c) Un punto material de masa 1g.

Las coordenadas de dichas partículas se conocen con una incertidumbre de  $10^{-6} \text{ m}$ .

**SOLUCIÓN**

- a)  $\Delta v = 116 \text{ m/s} \approx 120 \text{ m/s}$
- b)  $\Delta v = 0'063 \approx 0'06 \text{ m/s}$
- c)  $\Delta v = 1 \cdot 10^{-25} \text{ m/s}$

P.30.7. Un electrón se encuentra en un pozo de potencial unidimensional rectangular, de paredes infinitamente altas, y anchura  $a$ . Calcular la separación entre los dos primeros niveles de energía

- a) Si  $a = 5 \text{ \AA}$
- b) Si  $a = 1 \text{ cm}$

**SOLUCIÓN**

- a)  $\Delta E = 4'5 \text{ eV}$
- b)  $\Delta E = 1'1 \cdot 10^{-14} \text{ eV}$

P.30.8. Un electrón se encuentra en un pozo de potencial unidimensional, de paredes infinitamente altas, y anchura  $a = 10 \text{ cm}$ . Determinar la densidad de niveles de energía  $dN/dE$  para  $E = 5 \text{ eV}$ . (Admitir que los niveles de energía están dispuestos de manera muy densa).

**SOLUCIÓN**

$$\frac{dN}{dE} = 3'6 \cdot 10^7 \text{ niveles / eV}$$



# CAPÍTULO 31

## ESTRUCTURA DEL ESTADO SÓLIDO

### *31.1. Estructura del estado sólido. Cristales*

En algunos sólidos (vidrio, caucho) los átomos o moléculas que los constituyen están dispuestos de manera irregular, aleatoria, de forma similar a las moléculas de un líquido. Tales sólidos se denominan **amorfo**s o **no cristalinos**.

Por el contrario, en la mayoría de sólidos los átomos o grupos de átomos están dispuestos en un orden regular. En este caso se denominan sólidos **cristalinos**. Si el orden regular se extiende sobre una porción completa de material, ésta se denomina monocristal. También puede extenderse a partes pequeñas, de forma que el material es una aglomeración de microcristales, llamándose entonces policristalino.

Una de las características comunes a cualquier medio cristalino es su anisotropía. Es decir, en general, un cristal presenta propiedades distintas según la dirección en que se midan. Así, el comportamiento óptico, térmico, eléctrico o elástico de un cristal es distinto y depende de la orientación considerada.

Muchas de las propiedades de los sólidos sólo pueden ser explicadas a partir de un estudio de su estructura, es decir, de la forma en que se distribuyen los átomos en el cristal y de los tipos de enlace interatómicos. En esta lección estudiaremos los diferentes tipos de cristales y explicaremos algunas de las diferencias observadas en las propiedades eléctricas de los sólidos.

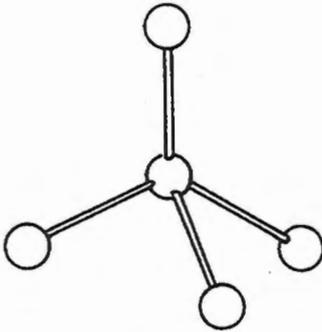
### *31.2. Tipos de cristales*

Atendiendo al tipo de fuerzas de enlace entre los átomos o iones que constituyen los cristales, éstos pueden ser de cuatro tipos: moleculares, covalentes, iónicos y metálicos. Estudiemos cada tipo de cristal por separado.

### 31.2.1. Cristales moleculares

Los cristales moleculares están formados por moléculas que se mantienen unidas por las denominadas fuerzas de Van Der Waals. Dichas fuerzas aparecen como consecuencia de las atracciones entre los dipolos eléctricos que constituyen las moléculas. Puesto que estas fuerzas son bastante débiles, los cristales moleculares presentan una cohesión muy pequeña así como un bajo punto de fusión. Como ejemplos de cristales moleculares podemos señalar a los gases nobles (neón, argón) solidificados,  $\text{CO}_2$ ,  $\text{N}_2$ , etc.

### 31.2.2. Cristales covalentes



*Fig. 31.1*

En este tipo de cristales los átomos están unidos por enlaces covalentes. Los átomos adyacentes comparten sus electrones de valencia de forma que alrededor de cada átomo se crea una configuración electrónica estable similar a la de los gases nobles (8 electrones en la última capa).

La fuerza de ligazón en los enlaces covalentes es mucho mayor que las fuerzas de Van der Waals. De ahí que los cristales covalentes sean duros y rígidos. Su punto de fusión es muy elevado.

Un ejemplo típico de estructura covalente es la red del diamante. En ella, cada átomo de carbono está rodeado por otros cuatro, situados en los vértices de un tetraedro regular (Fig. 31.1). A diferencia de lo que sucede en un cristal molecular, en el covalente no es posible distinguir una molécula. Es preciso considerar a todo el cristal como una molécula gigante.

Otros cristales que presentan estructura covalente son el  $\text{SiO}_2$ ,  $\text{SiC}$ ,  $\text{Ge}$  y  $\text{Si}$ , estos dos últimos de gran importancia por su naturaleza semiconductor que comentaremos más adelante.

### 31.2.3. Cristales iónicos

En este caso, el cristal está formado por iones positivos y negativos unidos entre sí mediante fuerzas de naturaleza electrostática.

Este tipo de enlace es relativamente fuerte, por lo que los cristales iónicos son resistentes y su punto de fusión elevado.

Un ejemplo de cristal iónico es el de cloruro sódico (Fig. 31.2). En él, los átomos de Na pierden un electrón de su capa exterior, dando lugar a iones  $\text{Na}^+$ . Los electrones liberados

se fijan sobre los átomos de Cl, que se convierten en iones  $\text{Cl}^-$ . La fuerza de Coulomb existente entre los iones positivos y negativos es la responsable de la ligazón del cristal.

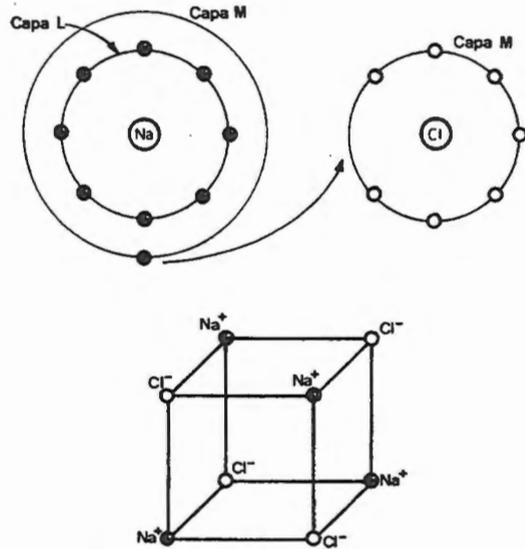


Fig. 31.2

### 31.2.4. Cristales metálicos

En este tipo de cristal aparece una estructura formada por iones metálicos, cargados positivamente, e inmersos en un "gas" de electrones libres móviles. Las cargas negativas no se encuentran ligadas a los átomos fijos, como sucede en un enlace iónico, sino que corresponden a los electrones libres, que se distribuyen casi uniformemente por todo el cristal. La existencia de este gas electrónico explica satisfactoriamente la buena conductividad térmica y eléctrica de los metales.

La fuerza de enlace es de tipo electrostático, siendo el gas electrónico el "cemento" que mantiene a los iones positivos en posiciones fijas. El enlace metálico es algo más débil que los anteriores (covalente o iónico), teniendo los iones positivos una cierta libertad. De ahí que los metales sean maleables.

### 31.3. Bandas de energía en sólidos

En el tema anterior se estudiaron las configuraciones electrónicas de los átomos. Una de las conclusiones a las que allí se llegó es que los electrones de un átomo sólo pueden ocupar niveles de energía discretos, muy definidos, tal como demuestran los espectros de emisión atómicos o la experiencia de Franck-Hertz.

Esta conclusión resulta válida únicamente en el caso de átomos aislados. En un cristal, por el contrario, hay numerosos átomos próximos y los niveles de energía de los electrones se ven modificados debido a la influencia que los átomos que lo constituyen ejercen entre sí. El resultado de esta interacción es un desdoblamiento de los niveles discretos en un conjunto de bandas formadas por una sucesión casi continua de niveles de energía permitidos. Entre las bandas permitidas aparecen otras que corresponden a energías no posibles y que se denominan bandas prohibidas.

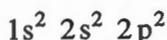
El desdoblamiento de los niveles de energía en bandas es especialmente patente en el caso de los niveles correspondientes a los electrones de la última capa (electrones de valencia) que, en definitiva, son los responsables del enlace entre átomos para formar el cristal. Los niveles de las capas interiores, al estar asociados a electrones muy ligados a los núcleos, no son apenas modificados.

La existencia de bandas de energía permitidas y bandas de energía prohibidas es de capital importancia en el estudio de las propiedades eléctricas de los sólidos. El modelo de bandas nos permitirá explicar las enormes diferencias que aparecen en la resistividad de los sólidos así como su variación en función de la temperatura.

Una justificación cuantitativa de la existencia de bandas puede obtenerse a partir de las funciones de onda asociadas a los electrones de los átomos que constituyen el cristal. Ahora bien, en un cristal, la energía potencial  $U$  que aparece en la ecuación de Schrödinger no se debe únicamente al campo producido por el núcleo de un sólo átomo, sino que es el resultado de la superposición de los campos producidos por todos los iones del cristal. Puesto que éstos se encuentran ordenados en todo el espacio del mismo, la energía potencial  $U$  será una función periódica en las tres direcciones. Resolviendo la ecuación de Schrödinger para electrones en un campo de potencial periódico, aparece como consecuencia la distribución de los electrones de valencia en una serie casi continua de niveles de energía (bandas permitidas) separadas por regiones para las que no existen soluciones ondulatorias (bandas prohibidas).

La solución del problema así planteado se sale de los objetivos de este texto, por lo que nos limitaremos a comentar los resultados.

Consideremos un cristal de diamante formado por  $N$  átomos de C. La configuración electrónica de un átomo de carbono es



Es decir, en la capa de valencia hay 8 estados posibles (2 estados s y 6 estados p) de los cuales sólo están ocupados cuatro (el carbono es tetravalente).

Para un conjunto con  $N$  átomos muy separados entre sí, nos encontraríamos con  $2N$  estados s ocupados y con  $6N$  estados p, de los cuales  $4N$  estarían vacíos. En definitiva se repite  $N$  veces la configuración de un átomo aislado. Ahora bien, a las distancias interatómicas reales que se presentan en un cristal la situación cambia radicalmente. Los átomos se encuentran lo suficientemente próximos para que los orbitales 2s y 2p correspondientes a los átomos vecinos se solapen y, por lo tanto, sean modificados (los orbitales de la capa interior no se modifican apenas, ya que la distancia entre átomos necesaria para ello es muy inferior a la real). El resultado es que los  $8N$  estados existentes se agrupan en dos bandas, con  $4N$  estados cada una, separadas por una banda de estados no permitidos o banda prohibida (Fig. 31.3).

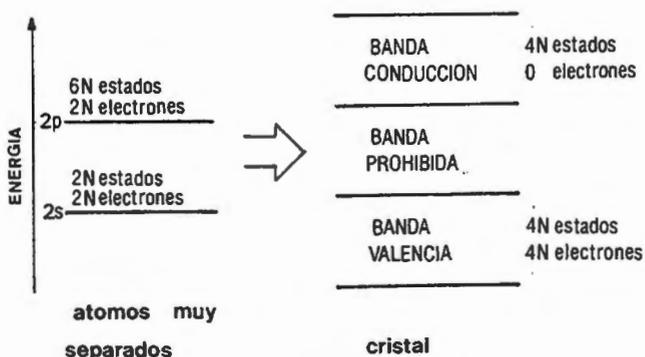


Fig. 31.3

La banda permitida inferior se encuentra completamente llena y se denomina **banda de valencia**. La banda superior no contiene ningún electrón y se denomina **banda de conducción**.

Un esquema similar se obtendría en un cristal de sodio. Ahora bien, en el caso de los cristales metálicos aparece una importante diferencia con respecto a los cristales covalentes. Las bandas de energía procedentes de los niveles discretos de

las capas periféricas están superpuestas. Como se ve en la figura 31.4, los  $2N$  estados correspondientes a los orbitales  $3s$  y los  $6N$  estados correspondientes a los orbitales  $3p$  dan lugar a una única banda con  $8N$  estados. Puesto que cada átomo de sodio posee un sólo electrón en la capa  $M$ , dicha banda estará prácticamente vacía.

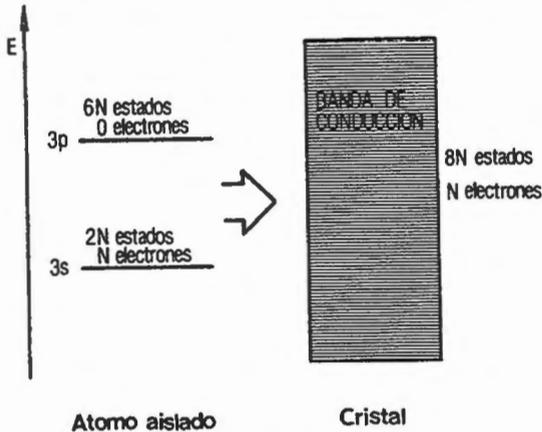


Fig. 31.4

En general se denomina banda de valencia a la última banda completamente llena y banda de conducción a una total o parcialmente vacía.

Hay que señalar que las funciones de onda asociadas a los niveles que forman parte de una banda no están localizados alrededor de átomos particulares, sino que se extienden por todo el cristal. Así, los electrones de las bandas de conducción y de valencia no pueden ubicarse en un átomo concreto, sino que su localización está repartida por todo el cristal, de forma que éste se comporta como una macromolécula.

### 31.4. Aislantes, semiconductores y metales

La estructura de bandas energéticas de los electrones de un cristal, permite explicar las diferencias entre las conductividades eléctricas de los metales, semiconductores y aislantes.

Para establecer una corriente eléctrica en el interior de un cristal es preciso aplicarle un campo eléctrico exterior. En ausencia de campo, no hay ningún movimiento neto de cargas.

Ahora bien, al aplicar un campo eléctrico a un cristal con bandas completamente llenas, los electrones no pueden modificar su estado de movimiento para crear una corriente, ya que todos los estados posibles están ocupados. En efecto, el campo eléctrico comunica a cada electrón una aceleración que se traduce en un aumento de energía; pero, al estar todos los estados posibles ocupados, ningún

electrón puede saltar a un nivel de energía superior. Dos electrones pueden permutarse, intercambiando sus estados, pero, siendo los electrones partículas indiscernibles según la mecánica cuántica, esta permutación no produce ningún efecto y no se crea corriente eléctrica.

Las bandas completamente vacías tampoco contribuyen a la creación de corriente, ya que no contienen electrones que puedan ser acelerados.

Por tanto, únicamente las bandas de energía parcialmente llenas pueden dar lugar a una corriente eléctrica bajo la acción de un campo exterior.

En el caso de un cristal metálico, la estructura de bandas es como la mostrada en la figura 31.5, con una banda de conducción parcialmente llena, por lo que la conducción es posible.

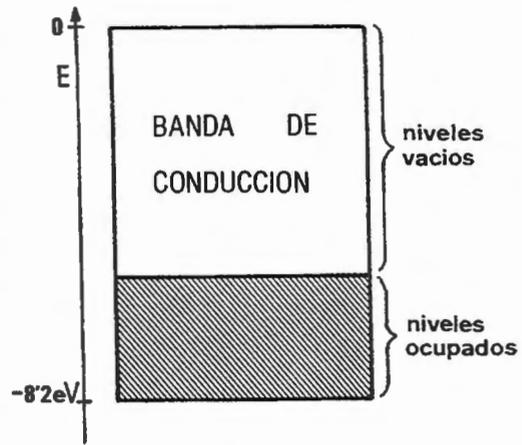


Fig. 31.5

En un cristal covalente como el diamante, la estructura de bandas es la correspondiente a la figura 31.6, con una banda de conducción completamente vacía y una de valencia completamente llena. Entre dichas bandas hay una prohibida con una anchura  $E_G$  del orden de varios eV. No hay conducción.

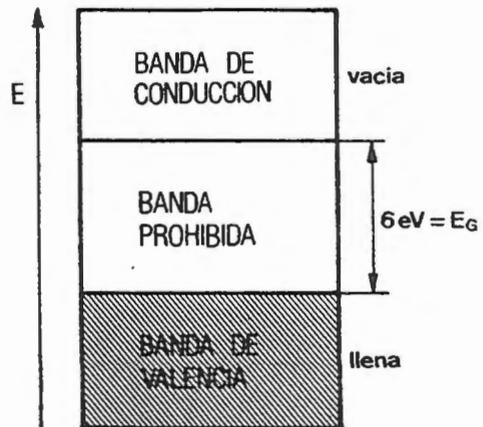


Fig. 31.6

En un semiconductor, con el Ge o el Si, la estructura cristalina es muy similar a la del diamante, por lo que podemos esperar un diagrama de bandas de energía muy similar (Fig. 31.7).

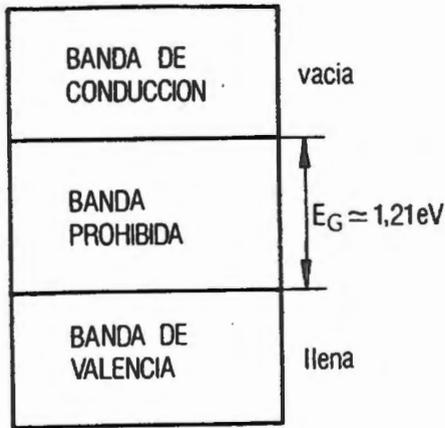


Fig. 31.7

definitiva, aparecen algunos niveles ocupados en la banda de conducción, quedando vacíos los niveles superiores de la banda de valencia (Fig. 31.8).

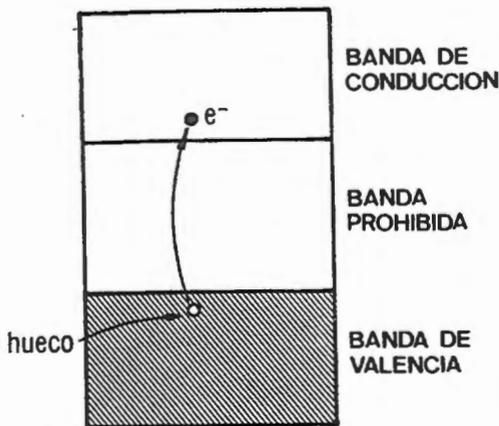


Fig. 31.8

tiva, de masa similar a la de un electrón y carga  $+e$ , que se denomina **hueco**.

A la temperatura de cero absoluto, los electrones ocuparán los niveles energéticos inferiores, por lo que la banda de valencia estará llena y la de conducción vacía. Por tanto, a bajas temperaturas los semiconductores son aislantes.

Ahora bien, en el Ge o el Si, la anchura de la banda prohibida es mucho más pequeña que en el diamante, de forma que si se aumenta la temperatura, algunos de los electrones de la banda de valencia adquieren suficiente energía para saltar a la banda de conducción. En

Es evidente que la existencia de niveles ocupados en la banda de conducción permite establecer una corriente eléctrica al aplicar un campo eléctrico, de forma similar a lo que sucede en un metal.

Además, los niveles vacíos de la parte superior de la banda de valencia también juegan un importante papel en la conducción de los semiconductores. En efecto, según puede demostrarse por razonamientos cuánticos, un nivel energético vacío en la banda de valencia se comporta como una partícula posi-

Si se aplica un campo eléctrico  $\vec{E}$ , los electrones de la banda de valencia, de carga negativa, se desplazarán en sentido opuesto al mismo, dando lugar a una corriente con el mismo sentido del campo. Los huecos, de carga positiva, se

desplazan en el mismo sentido que el campo, por lo que su corriente se suma con la de los electrones.

Por tanto, en un semiconductor existen dos tipos de portadores de corriente, los electrones y los huecos, siendo la corriente total la suma de las debidas a cada tipo de portador. Hay que señalar que en un semiconductor puro el número de electrones de conducción y de huecos es idéntico, ya que éstos aparecen como consecuencia del salto de electrones a la banda de conducción. También resulta claro que dicho número aumenta con la temperatura, de ahí que la resistividad de un semiconductor disminuya al aumentar la temperatura, comportamiento completamente opuesto al de los metales, en los que la resistividad aumenta con la temperatura.



# CAPÍTULO 32

## METALES

### *32.1. Introducción*

Antes de entrar en el estudio de los sólidos no metálicos, es conveniente analizar algunas propiedades de los metales que nos permitirán obtener resultados de gran utilidad para comprender el funcionamiento de los semiconductores.

En este capítulo se introducen algunos conceptos importantes, como es el nivel de Fermi y la distribución de las energías de los electrones en un metal. A través de los mismos, es posible analizar los fenómenos de emisión electrónica por efecto del calor, luz o campos aplicados, y se inicia el estudio de problemas de contacto entre sólidos, de tan interesantes aplicaciones en el campo de los elementos semiconductores.

### *32.2. Distribución de la energía de los electrones en un metal*

Tal como se vió en el capítulo anterior, un cristal metálico está constituido por una red de iones metálicos positivos que ocupan posiciones fijas en el espacio. Entre dichos iones existe un gas de electrones libres que puede moverse a través de la red.

El comportamiento de este “gas electrónico” difiere notablemente del correspondiente a un gas real, ya que es preciso tener en consideración dos factores fundamentales:

- a) El carácter ondulatorio de los electrones, que hace que las energías permitidas sean cuantizadas.
- b) El principio de exclusión de Pauli, que limita el número de electrones que puede ocupar un determinado nivel de energía.

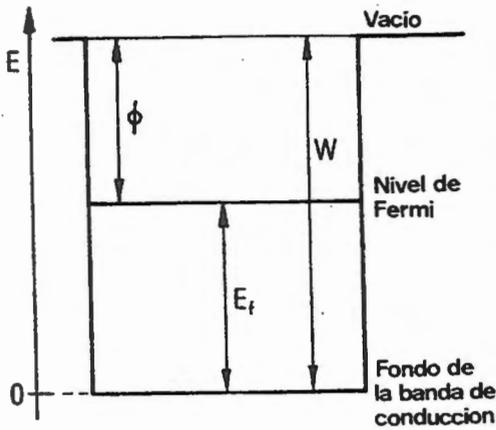


Fig. 32.1

Consideremos el diagrama de bandas de energía de un metal. En la figura 32.1 se ha representado únicamente la banda de conducción. La parte superior de la misma, denominada **nivel de vacío**, corresponde a la energía de un electrón situado fuera del metal, y la parte inferior, o **fondo de la banda**, corresponde a la mínima energía de un electrón en dicha banda. Es decir, el fondo de la banda representa la energía de un electrón en reposo dentro del metal, y el nivel de vacío representa la energía de un electrón en reposo fuera del metal.

Como vemos, aparece una barrera de energía de forma que, para que un electrón que se encuentra en el fondo de la banda escape fuera del metal, es preciso aportarle la diferencia de energías  $W$ . La existencia de esta barrera de energía justifica el hecho de que los electrones estén confinados a moverse dentro del metal.

A temperaturas muy bajas, los niveles de energía estarán ocupados desde el fondo de la banda (energía cinética nula) hasta algún valor  $E_f$ , característico de cada metal que se denomina **nivel de Fermi**.

La existencia del nivel de **Fermi** aparece como consecuencia del principio de exclusión de Pauli. En efecto, incluso en el cero de temperatura absoluta, dos electrones no podrán tener el mismo estado cuántico, por lo cual irán llenando los distintos niveles de energía a partir del fondo de la banda de conducción hasta un nivel dado. El nivel de Fermi,  $E_f$  representa, pues, la máxima energía de un electrón a la temperatura del cero absoluto.

La diferencia entre el nivel de vacío y el de Fermi se denomina **función de trabajo**,  $\phi$  y representa la mínima energía necesaria para extraer, a la temperatura de cero absoluto, un electrón del metal.

Como consecuencia de todo lo expuesto hasta ahora, se deduce que para  $T=0\text{K}$ , todos los niveles por debajo del nivel de Fermi estarán ocupados y todos

los niveles superiores vacíos. Ahora bien, a medida que se aumenta la temperatura, la ocupación de niveles se modifica, ya que los electrones ganarán energía suficiente para ocupar niveles superiores. Estudiemos cual es la distribución de las energías de los electrones a una temperatura cualquiera .

Sea  $dn_E$  el número de electrones libres, por metro cúbico, cuya energía está comprendida en el intervalo de energías  $[E, E + dE]$ .  $dn_E$  puede expresarse como

$$dn_E = D(E) dE \quad (32.1)$$

donde  $D(E)$  es la densidad de electrones en ese intervalo de energías y representa el número de estados energéticos ocupados, por unidad de volumen y energía . Hay que señalar que la densidad volumétrica de electrones es constante en todo el metal. Es decir, en cada unidad de volumen existe el mismo número de electrones libres. Ahora bien, estos electrones pueden poseer distintas energías, según ocupen o no determinados niveles. Esta distribución de energías de los electrones es lo que representa  $D(E)$  .

Evidentemente,  $D(E)$  debe depender de dos factores: número de estados energéticos disponibles en el intervalo  $[E, E + dE]$  y probabilidad de que esos estados estén ocupados.

Por tanto la función de  $D(E)$  puede expresarse como

$$D(E) = f(E) N(E) \quad (32.2)$$

donde

$N(E)$  = Densidad de estados, o número de estados de energía disponibles, por unidad de volumen y de energía, en el intervalo  $[E, E + dE]$ .

$f(E)$  = Probabilidad de que un estado con energía  $E$  esté ocupado por un electrón.

Mediante razonamiento cuánticos puede deducirse que  $N(E)$  toma la forma

$$N(E) = \gamma E^{1/2} \quad (32.3)$$

donde

$$\gamma = \frac{4\pi(2m)^{3/2}}{h^3} = 6'82 \cdot 10^{21} \text{ m}^{-3} (\text{eV})^{-3/2} \quad (32.4)$$

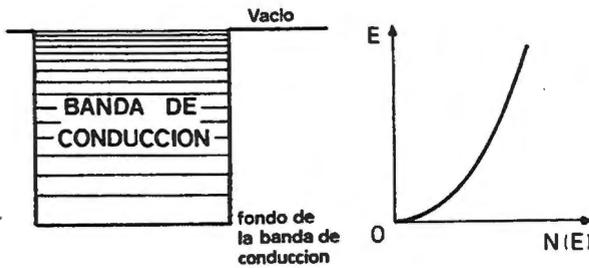


Fig. 32.2

La expresión (32.3) indica que los niveles de energía que constituyen la banda de conducción no están distribuidos de manera uniforme. Es decir, hay más estados disponibles en la parte superior de la banda que en su fondo. La figura 32.2, muestra dicha distribución de niveles.

La función  $f(E)$  se denomina función de probabilidad de Fermi-Dirac y representa la probabilidad de que un estado con energía  $E$  esté ocupado en un gas electrónico en el equilibrio térmico. Su expresión es

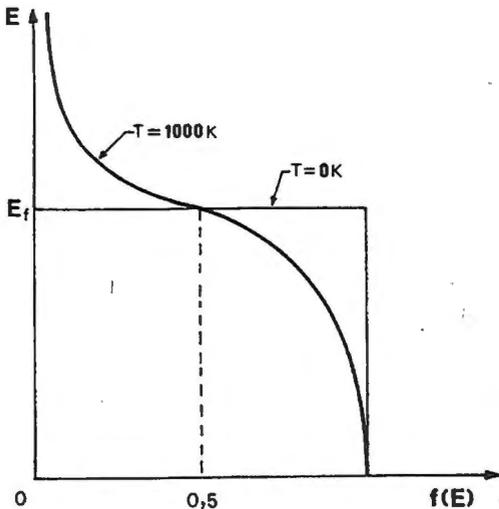


Fig. 32.3

$$f(E) = \frac{1}{1 + e^{E-E_f/KT}} \quad (32.5)$$

donde

$K$  = Constante de Boltzmann =  $8'620 \cdot 10^{-5} \text{ eV / K}$

$E_f$  = Energía característica del metal, que como veremos inmediatamente puede ser identificada con la energía  $E_f$  de la figura 32.1.

$T$  = Temperatura absoluta en Kelvin.

En la figura 32.3 se representa la función de Fermi-Dirac en el cero absoluto y para una temperatura de 1000 K.

Para  $T=0\text{K}$ ,  $f(E)$  es nula para valores superiores a  $E_f$  y toma el valor 1 para energías inferiores a  $E_f$ . Este resultado concuerda con lo explicado anteriormente. En efecto, en el cero absoluto, los electrones ocupan todos los niveles inferiores al de Fermi, mientras que los niveles superiores están vacíos (probabilidad de ocupación nula). La constante  $E_f$  que aparece en (32.5) tiene el mismo significado que la señalada en la figura 32.1: representa el nivel de energía más alto ocupado a 0K.

A temperaturas superiores, la forma de la función cambia. La probabilidad de ocupación de los niveles de energía inferiores al de Fermi ya no es 1, mientras que la probabilidad de ocupación de los niveles superiores toma valores no nulos. En definitiva, al aumentar la temperatura, algunos de los electrones que ocupaban niveles próximos al de Fermi pueden saltar a los niveles superiores. Obsérvese que, para cualquier temperatura,  $f(E_f)=0.5$ , es decir  $E_f$  representa el estado de energía que tiene una probabilidad del 50% de ser ocupado.

Teniendo en cuenta las expresiones (32.2), (32.3) y (32.5), la densidad de electrones en el intervalo  $[E, E + dE]$  es

$$D(E) = \frac{\gamma E^{1/2}}{1 + e^{E-E_f/KT}} \quad (32.6)$$

En la figura 32.5, se muestra la curva  $D(E)$ , para una temperatura del cero absoluto y para una temperatura muy alta.

Evidentemente, el área comprendida entre la curva  $D(E)$  y el eje de las energías es igual a la densidad volumétrica de electrones libres del metal,  $n$ , y vale lo mismo a cualquier temperatura:

$$n = \int_0^{\infty} D(E) dE = \int_0^{\infty} \frac{\gamma E^{1/2}}{1 + e^{E-E_f/KT}} dE \quad (32.7)$$

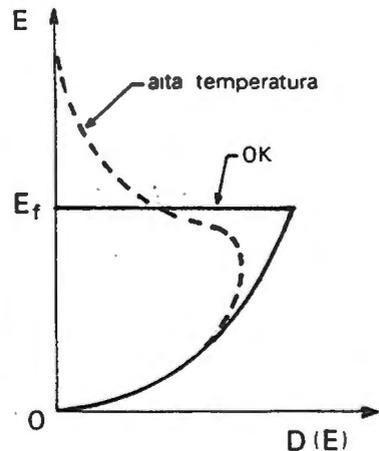


Fig.32.5

**Nota complementaria 32.1. Cálculo del nivel de Fermi en un metal.**

La expresión (32.7) permite determinar el nivel de Fermi de un metal. En efecto, si se conoce la densidad de electrones libres en el metal,  $n$ , para una temperatura de 0K se verificará que

$$n = \int_0^{E_f} D(E) dE$$

ya que a  $T = 0K$  todos los electrones se encuentran por debajo del nivel de Fermi. Ahora bien, la función  $D(E)$  coincide con  $N(E)$  a esa temperatura, ya que  $f(E) = 1$ .

Por tanto

$$n = \int_0^{E_f} \gamma E^{1/2} dE = \gamma \frac{2}{3} E_f^{3/2}$$

y, despejando  $E_f$ , resulta

$$E_f = \left( \frac{3n}{2\gamma} \right)^{2/3}$$

o bien, teniendo en cuenta el valor de la constante  $\gamma$ , dado por (32.4)

$$E_f = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3}$$

Aplicación numérica: Calcular el nivel de Fermi en el sodio, sabiendo que su densidad es  $1'013 \cdot 10^3 \text{ Kg m}^{-3}$ , (calculada a 7 K) y que su peso atómico es 23 gr/mol.

En primer lugar, había que determinar la concentración de electrones libres en el sodio.

El número de átomos por unidad de volumen en un cristal de sodio es

$$n_A = N_A \frac{1}{P_{Na}} \rho$$

donde

$$n_A = \text{Concentración de átomos, en átomos / m}^3$$

$$N_A = \text{Número de Avogrado} = 6'02 \cdot 10^{23} \text{ átomos / mol}$$

$$P_{Na} = \text{Peso atómico del Na, en Kg / mol}$$

$$\rho = \text{Densidad de Na en Kg / m}^3$$

sustituyendo valores, resulta

$$n_A = 6'02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{0'023} \cdot 1'013 \cdot 10^3 = 2'65 \cdot 10^{28} / \text{m}^3$$

Puesto que el sodio es un metal monovalente, cada átomo aporta un electrón libre. La concentración de electrones libres es pues

$$n = 2'65 \cdot 10^{28}$$

El nivel de Fermi es, por tanto

$$E_f = \frac{h^2}{2m} \left( \frac{3n}{8\pi} \right)^{2/3} = \frac{(6'62 \cdot 10^{-34})^2}{2 \cdot 9'1 \cdot 10^{-31}} \left( \frac{3 \cdot 2'65 \cdot 10^{28}}{8\pi} \right)^{2/3} = 5'19 \cdot 10^{-19} \text{ J}$$

$$E_f = 5'19 \cdot 10^{-19} \text{ J} = 3'24 \text{ eV}$$

### 32.3. Emisión termoiónica

En la sección anterior se ha visto que, en el cero absoluto, la máxima energía cinética de los electrones libres del metal viene dada por el nivel de Fermi,  $E_F$  tal como se muestra en la figura 32.1. A temperaturas superiores una fracción de los electrones tienen una energía superior a  $E_f$  (Fig. 32.5).

Si se calienta suficientemente el metal, es de esperar que la parte superior de la curva de densidad de electrones mostrada en la figura 32.5, se alargue lo suficiente

para superar el nivel de vacío, de forma que algunos electrones adquieran energía suficiente para escapar del metal.

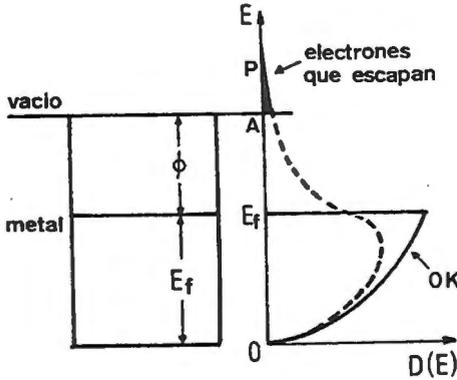


Fig. 32.6

Esta situación se muestra en la figura 32.6. Como puede apreciarse, el aumento de temperatura ha producido una deformación de la curva de distribución de energías a  $OK$ , de forma que los electrones de la "cola" de dicha distribución pueden vencer la barrera de potencial y escapar del metal.

La energía cinética de los electrones, dentro del metal, viene dada por la ordenada de su nivel de energía en la figura 32.6. Después de escapar del metal, la energía cinética es  $E - W$ .

Este fenómeno, escape de los electrones de un metal por efecto de un aumento de temperatura, se denomina **emisión termoiónica**.

Para calcular el número de electrones emitidos por el metal por unidad de tiempo y de área, sería preciso obtener el área comprendida entre la curva  $D(E)$  y el segmento  $AP$  del eje de las energías. Dicha área representa el número de electrones que poseen energía suficiente para vencer la barrera de potencial. Por otra parte, hay que tener en cuenta que no todos estos elementos pueden escapar, ya que, además de tener la energía cinética precisa, es necesario que el movimiento de los electrones sea normal a la superficie del metal

La densidad de corriente emitida por el metal viene dada por la ecuación de Richardson

$$J = A T^2 e^{-\phi/KT} \quad (32.8)$$

donde

$J$  = Densidad de corriente.

$T$  = Temperatura absoluta.

$\phi$  = Función de trabajo.

$K$  = Constante de Boltzmann.

$A$  = Constante que depende de la naturaleza del metal.

La emisión termoiónica constituye la base del funcionamiento de las válvulas de vacío (diodos, triodos, pentodos, etc.) y del tubo de rayos catódicos.

### 32.4. Emisión fotoeléctrica

Consiste en la emisión de electrones de un metal cuando incide sobre él luz de determinadas frecuencias. Este efecto ya fue comentado en el capítulo 1, y su explicación sirvió a Einstein como base para justificar la naturaleza corpuscular de la luz.

Como puede verse en la figura 32.6, incluso en el cero absoluto, un metal puede liberar electrones si a estos se les comunica una energía  $\phi_0$ . La energía asociada a una luz de frecuencia  $\nu$  es  $h\nu$ , así que una luz incidente puede liberar electrones siempre que su frecuencia sea igual o mayor que  $\nu_0$ , dada por

$$h\nu_0 = \phi \quad (32.9)$$

$\nu_0$  recibe el nombre de frecuencia de corte.

El número de electrones liberados es proporcional a la intensidad de la luz incidente (proporcional al número de fotones incidentes), siempre que su frecuencia sea superior a  $\nu_0$ .

Si  $\nu$  es mayor que  $\nu_0$ , los electrones liberados tendrán una energía cinética no nula. La energía cinética máxima de los electrones liberados es, pues

$$T = h\nu - \phi \quad (32.10)$$

Al aumentar la temperatura, la distribución de energías de los electrones del metal se modifica (Fig. 32.6).

Puesto que hay electrones con energías superiores a  $E_f$ , podrá producirse la emisión fotoeléctrica con frecuencias inferiores a  $\nu_0$ .

Si la temperatura aumenta aún más, se producirán a la vez emisión por efecto fotoeléctrico y termoiónico.

32.5. Emisión de campo

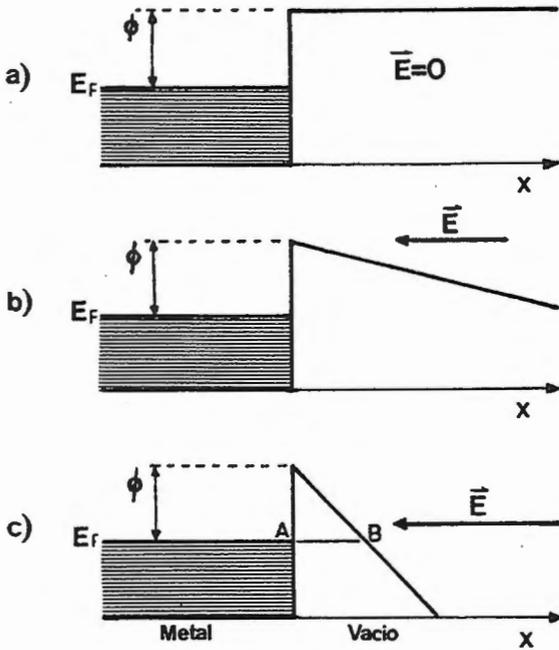


Fig.32.7

La figura 32.7.a, muestra el diagrama de energías para un metal. La parte derecha del diagrama indica la energía de un electrón situado fuera del metal. Dicha energía toma un valor constante, lo cual supone que en las proximidades del metal  $V = \text{cte}$  y, por tanto, el campo eléctrico es nulo.

Ahora bien, si se aplica un campo eléctrico uniforme como el de la figura 32.7.b, la energía de los electrones fuera del metal varía con la distancia. Una vez que un electrón haya sido emitido por el metal, será repelido por éste, ya que hay un gradiente negativo de energías potenciales. No obstante, para que la emisión pueda producirse,

es preciso aportar una energía  $\phi$ , suficiente para vencer la barrera de potencial entre el metal y el vacío.

Para intensidades del campo eléctrico muy elevadas (del orden de  $10^9 \text{ V/m}$ ), se observa que el metal emite electrones incluso a bajas temperaturas. Este efecto se denomina "emisión de campo".

A partir del diagrama de la figura 32.7.c, es posible comprender la emisión de campo. En efecto, si la intensidad del campo eléctrico crece lo suficiente, la barrera de potencial en la superficie se hace muy delgada (del orden de  $10 \text{ \AA}$ ), por lo que, dado el carácter ondulatorio de los electrones (ver nota complementaria 30.2), éstos tendrán una probabilidad finita de atravesarla por efecto túnel.

### 32.6. Potencial de contacto

Supongamos dos metales diferentes, A y B, cuyos diagramas de energía están mostrados en la figura 32.8. Dichos metales tienen diferentes valores de la función de trabajo y de los niveles de Fermi.

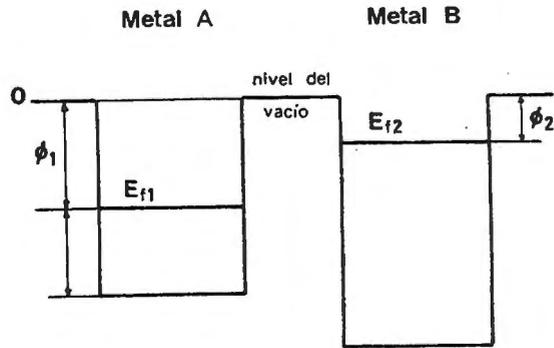


Fig. 32.8

Si se ponen en contacto estos metales, la probabilidad de ocupación de un mismo nivel de energía es diferente en cada uno de ellos. Así, para el de la izquierda es

$$f_1 = \left[ 1 + e^{E - E_{f1}/KT} \right]^{-1} \quad (32.11)$$

y para el de la derecha

$$f_2 = \left[ 1 + e^{(E - E_{f2})/KT} \right]^{-1} \quad (32.12)$$

La relación entre las probabilidades de ocupación del nivel de energía  $E$ , en cada metal es

$$\frac{f_1}{f_2} = \frac{1 + e^{E - E_{f2}/KT}}{1 + e^{E - E_{f1}/KT}} \quad (32.13)$$

Para valores  $E > E_{f2}$ , la expresión (4.23) puede aproximarse como

$$\frac{f_1}{f_2} \approx \frac{e^{E - E_{f2}/KT}}{e^{E - E_{f1}/KT}} = e^{(E_{f1} - E_{f2})/KT} \quad (32.14)$$

A temperatura ambiente ( $25^\circ \text{C}$ ),  $KT$  toma un valor del orden de  $0.026 \text{ eV}$ , por lo que una diferencia en los niveles de Fermi del orden de  $0.1 \text{ eV}$ , supone que

la probabilidad de ocupación del nivel considerado es  $e^{0.1/0.026} \approx 50$  veces superior en el metal de la izquierda que en el de la derecha. Puesto que los electrones pueden circular libremente de un metal a otro, esta desproporción supone un flujo de electrones del metal B al A, con lo que el metal A se cargará negativamente y el B positivamente, apareciendo una diferencia de potencial entre ambos,  $V_{21}$ .

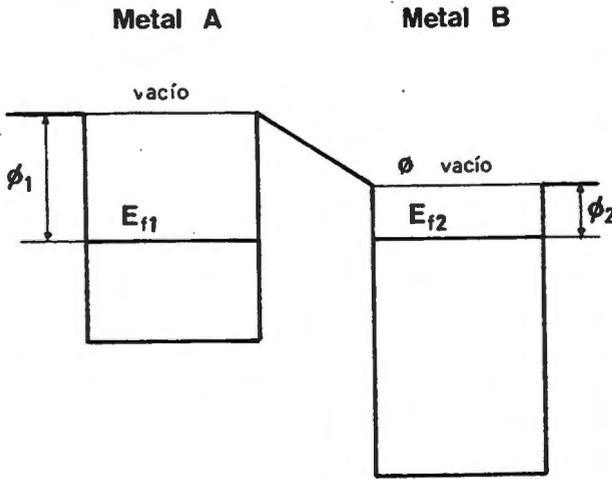


Fig. 32.9

El flujo de electrones de un metal a otro continúa hasta que se igualen las alturas de los niveles de Fermi.

En la figura 32.9, se muestra el diagrama de energías correspondiente al equilibrio después del contacto. Los dos niveles de Fermi se encuentran a la misma altura, pero aparece una barrera de energía potencial entre el nivel de vacío correspondiente al metal A y el correspondiente al metal B.

Dicha barrera tiene una altura

$$\phi = \phi_1 - \phi_2 \tag{32.15}$$

La diferencia de potenciales entre los dos metales es

$$V_2 - V_1 = \frac{\phi}{-e} = \frac{1}{e}(\phi_1 - \phi_2) \tag{32.16}$$

Observese que  $V_2 - V_1$  es positiva si  $\phi_1 > \phi_2$  (la carga del electrón es negativa). Esta diferencia de potencial se llama potencial de contacto.

**PROBLEMAS**

- P. 32.1. Calcular la energía cinética media de los electrones libres de un metal a 0K.

*SOLUCIÓN*

$$e = \frac{3}{5} E_f$$

- P.32.2. Calcular, en eV, la separación entre dos niveles de energía consecutivos cerca del nivel de Fermi, para un metal en el que la concentración de electrones libres es  $n = 2 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$ , sabiendo que el volumen del metal es  $V = 1 \text{ cm}^3$ .

*SOLUCIÓN*

$$\Delta E = 8'95 \cdot 10^{-23} \text{ eV}$$

- P.32.3. Sabiendo que, al incrementar en 1 K la temperatura de un metal que se encontraba a  $T = 2000 \text{ K}$ , la corriente de emisión termiónica se incrementa en 1'4 %, calcular la función de trabajo de dicho metal.

*SOLUCIÓN*

$$\phi = 4'48 \text{ eV}$$

P.32.4. Una superficie metálica se ilumina con luz de frecuencia  $\nu_1 = 0'90 \cdot 10^{15}$  Hz, emitiendo electrones. El valor máximo de la energía cinética de los electrones emitidos es 0'60 eV.

Si se ilumina la misma superficie con luz de frecuencia  $\nu_2 = 1'26 \cdot 10^{15}$  Hz, la energía cinética máxima de los electrones emitidos es de 2'1 eV.

Calcular la constante de Planck y la función de trabajo del metal (a 0K).

### **SOLUCIÓN**

a)  $h = 6'66 \cdot 10^{-34}$  Js

b)  $\phi = 3'15$  eV

P.32.5. Un milivatio de luz de longitud de onda 4560 Å incide sobre una superficie de cesio.

Calcular:

a) Corriente liberada por fotoemisión.

b) Máxima energía cinética de los electrones emitidos.

Datos:  $\phi = 1'39$  eV; rendimiento de la emisión = 0'5 %

### **SOLUCIÓN**

a)  $I = 1'84$   $\mu$ A

b)  $T = 0'79$  eV

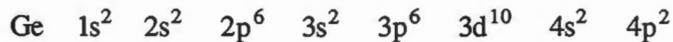
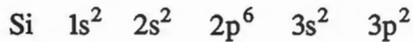
# CAPÍTULO 33

## SEMICONDUCTORES

### 33.1. Semiconductores intrínsecos

En los capítulos anteriores se han justificado las diferencias existentes en cuanto a la conductividad de los aislantes, metales y semiconductores a partir de las diferentes estructuras de las bandas de energía asociadas a cada tipo de cristal. En este capítulo se profundiza en el estudio de los semiconductores.

Los dos elementos semiconductores más utilizados para la fabricación de dispositivos electrónicos son el Ge y el Si. Sus configuraciones electrónicas son



es decir, ambos elementos cuentan con cuatro electrones en su última capa, siendo tetravalentes al igual que el carbono.

La estructura cristalina del Ge o del Si es muy similar a la del diamante: está formada por la repetición de una célula unida que tiene el aspecto de un tetraedro con un átomo en cada vértice y uno en el centro (Fig. 33.1).

El enlace entre cada pareja de átomos es covalente: cada átomo

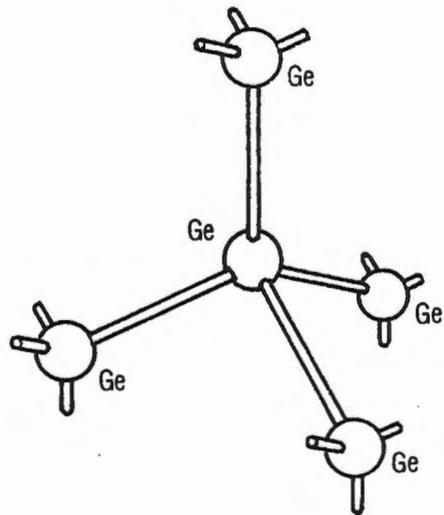


Fig. 33.1

está rodeado por otros cuatro con los que comparte sus electrones de valencia para formar cuatro enlaces covalentes.

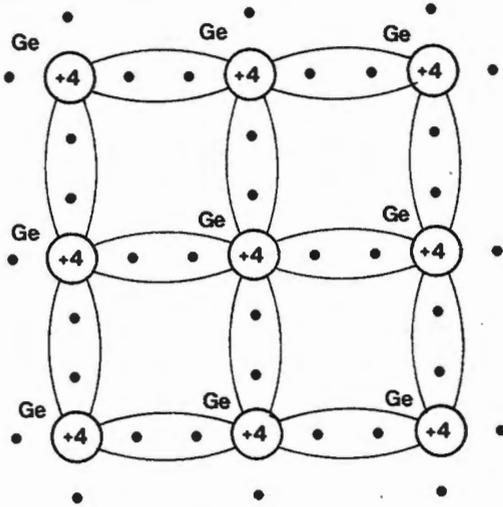


Fig. 33.2

Hay que señalar que el conjunto del cristal es eléctricamente neutro.

Esta estructura tridimensional puede ser representada, de forma simbólica mediante el esquema bidimensional de la figura 33.2.

En dicha figura, cada átomo de Ge aparece rodeado por otros cuatro, y sus electrones de valencia son compartidos en la formación de enlaces covalentes. El símbolo +4 encerrado dentro de un círculo representa un ion  $Ge^{+4}$ , formado por un átomo de Ge al que se le han quitado sus cuatro electrones de valencia.

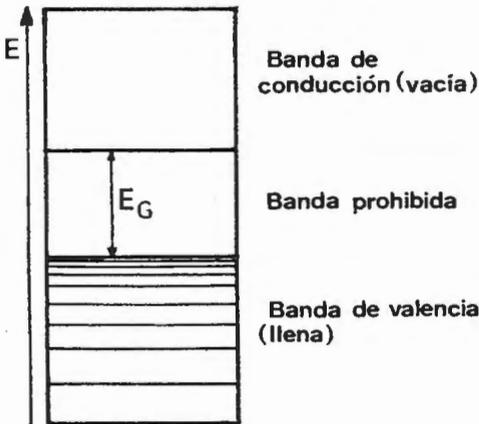


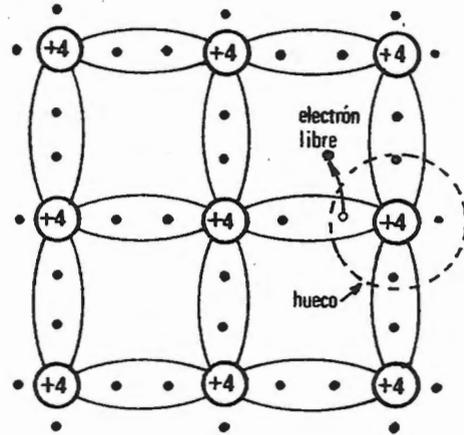
Fig. 33.3

El esquema de la figura 33.2 corresponde a un cristal perfectamente puro y a temperaturas muy bajas. El diagrama de energías correspondiente se muestra en la figura 33.3.

Como se ha visto en la sección 33.4, a bajas temperaturas la banda de conducción está vacía y la de valencia completamente llena. La interpretación de esta situación en función del esquema de la figura 33.2, sería la siguiente: a temperaturas muy bajas, todos los

electrones de valencia están formando parte de enlaces covalentes, por lo que se encuentran ligados y la conducción eléctrica es imposible. **El material es aislante.**

Ahora bien, si se aumenta suficientemente la temperatura, la vibración térmica de los átomos de la red podrá ser suficiente para que algunos electrones ligados a los enlaces los abandonen, quedando libres. Por otra parte, en un enlace no saturado aparece como una concentración de carga positiva que se denomina **hueco** (Fig. 33.4).



*Fig. 33.4*

El enlace incompleto puede ser llenado por un electrón que pase a éste desde otro enlace saturado y, por tanto, el hueco puede desplazarse por el cristal a consecuencia del intercambio de electrones entre átomos.

Mediante rozamientos cuánticos puede demostrarse que los enlaces incompletos, los huecos, se comportan a todos los efectos como partículas libres, con una carga positiva  $+q = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$  y una masa comparable a la del electrón.

La existencia de estas partículas aparentes determinan las enormes diferencias existentes entre un semiconductor y un metal poco conductor. En efecto, en un metal la conducción se produce por el movimiento de los electrones libres. En el semiconductor puro, por el contrario, aparecen dos tipos de portadores de carga, los electrones libres y los huecos. Al aplicar un campo eléctrico ambos tipos de portadores se desplazarán en sentidos contrarios, dando lugar a corrientes eléctricas en el mismo sentido.

Si el semiconductor es perfectamente puro, por cada electrón libre aparecerá un hueco, ya que ambos se producen a partir de la ruptura de un enlace covalente. Por tanto, en un cristal puro existe el mismo número de huecos que de electrones libres. Tal tipo de semiconductores reciben el nombre de **semiconductores intrínsecos.**

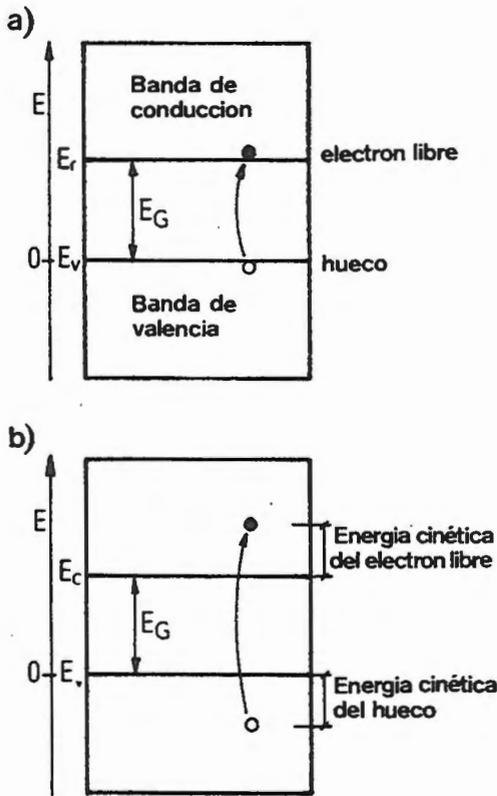


Fig. 33.5

aparición de un electrón libre, en reposo, en la banda de conducción mientras que en la banda de valencia aparece en reposo un hueco (Fig. 33.5.a).

En definitiva, el fondo de la banda de conducción  $E_c$  representa la mínima energía de un electrón libre y el techo de la banda de valencia  $E_v$ , la mínima energía cinética de un hueco.

Si la energía aportada  $E$  es superior a  $E_G$ , entonces podrán saltar a la banda conducción un electrón que ocupaba algún nivel de energía inferior a  $E_v$ , dejando en dicho nivel el correspondiente hueco (Fig. 33.5.b). La diferencia de energía entre el nivel ocupado ahora por el electrón dentro de la banda de conducción y el fondo

Estudiemos la generación de un par electrón-hueco mediante un diagrama de energías. A temperaturas muy bajas, tal diagrama corresponde al de la figura 33.3, con la banda de conducción vacía, la banda de valencia llena y una banda prohibida de anchura  $E_G$ .

La aparición del par electrón-hueco exige un aporte de energía  $E$ , igual o superior a la anchura de la banda prohibida. Dicho aporte de energía puede producirse mediante un aumento de temperatura, iluminación, bombardeo con partículas, etc.

Si la energía aportada es exactamente igual a  $E_G$ , tan sólo los electrones que ocupan niveles próximos al techo de la banda de valencia ( $E_v$ ) podrán saltar al fondo de la banda de conducción, dando lugar a la

de dicha banda,  $E_c$ , representa la energía cinética del electrón libre generado. Análogamente, la energía cinética del hueco viene representada por la diferencia de energías entre el nivel vacío, dentro de la banda de valencia y el techo de dicha banda (Fig. 33.5.b).

### 33.2 Semiconductores extrínsecos

En la sección precedente se ha estudiado el origen de la conductividad extrínseca, que aparece en los semiconductores puros por la generación, en número idéntico, de electrones libres y huecos.

Ahora bien, en la fabricación de dispositivos electrónicos es necesario que la conductividad sea ocasionada, fundamentalmente, por uno u otro tipo de portadores.

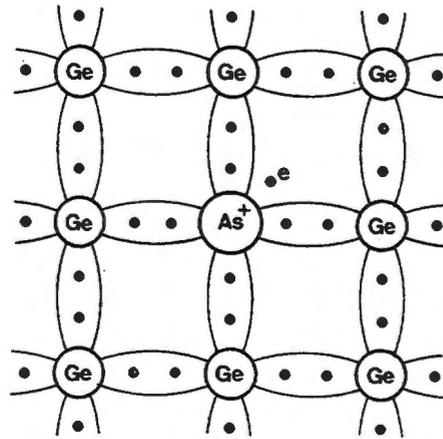


Fig. 33.6

Esto puede conseguirse añadiendo al semiconductor puro una cierta cantidad (del orden de 1ppm) de impurezas adecuadamente elegidas. Este proceso se denomina dopado y al semiconductor así obtenido se llama **semiconductor extrínseco**.

Así, si se añade al germanio fundido una ligerísima cantidad de un elemento pentavalente, As por ejemplo, cada átomo de este último elemento reemplaza, después de la solidificación, a un átomo de Ge, resultando una configuración cristalina como la mostrada en la figura 33.6.

La configuración electrónica del arsénico es



por lo que los cinco electrones de valencia del arsénico se encuentran dispuestos en los estados  $4s$  y  $4p$ . En la red cristalina cuatro de estos cinco electrones de

valencia serán compartidos con los cuatro átomos vecinos de Ge, dando lugar a los correspondientes enlaces covalentes. El quinto electrón no forma parte de ningún enlace y por lo tanto, su ligazón con el átomo de arsénico es muy débil. No obstante, a bajas temperaturas se encontrará localizado cerca de él.

Al aumentar la temperatura, este electrón se desprende de la impureza y puede desplazarse libremente por el cristal. Obsérvese que se ha generado un electrón libre sin que aparezca el correspondiente hueco. No obstante, la neutralidad eléctrica del cristal se mantiene, ya que al liberar el quinto electrón, el átomo de arsénico se ha transformado en un ion positivo.

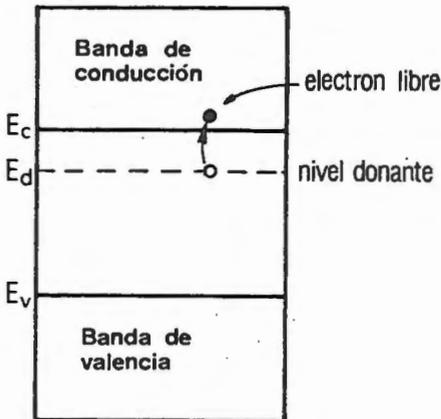


Fig. 33.7

**mayoritarios**, mientras que los huecos son **portadores minoritarios**. Un semiconductor de este tipo se denomina semiconductor **tipo n** o por **exceso**, y la impureza que entrega los electrones recibe el nombre de **donadora**.

Desde el punto de vista del diagrama energético, la existencia de impurezas en la red del semiconductor se manifiesta en la aparición de un nivel local en la banda prohibida (Fig. 33.7). Puesto que al ionizarse el átomo de arsénico se origina un electrón libre, y para su desprendimiento se necesita mucha menor energía que para la ruptura de los enlaces covalentes del germanio, el nivel de la impureza donadora debe situarse en la banda prohibida, a poca profundidad bajo el fondo de la banda de conducción.

De forma simultánea con la ionización de las impurezas, puede producirse la generación de pares electrón hueco por ruptura de enlaces covalentes Ge - Ge. Sin embargo, a temperaturas inferiores a las que se produce una considerable conductividad intrínseca, la cantidad de electrones liberados por las impurezas será muy superior a la cantidad de electrones y huecos generados a partir de la sustancia básica. Debido a esto los electrones juegan un papel dominante en la conductividad del cristal, por lo que se les llama **portadores de carga**

Un proceso análogo, pero de signo contrario puede conseguirse introduciendo impurezas trivalentes como el aluminio, boro, indio, etc. En la figura 33.8, se muestra un esquema de la estructura cristalina correspondiente a un cristal de Ge dopado con Al.

Puesto que el aluminio tiene tres electrones de valencia, sólo podrá completar tres enlaces covalentes con los cuatro átomos de germanio que lo rodean, quedando un enlace incompleto. Este enlace puede ser completado por algún electrón de un átomo de Ge vecino, originándose un hueco libre que se mueve por el cristal y un ion negativo de aluminio, que permanece fijo.

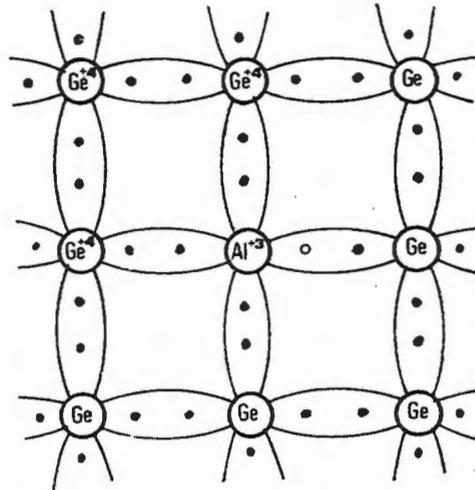


Fig. 33.8

La energía necesaria para la formación del hueco, por el salto de un electrón de valencia del Ge al átomo de impureza, es muy inferior a la que se precisa para romper un enlace covalente Ge - Ge. Por ello, la cantidad de huecos puede ser mucho mayor que el número de electrones libres, siendo la conducción de tal cristal debida a los huecos.

Las impurezas trivalentes, que se apoderan de electrones de denominan **aceptoras** y el semiconductor con **impurezas aceptoras** se denomina por defecto o **tipo p**. En un semiconductor tipo p los huecos son los portadores mayoritarios, mientras que los electrones son minoritarios.

El diagrama de energías correspondiente a un semiconductor tipo p queda reflejado en la figura 33.9. La

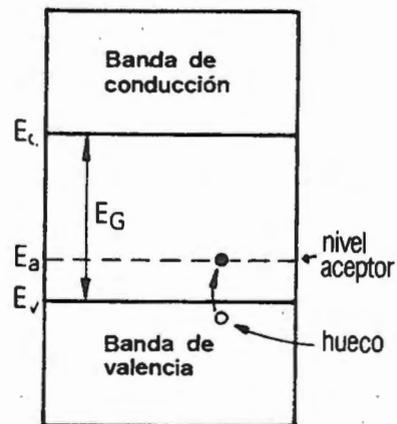


Fig. 33.9

impureza aceptora origina un nivel de energía  $E_a$  en la banda prohibida, a poca distancia sobre el techo de la banda de valencia. La ionización de la impureza aceptora supone el salto de un electrón desde la banda de valencia hasta el nivel  $E_a$ , apareciendo en la banda de valencia un enlace vacante, es decir, un hueco, que es precisamente el portador de carga libre.

### 33.3. Masa efectiva

Al aplicar a un semiconductor un campo eléctrico exterior los portadores de carga se desplazan bajo la acción de las fuerzas asociadas al mismo.

A la hora de determinar el movimiento de dichos portadores hay que tener en cuenta no sólo las acciones exteriores aplicadas, sino además las fuerzas debidas al potencial periódico de la red cristalina. La resolución de este problema exige un planteamiento cuántico que se sale de los objetivos de este texto.

No obstante, y siempre y cuando las fuerzas exteriores sean mucho más débiles que las asociadas al potencial periódico de la red, es posible mantener una imagen clásica del comportamiento de los portadores a partir del concepto de masa efectiva.

Se denomina masa efectiva,  $m^*$ , de un electrón (o de un hueco) a un parámetro que representa la facilidad con que se puede acelerar un electrón (o un hueco) a través de la red periódica, bajo la acción de una fuerza exterior. Si la fuerza exterior es  $\vec{f}_e$  la masa efectiva queda determinada como

$$\vec{f}_e = m^* \frac{d\vec{v}}{dt} \quad (33.1)$$

En definitiva, la masa efectiva resume el efecto de todas las fuerzas periódicas del cristal, de forma que a partir de este parámetro se puede calcular la respuesta de los portadores ante una fuerza exterior.

Hay que señalar que la masa efectiva de un electrón es distinta a la de un electrón libre. Por otro lado, no hay ninguna justificación clásica que explique que a un hueco (enlace sin completar) se le pueda asociar una "masa".

## ALGUNAS PROPIEDADES DE Ge Y Si

	Ge	Si
Número atómico	32	14
Masa atómica	72.60	28.06
Densidad (25° C), Kg/m <sup>3</sup>	5.33 · 10 <sup>3</sup>	2.33 · 10 <sup>3</sup>
Constante dieléctrica relativa E <sub>r</sub>	16	12
Masa efectiva (4 K) de los electrones libres	0.55 m	1.1 m
Masa efectiva de los huecos (4 K)	0.37 m	0.59 m
Anchura de la banda prohibida (0K), eV	0.78	1.21
Concentración intrínseca N <sub>i</sub> (300 K) (cm <sup>-3</sup> )	2.5 · 10 <sup>13</sup>	1.5 · 10 <sup>10</sup>

TABLA 33.1

De ahora en adelante, supondremos que electrones y huecos son partículas de igual carga (con signo opuesto) y cuyas inercias [frente a fuerzas extremas] vienen representadas por sus masas efectivas,  $m_n^*$  y  $m_p^*$ , respectivamente.

Las masas efectivas dependen del estado energético ocupado por el portador y, en general, toman valores distintos en cada dirección del espacio. No obstante, en los problemas que se van a tratar en este texto adoptaremos los valores promedio que se muestra en la tabla 33.1, expresados en función de la masa del electron,  $m^*$ .

### 33.4. Distribución de portadores en las bandas de energía

En las secciones anteriores se han descrito, de forma cualitativa, los mecanismos que determinan la conductividad en los semiconductores intrínsecos o extrínsecos. Para llegar a una explicación cuantitativa de las propiedades eléctricas de los semiconductores es preciso seguir unos razonamientos similares a los expuestos en el capítulo anterior para el caso de los metales.

En esta sección se obtendrán las expresiones que permiten calcular la concentración de portadores libres en un semiconductor y su variación en función de la temperatura.

La concentración de electrones libres depende, al igual que en el caso de los metales, de dos factores:  $N(E)$  o densidad de estados energéticos disponibles en la banda de conducción y  $f(E,T)$  o probabilidad de que un estado con energía  $E$  sea ocupado por un electrón.

Por otra parte, la densidad de huecos depende de la densidad de estados energéticos en la banda de valencia, y de la probabilidad de que dichos estados se encuentren vacíos. Estudiemos estos dos factores ( $N(E)$  y  $f(E,T)$ ) por separado.

Siguiendo razonamientos similares a los utilizados en el caso de los metales, se puede demostrar que la distribución de estados o niveles energéticos en las bandas de conducción y de valencia de un semiconductor no es uniforme, sino que obedece a las expresiones.

$$N(E) = \gamma_n (E - E_o)^{1/2} \quad (33.2)$$

para la banda de conducción, y

$$N(E) = \gamma_p (E_v - E)^{1/2} \quad (33.3)$$

para la de valencia. En las expresiones (33.2) y (33.3)  $N$  representa el número de estados, por unidad de volumen y de energía, comprendidos entre  $E$  y  $E + dE$ ,  $\gamma_n$  y  $\gamma_p$  son dos constantes cuyos valores son

$$\gamma_n = \frac{8\pi\sqrt{2}}{h^3} m_n^{*3/2} \quad (33.4)$$

$$\gamma_p = \frac{8\pi\sqrt{2}}{h^3} m_p^{*3/2}$$

donde  $m_n^*$  y  $m_p^*$  son las masas efectivas de los electrones libres y huecos, respectivamente.

La figura 33.10 muestra la distribución de niveles permitidos en un semiconductor.

Ahora bien, para determinar la densidad de portadores correspondiente a una energía dada, no basta con saber la distribución de niveles susceptibles de ser ocupados por los electrones libres o de ser abandonados para dar lugar a un hueco. Es preciso, además, conocer la posibilidad de que dichos niveles estén ocupados o vacíos. La probabilidad de que un determinado estado de energía este ocupado por un electrón viene dada por la función de Fermi-Dirac

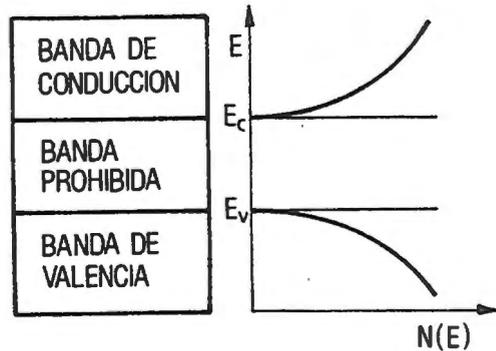


Fig. 33.10

$$f(E, T) = \frac{1}{1 + e^{(E-E_f)/KT}} \quad (33.5)$$

expresión que ya ha sido comentada con detalle en el capítulo anterior. Aplicándola a valores de energía comprendidos en la banda de conducción se obtienen las probabilidades de encontrar electrones libres en los diferentes niveles de la citada banda.

En el caso de los huecos, la probabilidad de hallar un hueco en un nivel energético de la banda de valencia es igual a la probabilidad de que dicho nivel esté vacío, es decir igual a

$$1 - f(E) = \frac{e^{(E-E_f)/KT}}{1 + e^{(E-E_f)/KT}} \quad (33.6)$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (33.2), (33.3), (33.5) y (33.6), resulta evidente que la cantidad de electrones o huecos por unidad de volumen y de energía, con una energía comprendida en el intervalo  $(E, E + dE)$  es

$$dn = \gamma_n (E - E_c)^{1/2} f(E) dE = D(E) dE; \quad (E > E_c) \quad (33.7)$$

para electrones libres, y

$$dp = \gamma_p (E_v - E)^{1/2} [1 - f(E)] dE = D(E) dE; \quad (E_v > E) \quad (33.8)$$

para huecos.  $n$  y  $p$  representan, respectivamente, las concentraciones de electrones libres y de huecos (se miden en  $m^{-3}$ ).

La determinación de  $D(E)$  exige conocer cuál es la situación del nivel de Fermi en el diagrama energético. Parece lógico suponer que dicho nivel se encuentra en la banda prohibida, como lo demuestra el hecho de que a la temperatura del cero absoluto  $dn$  y  $dp$  son cero para cualquier valor de  $E$ .

Sin embargo, la situación de  $E_f$  en la banda prohibida se modifica notablemente según el semiconductor sea intrínseco o extrínseco, por lo que estudiaremos cada caso por separado.

### 33.4.1. Semiconductores intrínsecos

En un semiconductor intrínseco, el nivel de Fermi se encuentra en la región central de la banda prohibida, tal como se muestra en la figura 33.11. En dicha figura se ha representado el diagrama de bandas (a), densidad de estados (b), función de Fermi-Dirac (c), y densidad de estados ocupados en la banda de conducción o vacíos en la de valencia (d).

A la temperatura  $T = 0K$ ,  $f(E)$  es nula para  $E > E_f$  y vale 1 para  $E < E_f$ . Por tanto, en el cero absoluto, la probabilidad de hallar un estado ocupado en la banda de conducción es nula y la de hallar un nivel vacío (hueco) en la de valencia también. No hay portadores libres.

Al aumentar la temperatura, la función  $f(E, T)$  se modifica de forma que la densidad de estados ocupados en la banda de conducción no es nula, sino la indicada

en la parte superior (1) de la figura 33.11.d. La concentración de electrones libres es igual al área comprendida entre la curva (1) y el eje de energías, esto es

$$n = \int_{E_c}^{\infty} D(E) dE \quad (33.9)$$

integral que tiene como resultado

$$n = N_c e^{(E_f - E_c)/KT} \quad (33.10)$$

donde  $N_c$  es una función de la temperatura:

$$N_c = \frac{4\sqrt{2}}{h^3} (\pi m_n^* KT)^{3/2} \quad (33.11)$$

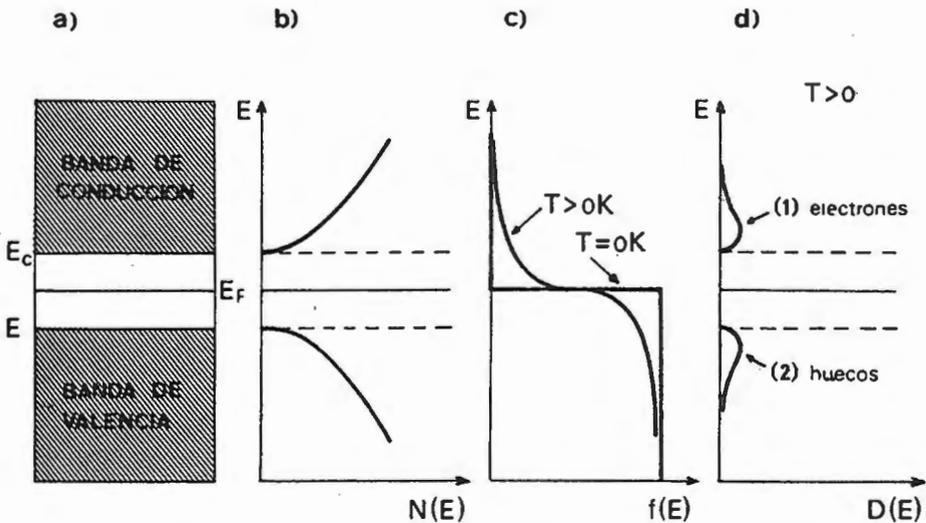


Fig. 33.11

La densidad de estados vacíos en la banda de valencia se representa en la curva (2) de la figura 33.11.d. La concentración de huecos es, teniendo en cuenta (33.8)

$$p = \int_{-\infty}^{E_v} D(E) dE \quad (33.12)$$

integral que tiene como resultado

$$p = N_v e^{(E_v - E_f)/KT} \quad (33.13)$$

donde  $N_v$  es

$$N_v = \frac{4\sqrt{2}}{h^3} (\pi m_n^* KT)^{3/2} \quad (33.14)$$

A partir de las ecuaciones (33.10) y (33.13), se puede despejar el valor de  $E_f$  en función de las concentraciones de portadores

$$E_f = \frac{E_c + E_v}{2} + \frac{KT}{2} \ln \frac{N_v n}{N_c p} \quad (33.15)$$

Ahora bien, en un semiconductor intrínseco las concentraciones de electrones libres y huecos son iguales y, teniendo en cuenta que  $N_c$  y  $N_v$  son del mismo orden ( $m_n^* \approx m_p^*$ ), es posible admitir que

$$\frac{KT}{2} \ln \frac{N_v n}{N_c p} \approx 0$$

Por tanto, en un semiconductor intrínseco, el nivel de Fermi se encuentra, aproximadamente, en la mitad de la banda prohibida:

$$E_{fi} = \frac{E_c + E_v}{2} \quad (33.16)$$

tal como se había supuesto.

### 33.4.2. Semiconductores extrínsecos

En un semiconductor extrínseco tipo  $n$ , la concentración de electrones es muy superior a la de huecos, mientras que en un semiconductor del tipo  $p$  sucede lo contrario.

En cualquier caso, para dopados débiles (pequeñas concentraciones de impurezas) siguen siendo válidas las expresiones (33.10) y (33.13) y, por tanto la (33.15). Esta última permite determinar la posición del nivel de Fermi en un semiconductor de impureza, Así, si el semiconductor es tipo  $n$ ,  $n \gg p$ , resulta que

$$\frac{KT}{2} \ln \frac{N_v n}{N_c p} > 0$$

luego el nivel de Fermi se encuentra por encima del correspondiente a un semiconductor intrínseco, esto es, más cerca del fondo de la banda de conducción que del techo de la de valencia.

Por el contrario, en un semiconductor tipo  $p$ ,  $p \gg n$ , se cumple que

$$\frac{KT}{2} \ln \frac{N_v n}{N_c p} < 0$$

lo que indica que el nivel de Fermi se encuentra próximo al techo de la banda de valencia.

En las figuras 33.12 y 33.13 se han representado los diagramas de energía (a), densidad de estados (b), función de Fermi-Dirac (c) y densidad de estados ocupados o vacíos para cada tipo de semiconductor.

Como puede observarse, por comparación de las figuras 33.11 y 33.12, el desplazamiento del nivel de Fermi hacia la banda de conducción, que aparece en un semiconductor  $n$ , implica un aumento de la probabilidad de que los niveles de la banda de conducción se encuentren ocupados y una disminución de la probabilidad de que los niveles de la banda de valencia estén vacíos. En definitiva, aumenta la concentración de electrones y disminuye la de huecos.

Un proceso similar, pero en sentido opuesto, sucede en el semiconductor tipo  $p$ , en el que la concentración de huecos aumenta debido al desplazamiento hacia abajo del nivel de Fermi.

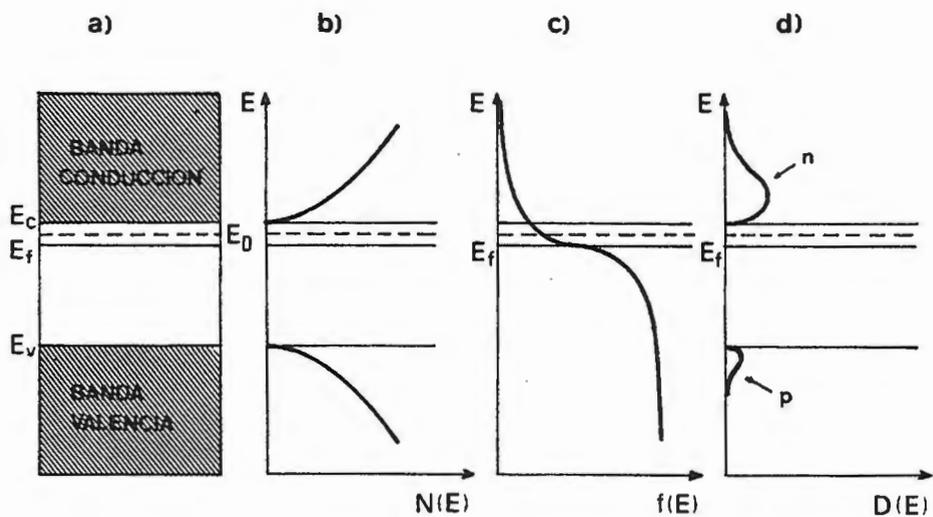


Fig. 33.12

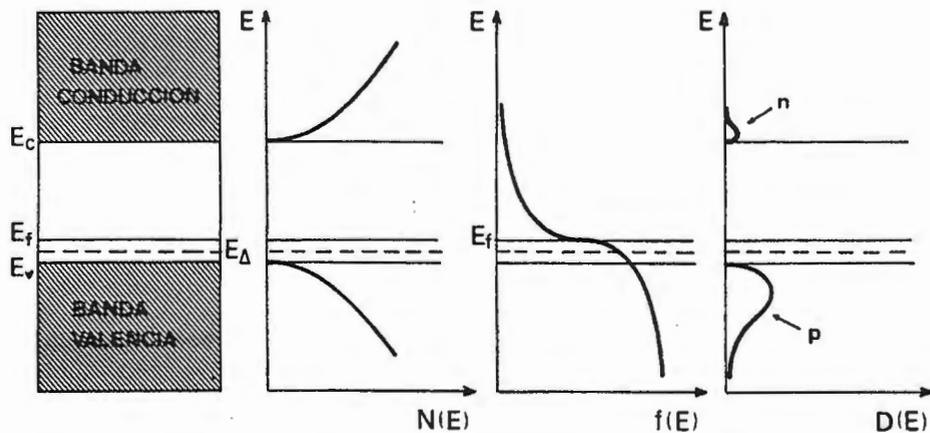


Fig. 33.13

### 33.5. Ley de acción de masas. Concentración de portadores en un semiconductor

Las ecuaciones (33.10) y (33.13) proporcionan las concentraciones de electrones libres y huecos, una vez determinada la posición del nivel de Fermi. Multiplicando ambas expresiones se llega a

$$n \cdot p = N_v N_c e^{-E_G/KT} \quad (33.17)$$

es decir, el producto de las concentraciones de portadores es independiente de la posición del nivel de Fermi y, por tanto, del dopado del semiconductor y sólo depende de la temperatura. La expresión (33.17) puede escribirse como

$$n p = n_i^2 \quad (33.18)$$

donde  $n_i$  es una función de la temperatura que se denomina **concentración intrínseca**.

La dependencia de  $n_i$  de la temperatura queda manifiesta a partir de las expresiones (33.17), (33.11) y (33.14). La relación experimental que cuantifica la citada dependencia es

$$n_i^2 = A_0 T^3 e^{-E_{G0}/KT} \quad (33.19)$$

donde  $A_0$  es una constante y  $E_{G0}$  es la anchura de la banda prohibida a la temperatura del cero absoluto.

La ecuación (33.18) recibe el nombre de **ley de acción de masas** y es aplicable a un semiconductor intrínseco o extrínseco, en equilibrio térmico.

Si el semiconductor es intrínseco, entonces  $n = p$ , y teniendo en cuenta (33.18), resulta

$$n = p = n_i \quad (33.20)$$

de donde se deduce que la concentración intrínseca representa la concentración de portadores en un semiconductor intrínseco en equilibrio térmico.

Si el semiconductor se encuentra dopado, la ley de acción de masas no es suficiente para determinar la concentración de portadores. Además, es preciso añadir una relación que ligue dichas concentraciones con la densidad de impurezas donadoras o aceptoras. Esta relación es la ley de neutralidad eléctrica a la que daremos forma algebraica a continuación.

En efecto, supongamos un semiconductor dopado y sea  $N_A$  la concentración de impurezas aceptoras y  $N_D$  la concentración de impurezas donadoras (en número de átomos por unidad de volumen).

En el cero absoluto no hay electrones libres ni huecos, ya que las impurezas no están ionizadas y los enlaces entre los átomos del semiconductor están completos ( $n_i = 0$ ). Por tanto, la densidad de carga es nula y el cristal es eléctricamente neutro.

A la temperatura ambiente, la práctica totalidad de las impurezas donadoras han emitido su quinto electrón, transformándose en iones positivos, mientras que los átomos aceptores han completado un cuarto enlace, liberando un hueco y transformándose en iones negativos. Además, algunos enlaces covalentes pueden romperse, dando lugar a huecos y electrones libres en igual número. Las concentraciones de portadores no son nulas, pero el cristal sigue siendo eléctricamente neutro. Es decir, las concentraciones de cargas positivas y negativas son iguales en cualquier punto del cristal. La neutralidad eléctrica del cristal se expresa como

$$[\text{cargas positivas}] = [\text{cargas negativas}]$$

$$N_D + p = N_A + n \quad (33.21)$$

ecuación que junto con la (33.18) permite calcular  $n$  y  $p$  en un semiconductor extrínseco.

Si las impurezas son tipo  $n$  ( $N_A = 0$ ), entonces, a temperatura ambiente, todas las impurezas estarán ionizadas y

$$n \approx N_D \quad (33.22)$$

y, teniendo en cuenta (33.18) la concentración de portadores minoritarios es

$$p = \frac{n_i^2}{n} \approx \frac{n_i^2}{N_D} \quad (33.23)$$

Si las impurezas son aceptoras ( $N_D = 0$ ), entonces

$$p \approx N_A \quad (33.24)$$

y la concentración de electrones es

$$n = \frac{n_i^2}{p} \approx \frac{n_i^2}{N_A} \quad (33.25)$$

Finalmente, hay que señalar que para que las aproximaciones hechas en las expresiones (33.22) y (33.23) para un semiconductor  $n$ , o en las (33.24) y (33.25) para uno  $p$ , sean válidas es preciso que las concentraciones de dopado sean muy superiores a la concentración intrínseca (ver ejemplo resuelto).

### Ejemplo 33.1

Calcular la concentración de electrones y huecos en un semiconductor tipo  $n$ , en función de la concentración de impurezas donadoras  $N_D$ . Determinar cual debe ser el valor de  $N_D$  para que la diferencia entre  $n$  y  $N_D$  sea inferior a 1% de  $N_D$ .

#### Solución:

Las ecuaciones que determinan las concentraciones de portadores son

$$np = n_i^2 \quad (\text{ley de acción de masas})$$

$$n = p + N_D \quad (\text{ley de neutralidad eléctrica})$$

operando se llega a

$$n^2 - nN_D - n_i^2 = 0$$

cuya solución es

$$n = \frac{N_D + \sqrt{N_D^2 + 4n_i^2}}{2}$$

$$p = \frac{n_i^2}{n}$$

es decir  $n > N_D$

Para que la diferencia entre  $N_D$  y  $n$  sea inferior al 1% es preciso que

$$n = \frac{N_D + \sqrt{N_D^2 + 4n_i^2}}{2} < 1'001 N_D$$

y, operando

$$n_i^2 < 5 \cdot 10^{-4} N_D^2$$

o bien

$$N_D > 44'7 n_i$$

Puesto que la concentración intrínseca toma valores muy bajos a temperatura ambiente, basta con un pequeñísimo dopado para que la concentración de electrones sea casi igual a la de impurezas donadoras.

## PROBLEMAS

P.33.1. Calcular  $\gamma_n^*$  y  $\gamma_p^*$  en el Ge, a partir de los datos de Tabla 33.1.

**SOLUCIÓN**

a)  $\gamma_n^* = 2'78 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} (\text{eV})^{-3/2}$

b)  $\gamma_p^* = 1'53 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3} (\text{eV})^{-3/2}$

P.33.2. Calcular el número de estados permitidos en la banda de conducción del Ge, en el intervalo de energías  $[E_c, E_c + 1 \text{ eV}]$ .

**SOLUCIÓN**

$$1'85 \cdot 10^{27} \text{ m}^{-3}$$

P.33.3. Calcular  $N_c$  y  $N_v$  en el Ge a 300 K.

**SOLUCIÓN**

a)  $N_c = 1'02 \cdot 10^{25} \text{ m}^{-3}$

b)  $N_v = 5'65 \cdot 10^{24} \text{ m}^{-3}$

P.33.4. Determinar la posición del nivel de Fermi en los siguientes casos:

- a) Ge intrínseco, a 300 K.
- b) Ge tipo p, a 300 K;  $N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ .
- c) Ge tipo n, a 300 K;  $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ .

(Tómese como referencia el centro de la banda prohibida).

**SOLUCIÓN**

- a) 0'015 eV
- b) -0'18 eV
- c) 0'21 eV

P.33.5. Calcular la concentración intrínseca del Ge a 500 K.

**SOLUCIÓN**

$$n_i(500 \text{ K}) = 2'06 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$$

P.33.6. Calcular  $n$  y  $p$  en una muestra de Ge tipo n, con un dopado  $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ .

- a) Para  $T = 300 \text{ K}$
- b) Para  $T = 500 \text{ K}$

(Tómese como  $n_i(500)$  el valor calculado en el problema anterior)

**SOLUCIÓN**

a)  $n = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ ;  $p = 6'25 \cdot 10^{11} \text{ cm}^{-3}$

b)  $n = 2'11 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ;  $p = 2'01 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$

P.33.7. Calcular el número de electrones libres por átomo en una muestra de Ge intrínseco a 300 K.

**SOLUCIÓN**

Hay un electrón libre por cada  $18 \cdot 10^8$  átomos.

P.33.8. Una muestra de Ge tiene un dopado de  $N_A = 10^{13} \text{ cm}^{-3}$  y  $N_D = 2 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$ . Calcular  $n$  y  $p$  ( $T = 300 \text{ K}$ ).

**SOLUCIÓN**

$$n = 3'05 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}; \quad p = 2'05 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}$$



# CAPÍTULO 34

## ELECTRÓNICA DE SEMICONDUCTORES

### *34.1. Introducción*

El presente capítulo tiene por objeto la descripción de los fenómenos de transporte de cargas que aparecen en los semiconductores, bien como consecuencia de la aplicación de campos eléctricos, bien por la existencia de gradientes de concentración de los portadores. A partir de este estudio se llegará a la ley fundamental que rige el flujo de portadores en un semiconductor, la ecuación de continuidad.

Los conceptos de movilidad de los portadores, velocidad de arrastre, densidad de carga, densidad de corriente y conductividad que aquí se establecen son similares a los introducidos, para los metales, en el correspondiente capítulo de electricidad, con la diferencia notable de que en aquel caso los portadores son electrones libres, mientras que en un semiconductor pueden ser electrones o huecos.

### *34.2. Corrientes de desplazamiento. Conductividad*

Tal como se ha estudiado en el capítulo anterior, en un semiconductor, a temperatura ambiente, coexisten dos tipos de portadores, electrones libres y huecos, cuyas concentraciones dependen de la temperatura.

La energía cinética de dichos portadores no es nula (salvo en el caso de los electrones que ocupan el fondo de la banda de conducción o de los huecos correspondientes al nivel techo de la banda de valencia). Además, esta energía aumenta al incrementarse la temperatura.

En definitiva, incluso en ausencia de un campo eléctrico exterior, los portadores se encuentran en movimiento por el cristal. No obstante, en una sustancia real siempre existen alteraciones de la estructura cristalina, originadas por las

oscilaciones de los átomos del cristal, presencia de defectos, impurezas y dislocaciones. Debido a ello, el portador chocará con las heterogeneidades de la red, modificándose la dirección de su movimiento. Por tanto, el movimiento de un portador es desordenado, como se muestra en la figura 34.1.

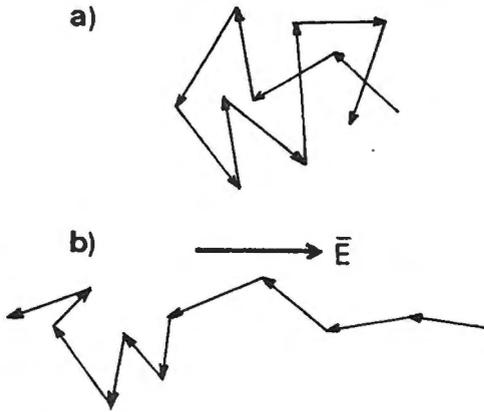


Fig. 34.1

Si se aplica un campo eléctrico,  $\vec{E}$ , la situación cambia por completo ya que al movimiento aleatorio (originado por la agitación térmica) se le superpone un movimiento en la dirección del campo, de forma que la velocidad media de los portadores no es nula, sino que se toma los valores de  $\bar{v}_p$ , para los huecos, y  $\bar{v}_n$  para los electrones libres. Aparece, pues, un desplazamiento neto de cargas y una corriente eléctrica que se denomina corriente de desplazamiento.

La velocidad media de los portadores se denomina velocidad de arrastre o de desplazamiento. Su dirección es la del campo eléctrico, su sentido es el del campo para los huecos, o el opuesto para los electrones libres, y su módulo es proporcional a la intensidad del campo aplicado  $\vec{E}$ . En resumen,

$$\bar{v}_p = \mu_p \vec{E} \tag{34.1}$$

$$\bar{v}_n = -\mu_n \vec{E} \tag{34.2}$$

donde  $\mu_p$  y  $\mu_n$  son las movilidades de los huecos y electrones, respectivamente, y su valor depende, entre otros factores, del material y de la temperatura.

La movilidad aparece, pues, como un índice de la facilidad que un material presenta para poner en movimiento sus portadores bajo la acción de un campo eléctrico, y representa la velocidad de desplazamiento por unidad de campo eléctrico. En consecuencia, sus dimensiones son

$$[\mu] = \frac{[v]}{[E]} = M^{-1} T^2 I$$

y su unidad en el S. I. es el  $m^2 / V \cdot s$

Generalmente, la movilidad de los electrones es superior a la de los huecos, como puede verse en los datos reflejados en la Tabla 34.1. Estas movilidades disminuyen al aumentar la temperatura (ya que aumenta la frecuencia de choques con la red) y crecen con el grado de pureza del material y del estado cristalino.

Hay que señalar que, si bien las velocidades de arrastre de los electrones y huecos son opuestas, las corrientes debidas al movimiento de los dos tipos de portadores tienen el mismo sentido, por lo que la corriente total es la suma de ambas corrientes. Por tanto, si denominamos por  $n$  y por  $p$  a las concentraciones de electrones y huecos, respectivamente, la densidad de corriente de desplazamiento vendrá dada por

$$\vec{J} = q(n\mu_n + p\mu_p)\vec{E} \quad (34.3)$$

donde  $q$  es la carga del portador en valor absoluto.

Comparando la expresión (34.3) con la establecida en el capítulo 15 para la ley de Ohm

$$\vec{J} = \sigma \vec{E} \quad (34.4)$$

resulta evidente que la conductividad del semiconductor es

$$\sigma = q(n\mu_n + p\mu_p) \quad (34.5)$$

En un semiconductor intrínseco,  $n = p = n_i$ , y por tanto, la conductividad es

$$\sigma = q n_i (\mu_n + \mu_p) \quad (34.6.)$$

recibiendo el nombre de conductividad intrínseca.

En un semiconductor extrínseco, tipo n por ejemplo, la concentración de portadores mayoritarios es muy superior a la de portadores minoritarios, por lo cual la corriente de desplazamiento de huecos es despreciable frente a la de electrones. En definitiva, para un semiconductor extrínseco la expresión (34.5) puede aproximarse como

$$\sigma \approx q n \mu_n \quad (34.7)$$

para un semiconductor n, y

$$\sigma \approx q p \mu_p \quad (34.8)$$

para un tipo p.

Hay que señalar que tanto la movilidad como la concentración de portadores dependen de la temperatura, por lo que la conductividad es una función de la temperatura.

Así, la movilidad disminuye al incrementarse la temperatura por aumentar con ella la agitación térmica y el número de choques entre los portadores y las heterogeneidades del cristal.

La concentración de portadores aumenta con la temperatura, por aumentar la concentración intrínseca, como se muestra en la expresión (34.19). Este incremento se debe a la generación de pares electrón-hueco, por lo que el efecto de la temperatura es mucho más notable en los semiconductores intrínsecos que en los extrínsecos, en los que la concentración de portadores depende esencialmente, y en un amplio margen de temperaturas, del grado de dopado.

El efecto conjunto de estos dos factores, disminución de la movilidad y aumento de la concentración, se traduce en un aumento de la conductividad con la temperatura ya que, generalmente, el efecto del aumento de concentraciones prevalece sobre la disminución de la movilidad. En la figura 34.2, se representa las curvas  $\sigma(T)$  para un semiconductor extrínseco y para otro intrínseco.

A temperaturas muy bajas, la conductividad es nula en ambos casos, ya que no hay portadores libres: todos los enlaces están saturados y las impurezas no se han ionizado.

A medida que aumenta la temperatura se observa una gran diferencia entre el comportamiento del material intrínseco y el extrínseco. En efecto, un ligero aumento de temperatura supone la ionización de la totalidad de las impurezas del material extrínseco, con lo que se produce un gran incremento de la concentración de portadores y el consiguiente aumento de la conductividad. En el material intrínseco, por el contrario, el incremento de temperatura produce un gradual aumento de la concentración de portadores, debido a la ruptura de enlaces, siendo el crecimiento de la conductividad mucho menor que en un material extrínseco.

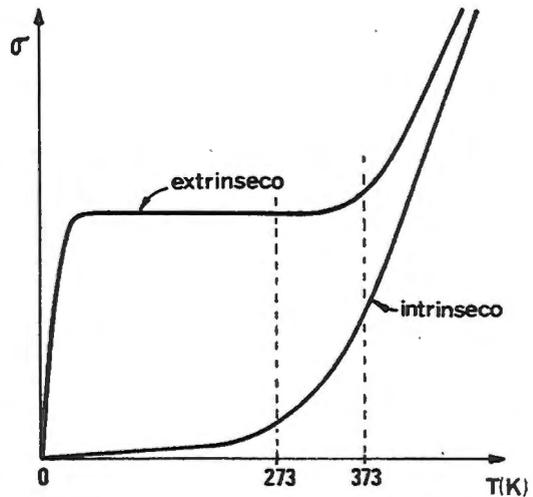


Fig. 34.2

A partir de ciertos valores de la temperatura, del orden de 100 grados C, el número de pares electrón-hueco generados por agitación térmica puede llegar a ser del mismo orden que los producidos por las impurezas. Por tanto, para temperaturas superiores, las diferencias entre las conductividades intrínsecas y extrínsecas se hacen pequeñas, y el material dopado se comporta como un semiconductor intrínseco.

	Ge	Si
$\mu_n$ a 300 K ( $\text{cm}^2 / \text{Vs}$ )	3900	1350
$\mu_p$ a 300 K ( $\text{cm}^2 / \text{Vs}$ )	1820	500
conductividad intrínseca a 300 K ( $\Omega^{-1}\text{cm}^{-1}$ )	0'022	$4'3 \cdot 10^{-6}$
$D_n$ a 300 K ( $\text{cm}^2 / \text{Vs}$ )	100	35
$D_p$ a 300 K ( $\text{cm}^2 / \text{Vs}$ )	48	13
constante dieléctrica relativa $E_r$	16	12

Tabla 34.1 Propiedades eléctricas de Ge y Si

### Ejemplo 34.1

- Calcular la concentración de átomos en el Si.
- Calcular la resistividad del Si intrínseco a 300 K.
- Calcular la resistividad de una muestra de silicio con un dopado de As, a razón de 1 átomo de As por cada  $10^8$  átomos de Si.
- Calcular la resistividad que tendría la muestra de Si si fuese un metal monovalente. (utilícese los datos de la tabla 34.1)

### Solución:

- La concentración de átomos en el Si es

$$N = \text{Concentracion} = N_A \cdot \frac{1}{P_A} \cdot D$$

donde

$$N_A = \text{Número de Avogadro} = 6'02 \cdot 10^{23} \text{ átomos/mol}$$

$$P_A = \text{Peso atómico} = 28'1 \text{ g/mol}$$

$$D = \text{Densidad} = 2'33 \text{ g cm}^{-3}$$

luego

$$N = 6'02 \cdot 10^{23} \cdot \frac{1}{28'1} \cdot 2'33 = 5'00 \cdot 10^{22} \text{ átomos/cm}^3$$

- $\sigma_i = e n_i (\mu_n + \mu_p)$ , sustituyendo valores

$$\sigma_i = 1'6 \cdot 10^{-19} \cdot 1'5 \cdot 10^{10} (1350 + 500) = 4'44 \cdot 10^{-6} (\Omega \text{ cm})^{-1}$$

luego

$$\rho = \frac{1}{\sigma_i} = 2'25 \cdot 10^{+5} \Omega \cdot \text{cm}$$

- c) Si hay 1 átomo de As por cada  $10^8$  átomos de Si se tiene

$$N_D = \frac{N}{10^8} = 5'00 \cdot 10^{14} \text{ átomos/cm}^3$$

por tanto

$$n \approx N_D = 5'00 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$$

$$p = \frac{n_i^2}{n} = 4'5 \cdot 10^5 \text{ cm}^{-3} \ll n$$

luego

$$\sigma \approx qn\mu_n = 1'6 \cdot 10^{19} \cdot 5'0 \cdot 10^{14} \cdot 1350 = 0'108 (\Omega \text{cm})^{-1}$$

luego

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 9'26 \Omega \text{cm}$$

La resistividad ha disminuido 25000 veces por efecto del dopado..

- d) Si el Si fuese un metal monovalente, cada átomo aportaría un electrón libre, con lo que la concentración de electrones sería

$$n = N = 5'0 \cdot 10^{22} \text{ cm}^{-3}$$

y la conductividad sería

$$\bar{\nu} = qn\mu_n = 1'6 \cdot 10^{19} \cdot 5 \cdot 10^{22} \cdot 1350 = 10'8 \cdot 10^6 (\Omega \text{cm})^{-1}$$

$$\rho = \frac{1}{\sigma} = 9'25 \cdot 10^{-8} \Omega \text{ cm}$$

Como puede verse, la conductividad en un metal es muy superior a la de un semiconductor extrínseco. A su vez ésta es mucho mayor que en un semiconductor intrínseco.

### 34.3. Efecto Hall

Supongamos una barra de semiconductor por la que circula una corriente eléctrica de densidad  $\vec{J}$ , tal como se muestra en la figura 34.3. Si se aplica un campo magnético estacionario y uniforme,  $\vec{B}$ , los portadores de carga se verán sometidos a una fuerza  $\vec{F}$  cuyo sentido depende del signo de los portadores y de su velocidad. Así.

$$\vec{F} = q \vec{v}_p \times \vec{B} = q \vec{v}_p B \vec{k} \tag{34.9}$$

para los huecos y

$$\vec{F} = -q \vec{v}_n \times \vec{B} = q \vec{v}_n B \vec{k} \tag{34.10}$$

para los electrones.

Si el semiconductor es tipo p, la práctica totalidad de portadores son huecos y, según la expresión (34.9), se origina una separación espacial de cargas que da lugar a un campo eléctrico transversal  $\vec{E}_H$  como el indicado en la figura 34.3.a.

En un semiconductor tipo n, los portadores minoritarios circulan en sentido opuesto a  $\vec{J}$

por lo que, teniendo en cuenta el signo de dichos portadores, la fuerza que actúa

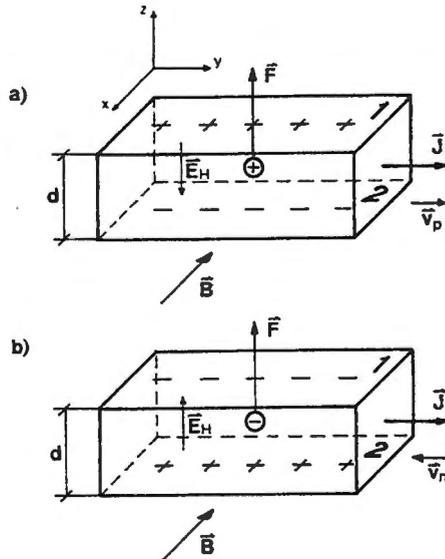


Fig. 34.3

sobre los electrones es la indicada en la figura 34.3.b. También se produce una separación de cargas, pero en sentido contrario al caso anterior, de forma que el campo eléctrico transversal  $\vec{E}_H$  tiene sentido opuesto.

El proceso de separación espacial de cargas continúa hasta que el campo eléctrico transversal crea una fuerza que equilibre a la producida por el campo magnético. Es decir, en el estado estacionario, las fuerzas originadas por  $\vec{E}_H$  y  $\vec{B}$  son iguales, y para el semiconductor tipo p se escribe de la forma.

$$q E_H = q v_p B \quad (34.11)$$

Si la anchura de la muestra es  $d$ , la diferencia de potencial que aparece entre las caras 1 y 2 es del orden de:

$$V_H = E_H d = v_p B d \quad (34.12)$$

donde  $V_H$  recibe el nombre de **tensión de Hall**.

Expresando  $v_p$  en función de la densidad de corriente, según las expresiones (34.1) y (34.3), resulta

$$V_H = \frac{J B d}{q p} = R_H J B d \quad (34.13)$$

donde  $R_H$  recibe el nombre de coeficiente de Hall, y su valor, para el caso de los huecos es

$$R_H = \frac{1}{q p} \quad (34.14)$$

En un semiconductor tipo n, la tensión de Hall es

$$V_H = - \frac{J B d}{q n} = R_H J B d \quad (34.15)$$

donde el signo menos indica que la polaridad de dicha tensión es opuesta a la que aparece en un semiconductor tipo P. El coeficiente de Hall para los electrones es, según (34.15)

$$R = -\frac{1}{qn} \quad (34.16)$$

En definitiva, conociendo el coeficiente de Hall de una muestra semiconductor extrínseca se puede **calcular la concentración de portadores de carga y determinar su signo**. La determinación de  $R_H$  puede efectuarse directamente midiendo la tensión de Hall.

Una vez determinadas la concentraciones de portadores, y conociendo la resistividad de la muestra, puede calcularse la movilidad de los portadores a partir de las expresiones (34.7) y (34.8). Así, para un semiconductor tipo P

$$\sigma = q\mu_p p = \frac{\mu_p}{R_H}$$

luego

$$\mu_p = \sigma R_H \quad (34.17)$$

De forma análoga, para un semiconductor tipo n

$$\mu_n = \sigma |R_H| \quad (34.18)$$

Hay que señalar que en el examen realizado del efecto Hall se han utilizado dos simplificaciones importantes. En primer lugar, se ha descrito el efecto Hall para el caso de semiconductores extrínsecos, en los cuales las corrientes de desplazamiento de los portadores minoritarios son despreciables; el estudio de dicho efecto en un semiconductor intrínseco o muy débilmente dopado exigiría un análisis más minucioso. Por otra parte, no se ha tenido en cuenta la distribución estadística de las velocidades de los portadores. Si se tiene en cuenta dicha distribución, es preciso modificar el coeficiente Hall mediante un factor  $a$ , próximo a la unidad y característico del tipo de semiconductor. Con ello, el coeficiente de Hall queda como

$$R_H = \frac{a}{q p} \text{ para el semiconductor p}$$

y

$$R_H = -\frac{a}{q n} \text{ para el semiconductor n}$$

(34.19)

### 34.4. *Generación y recombinación de cargas*

En el capítulo anterior se han estudiado las ecuaciones, ley de acción de masas y ley de neutralidad eléctrica, que permiten calcular las concentraciones de portadores en equilibrio térmico.

En la situación de equilibrio termodinámico se producen, de forma simultánea, dos procesos: a) La **generación** de pares electrón-hueco, por la ruptura de enlaces covalentes, lo que lleva asociado el salto de un electrón desde la banda de valencia a la conducción y b) La **recombinación**, proceso inverso por el que un electrón libre pasa a ocupar un nivel vacío (hueco) en la banda de valencia, desapareciendo el electrón libre y el hueco. Naturalmente, en una situación de equilibrio, estos dos procesos se compensan por completo, y la concentración de portadores permanece constante.

Designaremos por  $g$  el número de pares electrón huecos generados, y por  $r$ , el número de recombinados en la unidad de volumen del cristal, por unidad de tiempo. Evidentemente, para el estado de equilibrio del semiconductor se cumple la igualdad

$$g = r \tag{34.20}$$

La situación de equilibrio puede romperse si se modifican las velocidades de recombinación o de generación. Así, si se ilumina un semiconductor o se le bombardea con partículas de energía adecuada, la velocidad de generación de pares electrón-hueco será superior a la correspondiente al equilibrio térmico, y las concentraciones de portadores aumentarán, de forma que su producto será superior a la concentración intrínseca correspondiente a la temperatura dada.

En el momento en que deja de actuar la causa que ha provocado el desequilibrio, la recombinación de los pares en exceso determinará un descenso de las concentraciones hasta volver a las correspondientes a la temperatura del cristal.

## Electromagnetismo y semiconductores

---

En esta sección cuantificaremos la variación de concentraciones y estudiaremos su modificación en función del tiempo.

Para ello, supongamos una barra homogénea de semiconductor del tipo  $n$ , por ejemplo, a una temperatura  $T$ . Las concentraciones correspondientes al equilibrio térmico son  $n_0$  y  $p_0$ , verificándose que  $n_0 p_0 = n_i^2(T)$ .

Supongamos ahora que dicha barra se ilumina, uniformemente, con luz de frecuencia suficiente para originar pares electrón hueco. Al cabo de cierto tiempo se habrá alcanzado una nueva situación de equilibrio, siendo  $n_1$  y  $p_1$  las concentraciones de portadores y verificándose que  $n_1 p_1 > n_i^2(T)$ , ya que hay un exceso tanto de huecos como de electrones.

$$\Delta n = n_1 - n_0 \tag{34.21}$$

$$\Delta p = p_1 - p_0$$

Puesto que el exceso de portadores aparece por la ruptura de enlaces covalentes por efecto de la iluminación, es evidente que

$$\Delta n = n_1 - n_0 = p_1 - p_0 = \Delta p \tag{34.22}$$

Ahora bien, como el semiconductor es de tipo  $n$ , la concentración de electrones será, en cualquier caso, muy superior a la de huecos y el porcentaje de electrones libres generados por la iluminación es muy inferior al incremento porcentual de huecos (portadores minoritarios). Es decir

$$\frac{\Delta n}{n} \lll \frac{\Delta p}{p} \tag{34.23}$$

Nos limitaremos, por tanto, a estudiar el comportamiento de los portadores minoritarios.

Admitamos que, una vez alcanzadas las concentraciones  $n_1$  y  $p_1$ , en el instante  $t = 0$ , cesa la iluminación. El exceso de huecos y electrones tenderá a desaparecer, según la ley

$$\frac{dp}{dt} = g - r \quad (34.24)$$

Ahora bien, mediante razonamientos estadísticos puede demostrarse que

$$r = \frac{p}{\tau_p} \quad (34.25)$$

y que, una vez se ha cesado la iluminación,

$$g = g_0 = r_0 = \frac{p_0}{\tau_p} \quad (34.26)$$

por lo que (34.25) se transforma en

$$\frac{dp}{dt} = -\frac{(p - p_0)}{\tau_p} \quad (34.27)$$

$\tau_p$  es la vida media de los huecos ( $\tau_n$  para los electrones) y se define como el tiempo medio transcurrido desde que se genera un hueco (electrón) hasta que se recombina. Equivale al tiempo medio de existencia de los portadores en exceso. La vida media depende del tipo de semiconductor y de su grado de pureza; su valor puede oscilar entre límites muy amplios, desde  $10^{-2}$  s hasta  $10^{-9}$  s.

Integrando (34.27) se obtiene

$$p - p_0 = C e^{-t/\tau_p} \quad (34.28)$$

donde la constante  $C$  puede calcularse teniendo en cuenta que en  $t = 0$   $p = p_1$ . Por tanto

$$p - p_0 = (p_1 - p_0) e^{-t/\tau_p} \quad (34.29)$$

ecuación que queda representada en la figura 34.4. La expresión

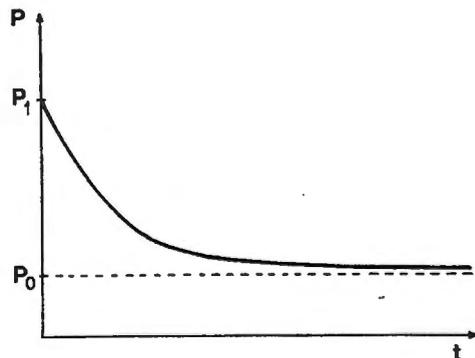


Fig. 34.4

(34.29) indica que el exceso de concentración de los portadores minoritarios ( $\Delta p = p - p_0$ ) decrece exponencialmente a cero, con una constante de tiempo igual a la vida media  $\tau_p$ .

### 34.5. Difusión

En la descripción del mecanismo de la corriente de desplazamiento se ha visto que, en el interior de un semiconductor sobre el que no actúa ningún campo exterior, el movimiento de los portadores es estadísticamente al azar. Cuando se aplica un campo exterior se origina una corriente de desplazamiento cuantificada por el campo de densidades de corriente de desplazamiento, dado por (34.3) bajo el supuesto de que la concentración de portadores es la misma en todos los puntos del semiconductor.

Si la concentración de portadores en el interior de la muestra semiconductor no es uniforme, aparece un gradiente de concentraciones que da lugar a una difusión de portadores desde las zonas de mayor concentración a las de menor concentración, con el correspondiente transporte de cargas.

La densidad de corriente de difusión sigue formalmente la ley de Fick, siendo proporcional al gradiente de concentración, es decir

$$\bar{J}_{nd} = q D_n \nabla n \quad (34.30)$$

$$\bar{J}_{pd} = -q D_p \nabla p \quad (34.31)$$

donde  $D_n$  y  $D_p$  son las constantes de difusión, o difusividades, para los electrones y huecos, respectivamente. Sus dimensiones son

$$[D] = L^2 T^{-1}$$

Si la variación de concentraciones se produce en una sola dirección, la  $x$  por ejemplo, las densidades de corriente de difusión para los electrones y huecos son, respectivamente

$$J_{nd} = q D_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (34.32)$$

$$J_{pd} = -q D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (34.33)$$

Hay que señalar que el movimiento de los portadores es en sentido opuesto al del gradiente de sus concentraciones. En el caso de los huecos, dicho sentido coincide con el de la corriente, mientras que en el caso de los electrones, la densidad de corriente es opuesta a la velocidad de desplazamiento. De ahí la diferencia de signo que aparece en las ecuaciones (34.32) y (34.33).

El fenómeno de difusión se produce mientras exista un gradiente de concentraciones, cesando cuando se establece la homogeneidad de concentraciones en el interior del semiconductor. Es, por tanto, un fenómeno transitorio, tendente a restablecer la uniformidad de concentraciones. Así, si en un punto del semiconductor se genera un exceso de portadores, éstos se difundirán a partir de dicho punto de forma que la concentración tiende a hacerse uniforme en todo el cristal.

Mientras los portadores se difunden pueden recombinarse, desapareciendo. Se denomina longitud de difusión ( $L_p$  para los huecos y  $L_n$  para los electrones) a la distancia media recorrida por los portadores, en el proceso de difusión, hasta su recombinación. La longitud de difusión está relacionada con la constante de difusión y con la vida media de los portadores:

$$\begin{aligned} L_p &= (D_p \tau_p)^{1/2} \\ L_n &= (D_n \tau_n)^{1/2} \end{aligned} \quad (34.34)$$

Por otra parte, parece lógico suponer que las constantes de difusión están relacionadas con las movilidades de los portadores. En efecto, un análisis estadístico del fenómeno de la difusión permite establecer la denominada relación de Einstein

$$\frac{D_n}{\mu_n} = \frac{D_p}{\mu_p} = \frac{KT}{q} = V_T \quad (34.35)$$

donde  $K$  es la constante de Boltzmann y  $T$  la temperatura absoluta.  $V_T$  recibe el nombre de potencial equivalente de temperatura. Su valor a la temperatura ambiente es  $V_T = 0'026$  V.

### 34.6. Densidad de corriente total

En un semiconductor en el que se producen simultáneamente corrientes de desplazamiento (por existencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ ) y de difusión (por existencia de un gradiente de concentraciones), las densidades de corrientes totales vienen dadas, para la dirección  $x$

$$J_{px} = p\mu_p q E_x - q D_p \frac{\partial p}{\partial x} \quad (34.36)$$

$$J_{nx} = n\mu_n q E_x + q D_n \frac{\partial n}{\partial x} \quad (34.37)$$

ecuaciones que, en forma vectorial quedan como

$$\vec{J}_p = p\mu_p q \vec{E} - q D_p \text{grad } p \quad (34.38)$$

$$\vec{J}_n = n\mu_n q \vec{E} + q D_n \text{grad } n$$

### 34.7. Ecuación de continuidad

En las secciones precedentes se han analizado, por separado, los distintos factores que determinan variaciones en las concentraciones de portadores de un semiconductor: corrientes por desplazamiento, por difusión, generación y recombinación de cargas.

En el caso más general todos estos fenómenos coexisten, de forma que las concentraciones de portadores son funciones de las coordenadas y del tiempo, es decir,  $n = n(x,y,z,t)$  y  $p = p(x,y,z,t)$ . Las velocidades de variación de dichas concentraciones pueden ser expresadas mediante la denominada **ecuación de continuidad**, que no es más que la expresión matemática de la ley universal de conservación de cargas eléctricas.

Deduciremos, en primer lugar, la ecuación de continuidad para una muestra unidimensional, generalizando el resultado obtenido al caso tridimensional.

Supongamos un semiconductor en el que la concentración de portadores sólo cambia en la dirección del eje  $x$ , y en el que el campo eléctrico sólo tiene componente en  $x$ . Escojamos en este semiconductor una rebanada como la de la figura 34.5, de longitud  $dx$  y sección  $ds$ .

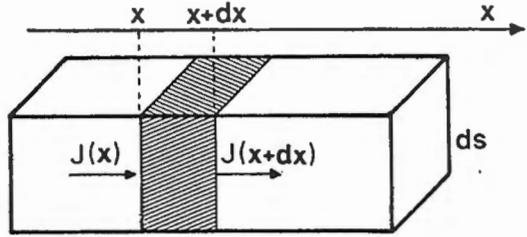


Fig.34.5

El volumen de dicho elemento es  $dv = ds dx$ . Supongamos que en el instante  $t$ , la concentración de huecos es  $p(x, t)$ , entonces, el número de huecos contenidos en el elemento considerado es  $p(x, t) dx ds$ . En el instante  $t + dt$  su cantidad será  $p(x, t + dt) dx ds$ , y la variación del número de huecos en el tiempo  $dt$  es

$$[p(x, t + dt) - p(x, t)] dx ds = \frac{\partial p}{\partial t} dx ds dt \quad (34.39)$$

Esta variación del número de huecos puede ser debida a los procesos de generación, recombinación o corrientes de difusión y de desplazamiento. Repasemos estos procesos.

- a) La variación de portadores debida a la generación es

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_g dx ds dt = (g + g_o) dx ds dt \quad (34.40)$$

donde  $g_o$  es la velocidad de generación de pares electrón-hueco por agitación térmica y  $g$  es la velocidad de generación por causas externas (iluminación, bombardeo con partículas, etc).

- b) La variación de portadores debida a la recombinación es

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_r dx ds dt = -r dx ds dt \quad (34.41)$$

donde  $r$  es la velocidad de recombinación, cuyo valor viene dado por la ecuación (34.25).

Por tanto, la variación total de huecos originada por la generación y recombinación es

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_{g-r} dx ds dt = \left( g + g_o - \frac{p}{\tau_p} \right) dx ds dt \quad (34.42)$$

y, teniendo en cuenta que la tasa de generación térmica  $g_o$  es igual a la de recombinación en el equilibrio termodinámico (ver ecuación 34.26) resulta

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_{g-r} dx ds dt = \left[ g - \frac{p - p_o}{\tau_p} \right] dx ds dt \quad (34.43)$$

- c) La variación del número de huecos puede producirse, también por la entrada y salida de huecos debida a las corrientes de difusión y de desplazamiento. Dicha variación es igual a la diferencia entre los huecos que entran y salen del elemento de volumen

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_J dx ds dt = \frac{1}{q} \left[ J_p(x, t) ds dt - J_p(x + dx, t) ds dt \right] \quad (34.44)$$

y, teniendo en cuenta que

$$J_p(x, t) - J_p(x + dx, t) = \frac{-\partial J_p}{\partial x} dx$$

resulta

$$\left[ \frac{\partial p}{\partial t} \right]_J dx ds dt = -\frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} dx ds dt \quad (34.45)$$

La variación total del número de huecos es

$$\frac{\partial p}{\partial t} dx ds dt = \left[ g - \frac{p - p_o}{\tau_p} - \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} \right] dx ds dt$$

de donde

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g - \frac{p - p_o}{\tau_p} - \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} \quad (34.46)$$

Expresión que constituye la denominada ecuación de continuidad, establecida aquí para los huecos. La ecuación de continuidad para los electrones tomaría la forma

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - \frac{n - n_o}{\tau_p} + \frac{1}{q} \frac{\partial J_n}{\partial x}$$

donde la diferencia de signo del último término aparece debido a que los electrones se mueven en sentido contrario a la densidad de corriente.

Si las concentraciones de portadores de carga son funciones de las coordenadas (x,y,z), entonces las ecuaciones de continuidad se escriben como

$$\frac{\partial p}{\partial t} = g - \frac{p - p_o}{\tau_p} - \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{J}_p \quad (34.47)$$

$$\frac{\partial n}{\partial t} = g - \frac{n - n_o}{\tau_p} + \frac{1}{q} \operatorname{div} \bar{J}_n \quad (34.48)$$

Hay que señalar que el término  $g$  sólo debe tenerse en cuenta en aquellos puntos en los que se produzca una generación por causas **distintas** a las agitación térmica; en caso contrario será eliminado.

Las densidades de corriente,  $J_p$  y  $J_n$ , que aparecen en la ecuación de continuidad vienen dadas por las ecuaciones (34.36) y (34.37). Obsérvese que dichas corrientes pueden deberse a la difusión o al desplazamiento. Precisemos algunas cuestiones relativas a cada tipo de corriente.

Si el semiconductor es extrínseco, tipo  $n$  por ejemplo, la concentración de portadores minoritarios, huecos, es muy pequeña frente a la de mayoritarios. En general, la corriente de desplazamiento de portadores minoritarios serán muy pequeñas (salvo en el caso de grandes campos aplicados) frente a la corriente de difusión. Por tanto, en un semiconductor extrínseco, la densidad de corriente de los portadores minoritarios se debe, fundamentalmente, a la difusión y el efecto de desplazamiento puede ser despreciado.

En el caso de los portadores mayoritarios, se producirán tanto corrientes de difusión como de desplazamiento. Ahora bien, la aparición de una corriente de desplazamiento exige la existencia de un campo eléctrico  $\vec{E}$ . Dicho campo puede ser un campo exterior aplicado o puede originarse como consecuencia de una separación de cargas en el interior del semiconductor, con la correspondiente aparición de una densidad volumétrica de carga. Por ejemplo, si en un semiconductor tipo  $n$  se generan un exceso de electrones y huecos en un punto, éstos se difundirán por el cristal a partir del mismo. Puesto que, en general, las difusividades de los electrones y huecos son distintas, es de esperar que se produzca una separación de cargas, alterándose la neutralidad eléctrica y originándose una distribución volumétrica de cargas de densidad.

$$\rho = (N_D + p - n)q \quad (34.49)$$

El campo eléctrico en el interior de tal semiconductor deberá verificar la ecuación de Poisson

$$\text{div } \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} = \frac{(N_D + p - n)q}{\epsilon} \quad (34.50)$$

Ecuación que, junto con las (34.47) y (34.48) permite determinar, de forma exacta, las concentraciones de portadores en función de las coordenadas y del tiempo.

No obstante, en la mayor parte de problemas que se van a tratar en este texto, podrá efectuarse una simplificación importante. Así, aún cuando la existencia de un campo eléctrico en el semiconductor exige la aparición de una densidad volumétrica de carga dada por (34.49), ésta es muy pequeña incluso frente a la densidad de carga asociada a los portadores minoritarios, es decir, para el semiconductor  $n$

$$N_D + p - n \ll p \ll n \quad (34.51)$$

por lo que, a efectos de determinar la concentración de portadores mayoritarios puede considerarse que

$$N_D + p - n \approx 0 \quad (34.52)$$

sin que se produzcan errores importantes. El significado de estas consideraciones quedará ilustrado claramente en las aplicaciones que se desarrollan a continuación.

### 34.8 Inyección de carga de portadores minoritarios

Como aplicación de la ecuación de continuidad estudiaremos la variación de la concentración de portadores minoritarios a lo largo de una dirección en un semiconductor uniformemente dopado con impurezas donadoras.

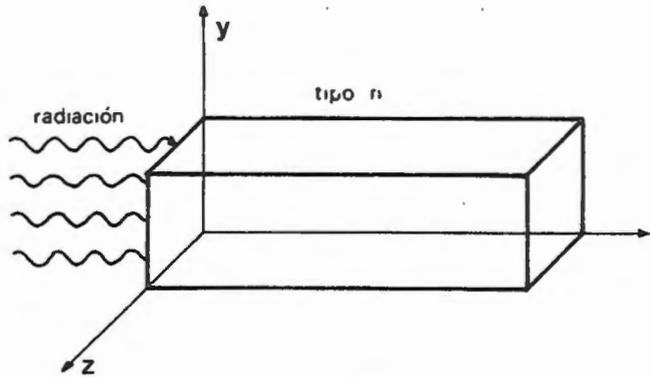


Fig. 34.6

Sea el semiconductor representado en la figura 34.6, sobre el que incide, de forma continua radiación en su cara  $x = 0$ . Denominaremos  $n_0$  y  $p_0$  a las concentraciones de electrones y huecos correspondientes al equilibrio térmico, con  $n_0 \gg p_0$ , ya que se trata de un semiconductor tipo n.

Al incidir la luz en la cara  $x = 0$  se generarán, de forma continua, un exceso de huecos y electrones en dicha cara, exceso que se difundirá a lo largo de la barra. Al cabo de cierto tiempo, se habrá establecido un régimen estacionario, en el cual las concentraciones de portadores y corrientes son independientes del tiempo.

Llamaremos  $n_1$  y  $p_1$  a las concentraciones de portadores correspondientes a la cara iluminada ( $x = 0$ ) y  $n$  y  $p$  a las correspondientes a una abscisa cualquiera  $x$ .

El exceso de concentraciones de portadores con respecto a las de equilibrio térmico es

$$p' = p - p_0 \quad \text{Para los huecos}$$

$$n' = n - n_0 \quad \text{Para los electrones}$$

Supondremos, de ahora en adelante, que el exceso de concentraciones de portadores es pequeño frente a la concentración de portadores mayoritarios, es decir  $p' \ll n$  y  $n' \ll n$ .

Si planteamos la ecuación de continuidad para los portadores minoritarios, resulta

$$0 = -\frac{p - p_0}{\tau_p} - \frac{1}{q} \frac{\partial J_p}{\partial x} \quad (34.53)$$

Despreciando la corriente de desplazamiento de huecos (por ser éstos los portadores minoritarios) y teniendo en cuenta la expresión (34.33), la ecuación (34.53) se puede escribir como

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{p - p_0}{\tau_p D_p} \quad (34.54)$$

y, a partir de la definición de longitud de difusión (34.34), resulta

$$\frac{d^2 p}{dx^2} = \frac{p - p_0}{L_p^2}$$

o bien, en función del incremento  $p'$

$$\frac{d^2 p'}{dx^2} = \frac{p'}{L_p^2} \quad (34.55)$$

La solución de esta ecuación es

$$p' = C_1 e^{-x/L_p} + C_2 e^{x/L_p} \quad (34.56)$$

donde  $C_1$  y  $C_2$  son constantes de integración cuyos valores se obtienen aplicando las condiciones de contorno del problema.

Así

$$\text{Para } x=0 \rightarrow p' = p_1 - p_0 \quad \rightarrow C_1 + C_2 = p_1 - p_0$$

$$\text{Para } x \rightarrow \infty \rightarrow p' \text{ debe ser finito} \rightarrow C_2 = 0$$

valores que sustituidos en (34.56) dan la distribución del exceso de huecos (huecos inyectados)

$$p' = p(x) - p_0 = (p_1 - p_0) e^{-x/L_p} \quad (34.57)$$

ecuación que queda representada en la figura 34.7. Como puede observarse, el exceso de huecos decrece exponencialmente, siendo  $L_p$  la distancia dentro del semiconductor a la que la concentración inyectable disminuye a  $1/e$  de su valor máximo ( $x = 0$ ).

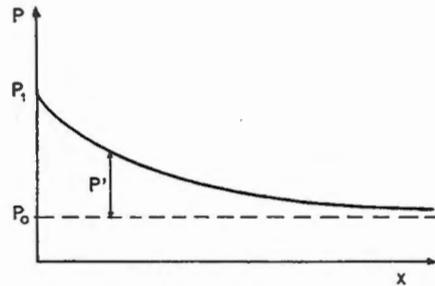


Fig. 34.7

Una vez obtenida la distribución de la concentración de huecos a lo largo del eje  $x$ , pasaremos a calcular las densidades de corriente en el semiconductor. Así, a partir de (34.57) se obtiene que la corriente de difusión de huecos es

$$J_p = -q D_p \frac{\partial p}{\partial x} = -q D_p \frac{\partial p'}{\partial x} = \frac{q D_p}{L_p} [p_1 - p_0] e^{-x/L_p} \quad (34.58)$$

corriente que disminuye exponencialmente, de forma similar a la concentración de portadores minoritarios.

La corriente de difusión de electrones viene determinada por

$$J_n = q D_n \frac{\partial n}{\partial x} = q D_n \frac{\partial n'}{\partial x} \quad (34.59)$$

y, admitiendo que  $p' \approx n'$  (ver expresión 34.51), entonces

$$\frac{\partial p'}{\partial x} \approx \frac{\partial n'}{\partial x}$$

con lo que la ecuación (34.59) queda como

$$J_n = q D_p \frac{\partial p'}{\partial x} = - \frac{D_n}{D_p} J_p \quad (34.60)$$

Por otra parte, la corriente de desplazamiento puede determinarse teniendo en cuenta que la barra es un circuito abierto y que, por tanto, la corriente total ha de ser nula, es decir

$$J_p + J_n + J_{nd} = 0$$

donde  $J_{nd}$  es la densidad de corriente de desplazamiento de los electrones. Despejando  $J_{nd}$  resulta

$$J_{nd} = -(J_p + J_n) = \left( \frac{D_n}{D_p} - 1 \right) J_p \quad (34.61)$$

ya que se ha supuesto despreciable la corriente de desplazamiento de portadores minoritarios.

### ***34.9. Variación del potencial en un semiconductor con dopado no uniforme***

Consideremos un semiconductor como el de la figura 34.8, en el cual la concentración de portadores, huecos por ejemplo, es una función de  $x$ . Esto puede conseguirse mediante un drogado no uniforme a lo largo de la dirección  $x$ .

En régimen estacionario no hay movimiento neto de portadores, ya que la variación de la concentración de los mismos no aparece por efecto de la inyección desde una fuente exterior, como en el caso precedente, sino como consecuencia de un drogado no uniforme. Por tanto, la corriente de difusión de huecos, que debe producirse por efecto del gradiente de concentraciones, se compensará con una corriente de desplazamiento de huecos, lo que exige la presencia de un campo eléctrico interior y, por consiguiente, una variación de potencial a lo largo de la barra semiconductora, variación que calcularemos a continuación.

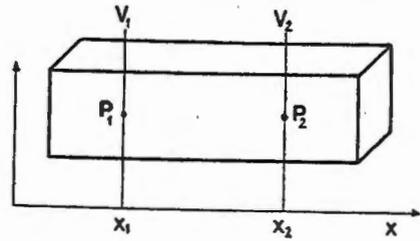


Fig. 34.8

Para ello si en la ecuación (34.36) se hace  $J_p = 0$ , resulta

$$0 = p\mu_p q E - q D_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

y sustituyendo  $D_p$  por su valor obtenido en la relación de Einstein, es

$$0 = p\mu_p q E - q \frac{KT}{q} \mu_p \frac{\partial p}{\partial x}$$

de donde

$$E = \frac{KT}{qp} \frac{\partial p}{\partial x}$$

y, al ser  $p = p(x)$  (régimen estacionario)

$$E = \frac{KT}{qp} \frac{dp}{dx} \tag{34.62}$$

Por otra parte, como el campo es  $E = -\partial V / \partial x$ , y también es sólo función de  $x$ , se puede escribir

$$\frac{dV}{dx} = -\frac{KT}{q} \frac{dp}{dx}$$

o bien

$$-dV = \frac{KT}{q} \frac{dp}{p}$$

que al integrar entre dos puntos cualesquiera,  $x_1$   $x_2$  resulta

$$V_2 - V_1 = \frac{KT}{q} \ln \frac{p_1}{p_2} = V_T \ln \frac{p_1}{p_2} \quad (34.63)$$

lo que pone de manifiesto que la diferencia de potencial entre dos puntos del semiconductor sólo depende de las concentraciones de los huecos en estos puntos.

Un estudio similar podría efectuarse para los electrones. Partiendo de la condición de  $J_n = 0$ , se llegaría a la expresión

$$V_2 - V_1 = \frac{KT}{q} \ln \frac{n_2}{n_1} = V_T \ln \frac{n_2}{n_1} \quad (34.64)$$

Por otra parte, las ecuaciones (34.63) y (34.64) pueden ser escritas como

$$p_1 = p_2 e^{(V_2 - V_1)/V_T} \quad (34.65)$$

y

$$n_1 = n_2 e^{-(V_2 - V_1)/V_T} \quad (34.66)$$

expresiones que permiten obtener la relación entre las concentraciones de portadores en dos puntos, en función de la ddp existente entre ellos.

Las ecuaciones (34.63) a (34.66) serán utilizadas en el estudio de la unión p-n.

## PROBLEMAS

- P.34.1. Considérese una muestra de Ge intrínseco, a 300 K. Suponiendo que la movilidad de los portadores es independiente de la temperatura, calcular el porcentaje de aumento de la conductividad por grado de incremento de la temperatura.

### SOLUCIÓN

$$\frac{\Delta\sigma}{\sigma} = \eta = 5'5\% \text{ por grado}$$

- P.34.2. En un material semiconductor las movilidades de los electrones y huecos son  $\mu_n$  y  $\mu_p$ , respectivamente, con  $\mu_n > \mu_p$ . Admitiendo que la temperatura permanece constante, así como las movilidades:

- a) Demostrar que el valor mínimo de la conductividad es

$$\sigma_{\min} = 2\sigma_i(\mu_n \mu_p)^{1/2} / (\mu_n + \mu_p)$$

- b) Calcular las concentraciones de portadores que hacen mínima la conductividad.  
 c) Calcular la concentración de dopado aceptor necesario para obtener  $\sigma_{\min}$ .

### SOLUCIÓN

b)  $p = n_i(\mu_n / \mu_p)^{1/2}; \quad n = n_i(\mu_p / \mu_n)^{1/2}$

c)  $N_A = n_i \left( \frac{\mu_n - \mu_p}{\mu_p} \right) \left( \frac{\mu_p}{\mu_n} \right)^{1/2}$

P.34.3. Una barra de germanio tipo n tiene una sección de  $5 \text{ mm}^2$  y una longitud de  $0.5 \text{ cm}$ . Sabiendo que la concentración de impurezas donadoras es  $N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  ( $T = 300 \text{ K}$ )

- Calcular la resistencia de la barra.
- Calcular la velocidad de desplazamiento de los electrones si se establece, entre los extremos de la barra, una ddp de  $0.5 \text{ V}$ .

### SOLUCIÓN

- $R = 16.03 \Omega$
- $v = 39 \text{ m/s}$

P.34.4. Una barra de semiconductor tipo p, de anchura  $d = 10 \text{ mm}$ , y longitud  $l = 50 \text{ mm}$  se sitúa en un campo magnético transversal a la misma, de inducción  $B = 0.5 \text{ T}$ . La diferencia de potencial aplicada en los extremos de la barra es  $V = 10 \text{ V}$ , y la tensión de Hall obtenida es  $V_H = 50 \text{ mV}$ . Sabiendo que la resistividad del semiconductor es  $\rho = 2.5 \Omega \text{ cm}$ , calcular la concentración de huecos y su movilidad.

### SOLUCIÓN

$$p = 5 \cdot 10^{15} \text{ cm}^{-3}$$

$$\mu_p = 0.05 \text{ m}^2 / \text{Vs}$$

P.34.5. La resistividad de cierto semiconductor intrínseco vale  $\rho_0 = 100 \Omega \text{ cm}$ , a la temperatura ambiente. Cuando dicho semiconductor se ilumina uniformemente la resistividad pasa a valer  $\rho_1 = 50 \Omega \text{ cm}$ . Pasado un tiempo  $t = 0.01 \text{ s}$ , después de apagar la fuente luminosa, la resistividad es

$\rho = 75 \Omega \text{ cm}$ . Calcular la vida media de los electrones y huecos. (Nota: en un semiconductor intrínseco  $\tau_n = \tau_p$ ).

**SOLUCIÓN**

$$\tau_n = \tau_p = 9'1 \text{ ms}$$

P.34.6. Una barra de germanio tipo n se ilumina uniformemente, de forma que, en el equilibrio, las concentraciones de portadores son  $n_1$  y  $p_1$  ( $n_0$  y  $p_0$  son las concentraciones de portadores cuando no hay iluminación). Una vez se suprime la iluminación, la concentración de portadores minoritarios decrece esponencialmente, según la ecuación 34.29.

Demostrar que  $\tau_p$  representa el tiempo medio de existencia de los portadores en exceso.

P.34.7. Dado el semiconductor de la figura 34.6, en el que inyectan portadores minoritarios, demostrar que la diferencia máxima entre las concentraciones de huecos y electrones inyectados,  $p'$  y  $n'$ , es del orden de

$$|p' - n'| \approx \frac{\epsilon}{\sigma \tau_p} \left( \frac{D_n}{D_p} - 1 \right) (p_1 - p_0)$$

donde  $\sigma$  es la conductividad de la muestra y  $\epsilon$  su permitividad eléctrica.

Sabiendo que el semiconductor es Ge tipo n, con una conductividad  $\sigma = 2 \cdot 10^3 (\Omega\text{m})$  y una vida media de los huecos  $\tau_p = 10^{-6} \text{ s}$ , comprobar que  $|p' - n'| \ll p'$ . (Tómese  $\epsilon_r = 15'7$ )

*SOLUCIÓN*

$$\text{b) } \left| \frac{p' - n'}{p'} \right| \approx 7'5 \cdot 10^{-8}$$

- P.34.8. Dada la situación expuesta en el problema anterior, demostrar que  $L_p$  representa la distancia media recorrida por los huecos inyectados antes de que se recombinen con los electrones.

## CAPÍTULO 35

### EL DIODO DE UNIÓN

#### *35.1. Introducción*

El diodo de unión p-n consiste en un semiconductor que posee una región de tipo n y otra de tipo p, separadas por una región muy estrecha (del orden de  $10^{-6}$  a  $10^{-4}$  cm).

El comportamiento eléctrico de este tipo de unión es completamente diferente al de los materiales p o n de que está formada ya que, mientras éstos conducen igualmente en ambas direcciones, una unión p-n conduce en una sola dirección, como veremos más adelante.

El estudio de este tipo es de capital importancia puesto que la mayor parte de los dispositivos electrónicos (transistores, diodos rectificadores, diodos túnel, tiristores, etc.) basan su comportamiento en los fenómenos de conducción que se producen en las uniones p-n que los constituyen.

#### *35.2. La unión p-n en circuito abierto*

Con vistas a estudiar el comportamiento físico de los diodos de unión partiremos de un modelo de unión p-n constituida por un cristal semiconductor en el que se han formado sendas zonas tipo p y tipo n, separadas por una zona de transición de espesor despreciable. Dicha unión recibe el nombre de unión abrupta.

Así mismo, supondremos que la zona de separación es plana y transversal al cristal, de forma que tanto las corrientes de portadores como las variaciones en sus concentraciones se producen en la dirección longitudinal. Se trata, pues de un modelo unidimensional.

Denominaremos  $N_A$  y  $N_D$  a las concentraciones de impurezasceptoras de la zona p y donadoras de la zona n, respectivamente. Puesto que el cristal se encuentra en equilibrio térmico, y admitiendo que todas las impurezas están ionizadas, las concentraciones de portadores en puntos alejados de la unión serán las siguientes:

- a) Zona p. La concentración de portadores mayoritarios es aproximadamente igual a la de impurezasceptoras, mientras que la de portadores minoritarios (electrones) vendría dada por la ley de acción de masas. En definitiva

$$p_{po} \approx N_A \tag{35.1}$$
$$n_{po} \approx \frac{n_i^2}{N_A}$$

- b) Zona n. De forma análoga, las concentraciones de portadores en la zona tipo n es

$$n_{no} \approx N_D \tag{35.2}$$
$$p_{no} \approx \frac{n_i^2}{N_D}$$

donde los subíndices no y po significan concentraciones en las zonas p y n respectivamente.

Evidentemente, la concentración de huecos es mucho mayor en la zona p (donde son mayoritarios) que en la zona n (donde son minoritarios). Por tanto, aparece un gradiente de concentraciones que da lugar a una corriente de difusión de huecos desde la zona p a la zona n. Del mismo modo, se produce una corriente de difusión de electrones desde la zona n a la zona p.

Los huecos difundidos hacia la zona n se recombinan con los electrones allí existentes, y viceversa, de forma que en las proximidades de la unión la concentración de portadores es muy baja. Puesto que en esta zona hay iones fijos, impurezas ionizadas, aparecerá una densidad volumétrica de carga que será positiva en el lado n de la unión y negativa en el lado p (Fig. 35.1.c).

La zona donde aparece carga volumétrica se denomina zona de transición o de carga espacial. Su anchura a ambos lados de la unión, así como la densidad de carga, dependen de la forma en que se ha drogado cada parte. En el caso de una unión abrupta, la densidad volumétrica de carga tiene la forma mostrada en la figura 35.1.c, cuyo valor en cada zona viene determinado por la densidad de impurezas (al ser  $n$  y  $p$  despreciables frente a  $N_D$  y  $N_A$ ). Así, en la zona  $p$  de la región de transición

$$\rho \approx -q N_A \quad (35.3)$$

y en la zona  $n$

$$\rho \approx +q N_D \quad (35.4)$$

Esta distribución dipolar de las cargas en la zona de transición origina un campo eléctrico,  $\vec{E}$ , delimitado en la citada zona y dirigido de la parte  $n$  a la  $p$  (Fig. 35.1.d), que da lugar a corrientes de desplazamiento que se oponen a las de difusión antes descritas.

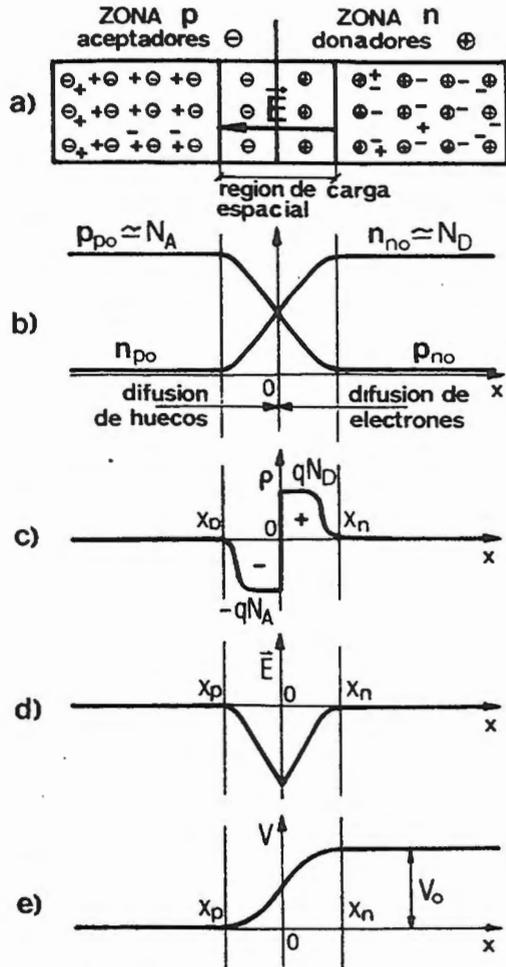


Fig. 35.1.

En la situación de equilibrio, el flujo neto de electrones y huecos a través de la unión es nulo, de forma que las corrientes de difusión son compensadas exactamente por las corrientes de desplazamiento debidas al campo  $\vec{E}$ .

La relación entre el campo  $\vec{E}$  y la densidad de carga en la región de transición viene dada por la ecuación de Poisson que, aplicada al modelo unidimensional, tomaría la forma

$$\frac{dE}{dx} = \frac{\rho}{\epsilon} \quad (35.5)$$

Por lo que el campo vendrá dado por la integral

$$E(x) = \int_{-x_p}^x \frac{\rho}{\epsilon} dx \quad (35.6)$$

con  $E(x_p) = 0$  y  $E(x_n) = 0$ , donde  $x_n$  y  $-x_p$  son los límites de la zona de transición.

Finalmente, el potencial en la zona de transición se obtiene teniendo en cuenta que  $E = -dV/dx$ , con lo que

$$V(x) = -\int_{-x_p}^x E dx \quad (35.7)$$

cuya representación queda reflejada en la figura 35.1.e. La diferencia de potencial entre los extremos de la zona de transición,  $V_o = V(x_n) - V(-x_p)$  se denomina potencial de contacto y su valor depende de la concentración de dopado en cada lado de la unión.

La determinación de potencial de contacto puede realizarse aplicando las expresiones (34.63) o (34.64), de la ddp en dos puntos de un semiconductor con dopado no uniforme. Así, particularizando dichas ecuaciones al caso que nos ocupa

$$V_o = \frac{KT}{q} \ln \frac{p_{po}}{p_{no}} \quad (35.8)$$

$$V_o = \frac{KT}{q} \ln \frac{n_{no}}{n_{po}}$$

pero, teniendo en cuenta las ecuaciones (35.1) y (35.2) resulta

$$V_o = \frac{KT}{q} \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \quad (35.9)$$

o bien

$$V_o = V_T \ln \frac{N_A N_D}{n_i^2} \quad (35.10)$$

Es importante destacar que el potencial de contacto no genera tensión capaz de producir corriente, sino que constituye una barrera de potencial que se opone a la difusión de los portadores mayoritarios. Su valor suele ser unas décimas de voltio, pero como la anchura de la zona de transición es muy pequeña (del orden de  $10^{-7}$  m), el campo eléctrico asociado es muy elevado.

**Nota complementaria 35.1.**  
**Cálculo aproximado de la anchura de zona de transición y del campo eléctrico en una unión p-n**

Con vistas a clarificar los conceptos antes expuestos pasaremos a realizar un estudio cuantitativo de una unión p-n abrupta. Para ello utilizaremos la importante simplificación de que en la zona de transición la concentración de portadores es despreciable frente a la de impurezas. Es decir, las densidades de carga en la zona de transición son las que se muestran en la figura 35.2;

$$\rho = -qN_A \text{ para } -x_p \leq x \leq 0$$

$$\rho = qN_D \text{ para } 0 \leq x \leq x_n$$

donde  $-x_p$  y  $x_n$  son las abscisas correspondientes a los límites de la zona de transición. La anchura de dicha zona es  $l = x_p + x_n$ .

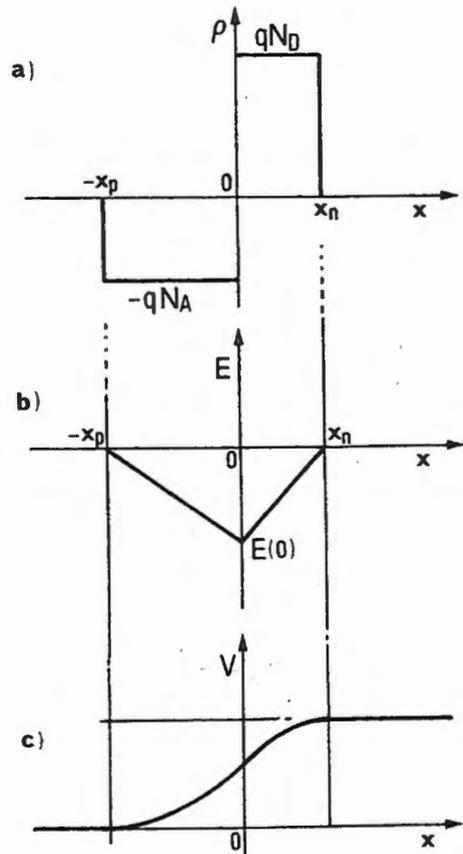


Fig. 35.2

Aplicando la ecuación de Poisson a la región p de la zona de transición e integrando, se obtiene el campo eléctrico

$$E_1 = \frac{q N_A}{\epsilon} x + C_1 \quad \text{para } -x_p \leq x \leq 0 \quad (35.11)$$

Del mismo modo, para la región n el campo vale

$$E_2 = \frac{q N_D}{\epsilon} x + C_2 \quad \text{para } 0 \leq x \leq x_n \quad (35.12)$$

Las constantes de integración se calculan a partir de las siguientes condiciones de contorno

$$\text{a) } E_1(-x_p) = 0 \rightarrow C_1 = -\frac{q N_A}{\epsilon} x_p$$

$$\text{b) } E_2(x_n) = 0 \rightarrow C_2 = -\frac{q N_D}{\epsilon} x_n$$

Valores que sustituidos en (35.11) y (35.12) permiten obtener el campo eléctrico, una vez conocidos  $x_n$  y  $x_p$ .

Por otra parte, es evidente que

$$E_1(0) = E_2(0)$$

de donde

$$E(0) = -\frac{q N_A}{\epsilon} x_p = -\frac{q N_D}{\epsilon} x_n \quad (35.13)$$

es decir

$$N_A x_p = N_D x_n \quad (35.14)$$

La expresión (35.14) muestra que el campo eléctrico penetra en cada zona una longitud inversamente proporcional al drogado de dicha zona. La figura 35.2.b, muestra la variación del campo en la zona de transición.

La altura de la barrera de potencial es

$$V_0 = -\int_{-x_p}^{x_n} E dx$$

valor igual al área, cambiada de signo, del triángulo de la figura 35.2.b.

$$V_o = -\frac{1}{2}E(0)l \quad (35.15)$$

donde

$$l = x_n + x_p \quad (35.16)$$

Teniendo en cuenta el valor de  $E(0)$  dado por (35.13) puede despejarse la anchura  $l$  de la zona de transición

$$l = \left[ \frac{2\varepsilon}{q} V_o \left( \frac{1}{N_A} + \frac{1}{N_D} \right) \right]^{1/2} \quad (35.17)$$

y, sustituyendo (35.15) en (35.17) y operando

$$E(0) = - \left[ \frac{2q}{\varepsilon} V_o \left( \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \right) \right]^{1/2} \quad (35.18)$$

Finalmente, las anchuras de las zonas tipo  $p$  y tipo  $n$  de la región de transición se obtienen a partir de las ecuaciones (35.14) y (35.16)

$$x_p = l \frac{N_D}{N_A + N_D} \quad (35.19)$$

$$x_n = l \frac{N_A}{N_A + N_D} \quad (35.20)$$

### Aplicación numérica

Consideremos un diodo de germanio, con las siguientes concentraciones de dopado

$$N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3} = 10^{21} \text{ m}^{-3}$$

$$N_D = 5 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3} = 4 \cdot 10^{20} \text{ m}^{-3}$$

A partir de los datos de la tabla 33.1, calcularemos

- a) Potencial de contacto.
- b) Anchura de la zona de transición.
- c) Valor máximo del campo eléctrico en la zona de transición.

Resolución:

El potencial de contacto  $V_0$  viene dado por la expresión (35.9)

$$V_0 = 0'17 \text{ V}$$

Aplicando la expresión (35.17) se obtiene la anchura de la zona de transición

$$l = 1'01 \cdot 10^{-6} \text{ m}$$

Y, a partir de las expresiones (35.20) y (35.21)

$$x_p = 3'3 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

$$x_n = 6'7 \cdot 10^{-7} \text{ m}$$

El campo eléctrico máximo es el correspondiente a  $x = 0$ , y viene dado por (35.18)

$$E(0) = -2'4 \cdot 10^5 \text{ V / m}$$

Como puede verse, el orden de magnitud de los valores obtenidos coincide con las suposiciones hechas anteriormente: potencial de contacto de unas décimas de voltio, zona de transición muy delgada y campo eléctrico muy intenso.

### ***35.3. La unión p-n como rectificador***

La unión p-n constituye un dispositivo rectificador, es decir, permite el flujo fácil de cargas en una dirección, pero se opone al paso de corriente en dirección

opuesta. En esta sección analizaremos de forma cualitativa el comportamiento rectificador del diodo, estudiando el efecto que produce una tensión de polarización aplicada sobre la unión.

Para aplicar dicha tensión es necesario conectar las zonas p y n del diodo a un circuito, lo que exige efectuar contactos metal semiconductor (Fig. 35.3). De ahora en adelante supondremos que dichos contactos se han realizado de modo que las superficies metálicas son normales a la dirección de las corrientes de portadores, al objeto de mantener nuestra hipótesis inicial de diodo unidimensional. Así mismo, supondremos que la caída de potencial electrostático que aparece en la unión metal semiconductor es independiente de la intensidad y sentido de la corriente. Un contacto de este tipo se denomina **óhmico**.

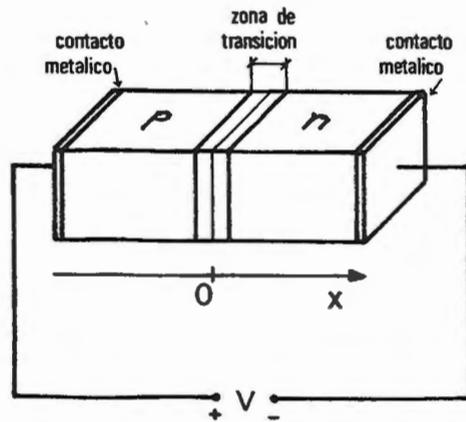


Fig. 35.3

Al aplicar la tensión  $V$ , el equilibrio existente en la región de transición se rompe, apareciendo corrientes cuya magnitud y sentido dependen del signo de la tensión. Estudiemos cada caso por separado.

### 35.3.1. Polarización inversa

Si la tensión aplicada al diodo es como la mostrada en la figura 35.4, de forma que el polo negativo de la pila está conectado a la zona p y el positivo a la zona n, se dice que la polarización es **inversa**. Una polarización inversa da lugar a una serie de fenómenos que llevan a la unión p-n a comportarse de forma que bloquea el paso de la corriente.

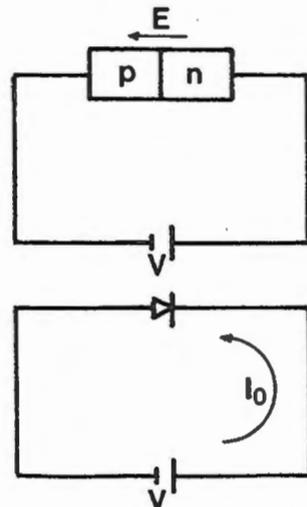


Fig. 35.4

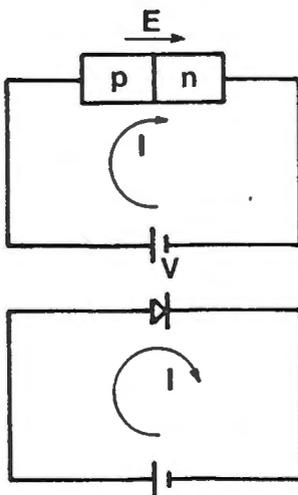
Así, el campo eléctrico creado por la tensión  $V$  es del mismo sentido que el originado internamente en la zona de transición, por lo que el campo resultante es mayor que el existente en la unión no polarizada.

El resultado de este incremento del campo es que los huecos son desplazados hacia la izquierda (zona  $p$ ) y los electrones hacia la derecha (zona  $n$ ) de forma que la zona de transición se hace más ancha y menos conductora (al disminuir la concentración de portadores).

Por otra parte, la distribución volumétrica de carga se modifica, de modo que la barrera de potencial crece hasta un valor

$$V' = V_0 + V$$

El efecto del aumento de la barrera de potencial es que las corrientes de difusión de huecos de la zona  $p$  a la  $n$  y de electrones de la zona  $n$  a la  $p$  disminuyen hasta hacerse prácticamente despreciables. No obstante, aparece una pequeña intensidad de corriente  $I_0$ , denominada corriente inversa de saturación, debida al desplazamiento de los portadores minoritarios. En efecto, los pocos huecos generados por agitación térmica en la zona  $n$  y los electrones de la zona  $p$  pueden atravesar la unión, ya que la altura de la barrera no impide su paso.



**Fig. 35.5**

La corriente inversa de saturación depende de la concentración de portadores minoritarios y, por tanto, su valor se ve muy influido por la temperatura.

**35.3..2. Polarización directa**

Si la tensión aplicada es como la mostrada en la figura 35.5, entonces la polarización es directa.

En la polarización directa, el campo creado por la tensión  $V$  tiene sentido contrario al originado internamente. Por tanto, se produce una modificación en las densidades de carga de la zona de transición, haciéndose ésta más estrecha y disminuyendo la altura de la barrera de potencial hasta el valor

$$V' = V_0 - V$$

Al ser más pequeña la barrera de potencial, se produce un gran incremento del flujo, por difusión de los portadores mayoritarios hacia la unión. Así, los huecos atraviesan la unión desde la zona p a la n, lo que constituye una inyección de portadores minoritarios. De forma parecida, los electrones pasan de la zona n a la p. Puesto que las cargas de huecos y electrones son opuestas, este flujo de portadores en sentidos opuestos da lugar a una corriente eléctrica en el mismo sentido. En definitiva, la corriente total será la suma de las corrientes de portadores inyectados.

### 35.4. Corrientes de electrones y huecos en un diodo de unión

Para completar el análisis cualitativo de la unión p-n antes realizado, en este apartado obtendremos los valores de las corrientes de portadores correspondientes a cada tipo de polarización, estableciendo la expresión matemática que relaciona la intensidad con la tensión aplicada.

El camino que seguiremos para ello es calcular la distribución de portadores de carga a ambos lados fuera de la zona de transición, determinando posteriormente las corrientes de difusión originadas por la variación espacial de dichas concentraciones.

La figura 35.6, muestra las concentraciones de portadores a ambos lados de la zona de transición. La escala de las  $x$  está tomada de forma que el espesor de la zona de transición es despreciable.

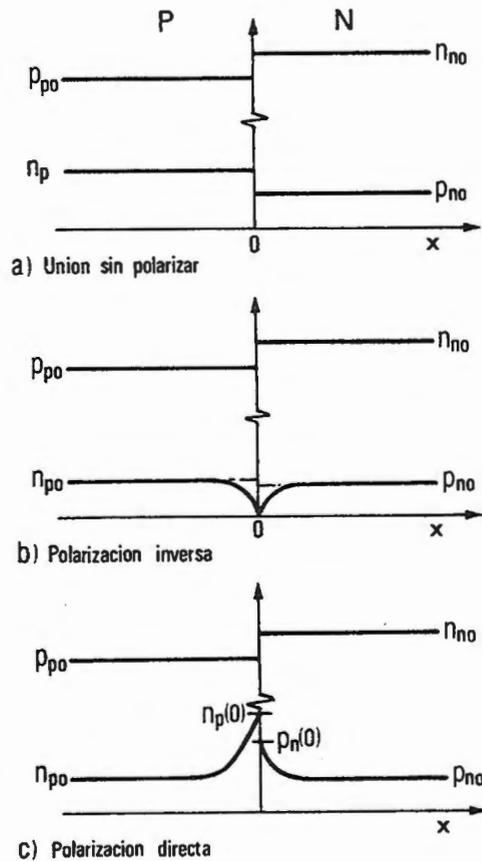


Fig. 35.6

En la unión sin polarizar (gráfica a) el flujo neto de portadores es nulo, ya que las corrientes de difusión y de desplazamiento se compensan exactamente. Las concentraciones de portadores no dependen de la distancia y sus valores son los correspondientes al equilibrio térmico.

La relación entre concentraciones de huecos o electrones a ambos lados de la unión viene dada por las expresiones (35.1) y (35.2), y su relación con el potencial de contacto por la (35.8), que pueden ser escritas como

$$p_{po} = p_{no} e^{V_0/V_T} \quad (35.22)$$

$$n_{po} = n_{no} e^{-V_0/V_T} \quad (35.23)$$

En una unión polarizada el equilibrio entre corrientes de difusión y desplazamiento se altera, por lo que, en las proximidades del borde de la zona de transición ( $x = 0$ , en las gráficas de la figura 35.6), las concentraciones de electrones y huecos se modifican con respecto a las existentes en el estado de equilibrio. Obsérvese que esta modificación afecta fundamentalmente a los portadores minoritarios. Las concentraciones de portadores mayoritarios son, aproximadamente, las mismas que en una unión sin polarizar.

Denominaremos  $p_n(o)$   $n_p(o)$  a las concentraciones de portadores minoritarios en los bordes de la zona de transición. La diferencia de potencial entre dichos puntos es

$$V' = V_0 - V$$

donde  $V$  es la tensión de polarización aplicada (positiva si la polarización es directa y negativa si es inversa). Por tanto, a partir de las expresiones (34.65) y (34.66), y de las (35.22) y (35.23) se puede deducir que las concentraciones  $p_n(o)$   $n_p(o)$  son

$$p_n(o) = p_{po} e^{-(V_0-V)/V_T} = p_{no} e^{V/V_T} \quad (35.24)$$

$$n_p(o) = n_{po} e^{-(V_0-V)/V_T} = n_{no} e^{V/V_T} \quad (35.25)$$

Obsérvese que, dado el bajo valor del potencial equivalente de temperatura, pequeñas tensiones de polarización originan importantes variaciones de las concentraciones de portadores minoritarios.

Así, para una polarización inversa ( $V < 0$ ), se verifica que  $p_n(0) \ll p_{no}$  y  $n_p(0) \ll n_{po}$ , es decir, las concentraciones de portadores minoritarios en el borde de la zona de transición son mucho menores que las correspondientes al estado de equilibrio. Para una polarización directa, por el contrario,  $p_n(0) > p_{no}$  y  $n_p(0) > n_{po}$ .

El incremento de la concentración de portadores minoritarios sobre las concentraciones de equilibrio es

$$p'_n(0) = p_n(0) - p_{no} = p_{no} (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.26)$$

para los huecos en la zona n y

$$n'_n(0) = n_p(0) - n_{po} = n_{po} (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.27)$$

para los electrones de la zona p

Estos excesos de concentraciones constituyen una inyección de portadores minoritarios (inyección de huecos en la zona n y de electrones en la zona p), que se irán difundiendo por el cristal, de forma que  $p'$  y  $n'$  decrecen exponencialmente a partir del borde de la zona de transición, tal como se muestra en la figura 35.6.c.

Así, centrándonos en el caso de los huecos de la zona n, su concentración, en función de la distancia al borde de la zona de transición es, según (34.57),

$$p'_n(x) = p_{no} (e^{V/V_T} - 1) e^{-x/L_p} \quad (35.28)$$

Concentración que, al ser variable, da lugar a una corriente de difusión de huecos de izquierda a derecha, cuya intensidad en el borde de la zona de transición ( $x = 0$ ) es, según (34.58)

$$I_{pn}(0) = \frac{q D_p A}{L_p} p_{no} (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.29)$$

donde  $A$  es el área de la sección transversal del diodo. El segundo subíndice de  $I_{pn}$  indica que dicha corriente se produce en la zona  $n$  del diodo.

Del mismo modo, la intensidad de la corriente de difusión de electrones en el borde izquierdo de la zona de transición es

$$I_{np}(0) = \frac{q D_n A}{L_n} n_{po} (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.30)$$

Ambas intensidades llevan el sentido de izquierda a derecha, aunque los huecos y electrones se mueven en sentidos opuestos.

La corriente total del diodo,  $I$ , en  $x = 0$  es la suma de  $I_{pn}(0)$  y  $I_{np}(0)$ , o sea

$$I = q A \left( \frac{D_n n_{po}}{L_n} + \frac{D_p p_{no}}{L_n} \right) (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.31)$$

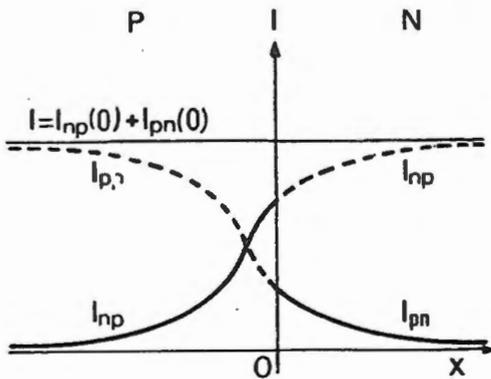


Fig. 35.7

Observese que la corriente total del diodo,  $I$ , es la misma en cualquier sección, por lo que en la figura 35.7, se ha representado mediante una recta horizontal. Las corrientes de difusión de portadores minoritarios inyectados,  $I_{np}$  y  $I_{pn}$ , decrecen exponencialmente con la distancia (Fig. 35.7) por lo cual deben aparecer corrientes de portadores mayoritarios ( $I_{pp}$  en la zona  $p$  y  $I_{nn}$  en la zona  $n$ ). Los valores de estas corrientes son

$$I_{pp}(x) = I - I_{np}(x); \quad (x \leq 0) \quad (35.32)$$

$$I_{nn}(x) = I - I_{pn}(x); \quad (x \geq 0) \quad (35.33)$$

Dichas corrientes están representadas en la figura 35.7.

La corriente total del diodo, dada por (35.32), puede expresarse como

$$I = I_0 (e^{V/V_T} - 1) \quad (35.34)$$

en donde el factor  $I_0$  depende de las características del diodo y vale

$$I_0 = Aq \left( \frac{D_n n_{po}}{L_n} + \frac{D_p p_{no}}{L_p} \right) \quad (35.35)$$

El factor  $I_0$  tiene dimensiones de intensidad de corriente y, como veremos a continuación, su valor coincide con la corriente inversa de saturación, definida en el apartado anterior. En efecto, si la polarización es inversa ( $V < 0$ ), el término  $e^{V/V_T}$  se hace despreciable (recuérdese que  $V_T = 0.026$  V a temperatura ambiente) y la corriente del diodo es

$$I \approx -I_0; \quad (V \ll -V_T) \quad (35.36)$$

Puesto que  $I_0$  depende de las concentraciones de portadores minoritarios en el equilibrio, y éstas se ven fuertemente modificadas por las variaciones de temperatura, resulta evidente que la corriente inversa de saturación es una función de la temperatura.

Finalmente hay que señalar que, para grandes tensiones de polarización directa, la altura de la barrera de potencial en la unión se hace casi nula, de forma que la ecuación (35.34) no es válida. En este caso la característica tensión-corriente del diodo estaría determinada por las resistencias del cuerpo del diodo y de los contactos óhmicos, siendo su variación lineal.

### Ejemplo

En un diodo de germanio, las concentraciones de dopado son  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  en la zona p y  $N_D = 2 \cdot 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  en la zona n. La sección de la unión es

$A = 0.1 \text{ cm}^2$ . Suponiendo que el diodo se encuentra a la temperatura ambiente, y a partir de los datos de la tabla 34.1, calcular

- Corriente inversa de saturación.
- Corriente para una polarización directa  $V = 200 \text{ mV}$ .

Supóngase una vida media de los portadores  $\tau_n = \tau_p = 10^{-6} \text{ s}$ .

### Solución:

La corriente inversa de saturación viene dada por la expresión (35.35)

$$I_o = Aq \left( \frac{D_n n_{po}}{L_n} + \frac{D_p p_{no}}{L_p} \right)$$

Calculemos cada uno de los factores de dicha ecuación

$$A = \text{Sección de la unión} = 0.1 \text{ cm}^2$$

$$q = \text{Carga del electrón} = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

según la tabla 34.1

$$D_n = 100 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$D_p = 48 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$n_{po} \approx \frac{n_i^2}{N_A} = \frac{(2.4 \cdot 10^{13})^2}{10^{16}} = 5.76 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$p_{no} \approx \frac{n_i^2}{N_D} = \frac{(2.4 \cdot 10^{13})^2}{2 \cdot 10^{16}} = 2.88 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$L_n = (D_n \tau_n)^{1/2} = (100 \cdot 10^{-6})^{1/2} = 0'01 \text{ cm}$$

$$L_p = (D_p \tau_p)^{1/2} = (48 \cdot 10^{-6})^{1/2} = 0'007 \text{ cm}$$

sustituyendo valores

$$I_o = 12 \mu\text{A}$$

Por tanto, la característica tensión-corriente de este diodo es

$$I = I_o (e^{+V/V_T} - 1) = 1'2 \cdot 10^{-5} (e^{+V/0'026} - 1)$$

para  $V = 200 \text{ mV}$

$$I = 26 \text{ mA}$$

Obsérvese que la corriente correspondiente a una débil polarización directa es varios órdenes de magnitud superior a la corriente inversa de saturación.

### 35.5. Característica tensión-corriente del diodo de unión

La ecuación (35.34) permite evaluar la variación de la corriente del diodo en función de la tensión aplicada al mismo. Su representación gráfica queda plasmada en la figura 35.8, en la que se han tomado escalas distintas para las intensidades correspondientes a las polarizaciones directa e inversa.

La observación de la curva característica tensión-corriente pone de manifiesto los siguientes aspectos:

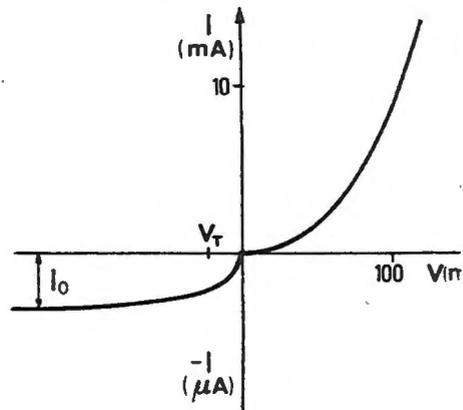


Fig. 35.8

- a) Para polarizaciones directas, y excepto en una zona próxima al origen, la corriente aumenta exponencialmente con la tensión

- b) En la zona de funcionamiento correspondiente a la polarización inversa, la corriente tiende a su valor de saturación cuando la tensión es varias veces  $V_T$ .
- c) En condiciones normales, la gama de intensidades de funcionamiento para la polarización directa es varios órdenes de magnitud mayor que  $I_0$ .

Es importante señalar que la expresión (35.34) ha sido obtenida para un modelo simplificado de diodo. En un diodo real dicha ecuación debe ser modificada, tomando la forma

$$I = I_0 (e^{V/\eta V_T} - 1) \tag{35.38}$$

donde  $\eta$  es un coeficiente que vale la unidad para el germanio. En el caso del silicio,  $n$  vale 2 para bajas corrientes y 1 para corrientes elevadas.

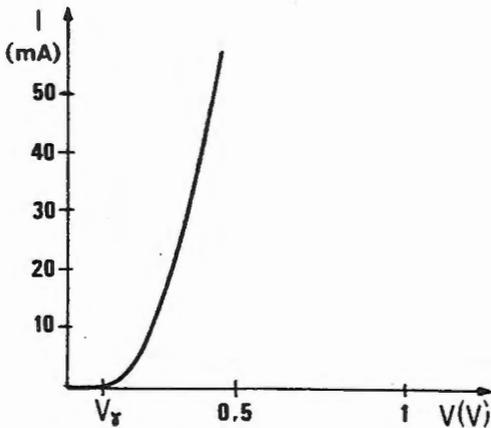


Fig. 35.9

poseer una tensión umbral  $V_T$ , por debajo de la cual la intensidad directa es despreciable.

Finalmente hay que señalar que la intensidad de saturación de muchos diodos es de 3 a 12 órdenes de magnitud menor que la intensidad directa nominal. Por tanto, el factor  $e^{V/\eta V_T}$  debe valer del orden de  $10^3$  a  $10^{12}$ , para producir corrientes directas apreciables. En consecuencia, si se representa gráficamente la característica tensión-corriente, con una escala adecuada para apreciar las intensidades y corrientes de funcionamiento (Fig. 35.9), el dispositivo parece

### 35.6. Resistencia del diodo

Teniendo en cuenta el funcionamiento del diodo, y según el tipo y magnitud de la tensión de polarización aplicada, se pueden distinguir tres parámetros referentes a resistencias, que son

- a) Resistencia estática,  $R$ , definida como parámetro equivalente a una resistencia óhmica:

$$R = \frac{V}{I} \quad (35.39)$$

donde  $V$  e  $I$  representan el voltaje y la intensidad que circula por el diodo.

La forma de la curva  $I(V)$  (Fig. 35.10), pone de manifiesto la gran variación que puede tener  $R$  al variar  $V$ . Así, si llamamos  $G$  a la conductancia estática

$$G = \frac{I}{V} \quad (35.40)$$

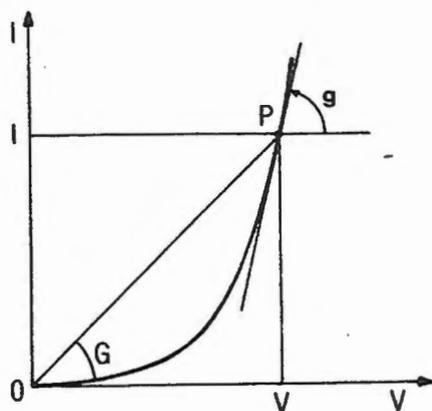


Fig.35.10

resulta que  $G$  queda representada por la pendiente de la recta  $OP$ , que une el origen de coordenadas con el punto de funcionamiento del diodo. Esta gran variación de  $R$  con  $V$  hace que este parámetro sea poco útil para caracterizar un diodo.

- b) Resistencia dinámica,  $r$ , definida como

$$r = \frac{dV}{dI} \quad (35.41)$$

La resistencia dinámica es el parámetro más importante para señales cuya variación es pequeña (es decir, para pequeños intervalos

entre los valores de  $V$  e  $I$  en su funcionamiento). Su inversa,  $g$ , es la conductancia dinámica

$$g = \frac{dI}{dV} = \frac{I_0 e^{V/\eta V_T}}{\eta V_T} = \frac{I + I_0}{\eta V_T} \quad (35.42)$$

y se representa en la figura 35.10, como la pendiente de la curva en el punto de funcionamiento.

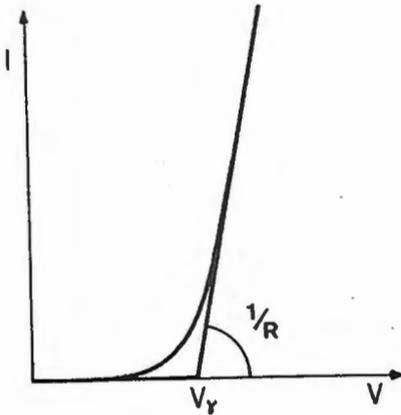


Fig. 35.11

- c) Resistencia directa,  $R_p$ , definida como la inversa de la pendiente de la recta que resulta al aproximar linealmente la curva de intensidades a partir de la intensidad umbral. Este parámetro es de aplicación en señales altas o puntos de funcionamiento correspondientes a valores elevados de  $V$  e  $I$  (Fig. 35.11).

### 35.7. Capacidades de transición y difusión

En el apartado 35.3, se comentó el efecto que una tensión de polarización tenía sobre la zona de transición de una unión p-n. Así, una tensión de polarización inversa provoca un ensanchamiento de dicha zona y un incremento de la carga espacial. Este aumento de la carga con la tensión representa un efecto capacitivo, de forma que se puede considerar que la unión p-n es un condensador cuya capacidad es una función de la tensión aplicada.

En base a estos argumentos, se define la **capacidad de transición**, o capacidad de la carga espacial, como

$$C_T = \left| \frac{dQ}{dV} \right| \quad (35.43)$$

donde  $dQ$  es el incremento de carga en la zona de transición provocado por un aumento de la tensión de polarización  $dV$ .

El valor de la capacidad de transición depende fundamentalmente de la estructura de la unión, según que el paso de la zona de carga espacial negativa a la positiva sea brusca o gradual (unión abrupta o gradual). Nos limitaremos a calcular la capacidad de transición para una unión abrupta, basándonos en las hipótesis y resultados obtenidos en la nota complementaria 35.1.

Teniendo en cuenta (35.17), la anchura de la zona de transición correspondiente a una tensión de polarización  $V$  es

$$l = \left[ \frac{2\epsilon}{q} (V_0 - V) \left( \frac{N_D + N_A}{N_D N_A} \right) \right]^{1/2} \quad (35.44)$$

Obsérvese que se ha sustituido  $V_0$  (altura de la barrera correspondiente a un diodo no polarizado) por  $(V_0 - V)$  (altura de la barrera correspondiente a una tensión de polarización  $V$ ).

La anchura de la región  $n$  de la zona de transición viene dada por (35.21), por lo que la carga almacenada entre  $x = 0$ , y  $x = x_n$  es

$$Q = A q N_D x_n = q A l \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \quad (35.45)$$

La capacidad de transición es, pues,

$$C_T = \left| \frac{dQ}{dV} \right| = \frac{dQ}{dl} \left| \frac{dl}{dV} \right| = A q \frac{N_A N_D}{N_A + N_D} \cdot \frac{1}{2} \frac{1}{l} \frac{2\epsilon}{q} \frac{N_A + N_D}{N_A N_D} = C_T = \frac{\epsilon A}{l} \quad (35.46)$$

Expresión equivalente a la de la capacidad de un condensador plano de superficie  $A$ , igual a la sección del diodo, separación entre placas  $l$  y con un dieléctrico de permitividad  $\epsilon$ .

En el caso de una polarización directa, y además de la capacidad de transición  $C_T$ , aparece un efecto capacitivo mucho más intenso que se cuantifica mediante la

capacidad de difusión  $C_D$ . El origen de esta gran capacidad está en el almacenamiento de cargas inyectadas cerca de la unión pero fuera de la zona de transición, figura 35.6.c.

La capacidad de difusión se define como

$$C_D = \frac{dQ_i}{dV} \tag{35.47}$$

donde  $dQ_i$  es la variación de carga inyectada provocada por un aumento de la tensión de polarización directa  $dV$ .

Hay que recalcar que, para polarizaciones inversas, la magnitud que cuantifica el comportamiento capacitivo de la unión es la capacidad de transición. En las polarizaciones directas la capacidad de difusión puede ser hasta un millón de veces superior a  $C_T$ , por lo que será  $C_D$  el parámetro que se debe utilizar.

### 35.8 Diodos Zener

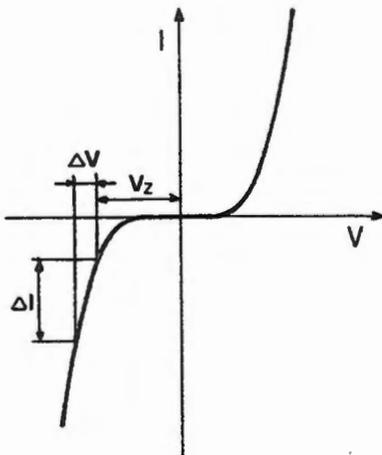


Fig. 35.12

Si a un diodo de unión se aplica una tensión inversa suficientemente grande, se llega a un punto,  $V_z$ , en el que se produce un cambio brusco en la curva característica, circulando una gran corriente inversa. Dicha tensión crítica recibe el nombre de tensión de ruptura (Fig. 35.12).

Existen dos mecanismos distintos a través de los cuales puede producirse la ruptura: la multiplicación por avalanche, y la ruptura Zener. En la primera los portadores minoritarios generados térmicamente caen por la barrera de potencial y adquieren sufi-

ciente energía para generar nuevos pares electrón-hueco al chocar con iones del cristal. Estos nuevos portadores pueden generar otros y así se va produciendo una multiplicación de portadores que da lugar a una gran corriente inversa.

En la ruptura de Zener la generación de portadores se produce por ruptura directa de los enlaces (sin colisión entre portadores y la red cristalina), por efecto del campo eléctrico muy intenso que se origina con fuertes polarizaciones inversas.

Los diodos diseñados para trabajar en la zona de ruptura se denominan diodos Zener y son utilizados como elementos referencia de tensión.

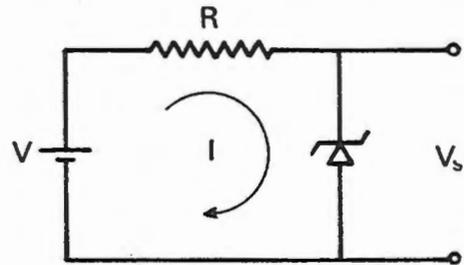


Fig. 35.13

En efecto, si se conecta un diodo Zener a una fuente de tensión continua sin estabilizar, (Fig. 35.13), de forma que, su punto de funcionamiento se encuentre en la región de ruptura, el diodo se opondrá a las variaciones de la tensión de alimentación ya que, en la región de ruptura, pequeños cambios de  $V$  originan grandes modificaciones de la intensidad.

### 35.9. Diodo túnel

El diodo túnel es una unión p-n en la que el dopado de ambas zonas es muy fuerte. Con ello se consigue una zona de transición extraordinariamente delgada, de forma que, electrones y huecos que en condiciones normales no podrían atravesar la unión saltan la barrera de potencial por efecto túnel (véase capítulo 30).

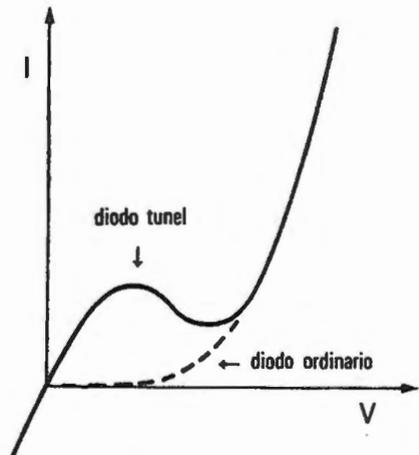


Fig. 35.14

El escape de portadores a través de la unión se produce para polarizaciones directas bajas, apareciendo una corriente adicional, superior a la correspondiente a un diodo normal. Si la polarización directa es elevada, la corriente sigue una ley exponencial similar a la estudiada en el caso del diodo ordinario.

La figura 35.14, muestra la característica tensión-corriente de un diodo túnel. Como puede observarse, dicha característica es parecida a las estudiadas anteriormente, salvo en la zona de bajas polarizaciones directas en la que aparece la corriente por efecto túnel antes citada.

La característica  $I(V)$  del diodo túnel presenta una zona de resistencia negativa (zona de pendiente negativa). Debido a ello, el diodo túnel puede utilizarse para la construcción de osciladores de relajación.

## PROBLEMAS

P.35.1. En un diodo de Ge con unión abrupta las resistividades de los dos lados son  $\rho_n = 5\Omega \text{ cm}$  y  $\rho_p = 1\Omega \text{ cm}$ . Suponiendo una temperatura de 300 k, calcular:

- a) Altura de la barrera de potencial en circuito abierto.
- b) Anchura de la región de transición.

### SOLUCIÓN

a)  $V_o = 0'19 \text{ V}$

b)  $I = 1'1 \cdot 10^{-6} \text{ m}$

P.35.2. Calcular la corriente inversa de saturación de un diodo de germanio de sección  $A = 0'01 \text{ cm}^2$ , sabiendo que las concentraciones de dopado son  $N_A = 4 \cdot 10^{14} \text{ cm}^{-3}$ ,  $N_D = 5 \cdot 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Supóngase  $T = 300 \text{ k}$  y  $L_n = L_p = 0'01 \text{ cm}$ .

### SOLUCIÓN

$$I_o = 25 \mu \text{ A}$$

P.35.3. Calcular, para un diodo de Ge, cuál debe ser la tensión de polarización directa para que la corriente alcance el 95 % del valor de saturación ( $T = 3000 \text{ k}$ ).

**SOLUCIÓN**

$$V = 0'017 \text{ V}$$

- P.35.4. Calcular la relación  $I(V) / I(-V)$  para un diodo de Ge a la temperatura  $T = 300 \text{ K}$ . Supóngase  $V = 0'06 \text{ V}$

**SOLUCIÓN**

$$I(V) / I(-V) = 10'1$$

- P.35.5. Calcular el factor por el que se multiplica la corriente inversa de saturación de un diodo de Ge cuando la temperatura pasa de  $300 \text{ k}$  a  $350 \text{ k}$ . (Supóngase que  $D_n$  y  $D_p$  no se modifican).

**SOLUCIÓN**

$$\frac{I_o(350)}{I_o(300)} = 115$$

- P.35.6. En una unión p-n abrupta, la ruptura Zener se produce para campos superiores a  $E_z = 2 \cdot 10^7 \text{ V / m}$ .

Sabiendo que  $\epsilon_r = 16$ ,

a) Calcular la tensión de ruptura si  $N_A = N_D = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$ .

b) Repetir el cálculo para  $N_A = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$ ;  $N_D = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ .

**SOLUCIÓN**

a)  $V_z = 354 \text{ V}$

b)  $V_z = 17'5 \text{ V}$

P.35.7. Un diodo de Ge tiene un dopado de  $N_A = 10^{15} \text{ cm}^{-3}$  en la zona p y de  $N_D = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  en la zona n. La sección del diodo es  $A = 0'1 \text{ cm}^2$ . Calcular la capacidad de transición:

a) Para una polarización inversa de 1 V.

b) Para una polarización inversa de 5 V.

**SOLUCIÓN**

a)  $0'91 \text{ nF}$

b)  $0'44 \text{ nF}$

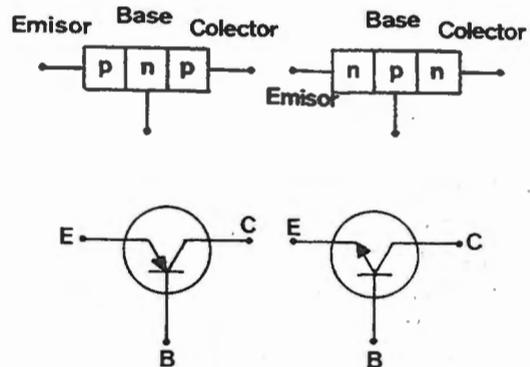


# CAPÍTULO 36

## TRANSISTORES DE UNIÓN

### 36.1. Generalidades

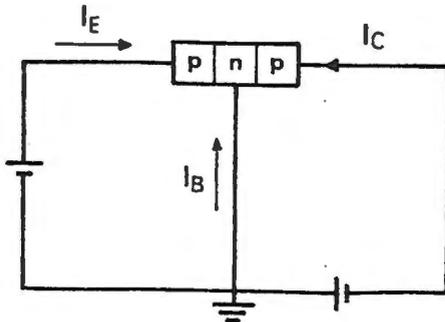
Se denomina transistor de unión a un dispositivo electrónico constituido por un cristal semiconductor en el que se han formado dos uniones p-n consecutivas. Esto puede conseguirse creando dos zonas tipo p separadas por una zona tipo n (transistor pnp) o bien creando dos zonas tipo n separadas por una zona tipo p.



*Fig. 36.1*

La principal aplicación del transistor es su funcionamiento como amplificador. Para ello es preciso polarizar una de las uniones en sentido directo y la otra en sentido inverso. La zona exterior de la unión polarizada en sentido directo se denomina **emisor**, mientras que la zona exterior de la unión polarizada en sentido inverso se llama **colector**. La parte central recibe el nombre de **base**. En la figura 36.1 se muestran los dos tipos de transistores, así como los símbolos utilizados para su representación. La flecha que aparece en el emisor indica el sentido de la corriente cuando la unión emisor-base está polarizada en sentido directo.

De ahora en adelante, y salvo que se indique lo contrario, nos ceñiremos al estudio del transistor p-n-p. El análisis de un transistor n-p-n es completamente similar si se intercambian los papeles de los huecos y electrones.



*Fig. 36.2*

Cuando la unión emisor base está polarizada en sentido directo y la unión base colector lo está en sentido inverso, se dice que el transistor está funcionando en el modo activo (Fig. 36.2). Este tipo de funcionamiento presenta propiedades de amplificación, ya que la corriente del colector puede experimentar grandes cambios con pequeñas variaciones en la tensión emisor-base.

En efecto, al polarizar en sentido directo la unión emisor-base se inyecta un exceso de huecos en la base, exceso que se difunde hacia el colector. Si el espesor de la base es muy pequeño (menor que una longitud de difusión) una gran parte de los huecos inyectados desde el emisor llega hasta la unión base-colector por lo que la corriente que atraviesa esta unión es mucho más intensa que la corriente inversa correspondiente a una unión p-n aislada. Por otra parte, pequeñas variaciones en la tensión emisor-base provocan grandes variaciones en la corriente que atraviesa dicha unión (recuérdese la elevada pendiente de la característica  $I(V)$  de una unión polarizada en sentido directo), y por tanto la corriente de colector también sufrirá grandes variaciones. En definitiva, en un transistor funcionando en modo activo se produce un traslado de corriente desde un circuito de baja resistencia (el circuito que contiene la unión emisor-base) a otro circuito de resistencia elevada (circuito con la unión base-colector), produciéndose una amplificación de potencia.

De lo expuesto hasta ahora se deduce que, para que el transistor funcione como tal, es preciso que la base sea muy delgada. Un dispositivo p-n-p con una base cuya anchura sea mucho mayor que la longitud de difusión no se comporta como un transistor, sino como dos uniones p-n separadas.

### ***36.2. Distribución de portadores en un transistor***

La figura 36.3 muestra la distribución de portadores en un transistor p-n-p sin polarizar, así como las barreras de potencial que aparecen en las uniones.

Estas distribuciones corresponden a las de un transistor típico, en el cual el emisor está más intensamente dopado que el colector, y ambos más dopados que la base. Por tanto las concentraciones de portadores mayoritarios verifican que

$$P_{eo} > P_{co} > n_{bo}$$

Por el contrario, las concentraciones de portadores minoritarios cumplen las desigualdades

$$n_{eo} < n_{co} < p_{bo}$$

donde los subíndices e, b y c hacen referencia al emisor, base y colector, respectivamente. El segundo subíndice, o, se refiere a que las concentraciones corresponden a las del equilibrio térmico.

Las barreras de potencial que aparecen en las uniones emisor-base y base-colector se representan por  $V_o$  y  $V'_o$ , respectivamente. Dadas las diferencias en el dopado del emisor, base y colector antes citadas, resulta evidente que  $V_o > V'_o$ .

Supongamos ahora un transistor polarizado en el modo activo. La tensión directa aplicada a la unión emisor base es  $V_{eb}$ , y la tensión de polarización inversa aplicada a la unión base-colector es  $V_{bc}$ . En la figura 36.4.b.se representan las barreras de potencial correspondientes a cada unión.

En la figura 36.4.c. se muestran las concentraciones de portadores a lo largo del transistor. Para obtener dichas concentraciones se pueden seguir los razonamientos expuestos en el capítulo anterior, para el caso del modelo unidimensional de la unión p-n.

Así, la disminución de la barrera de potencial de la unión del emisor provoca una inyección de huecos desde el emisor a la base, y una inyección de electrones

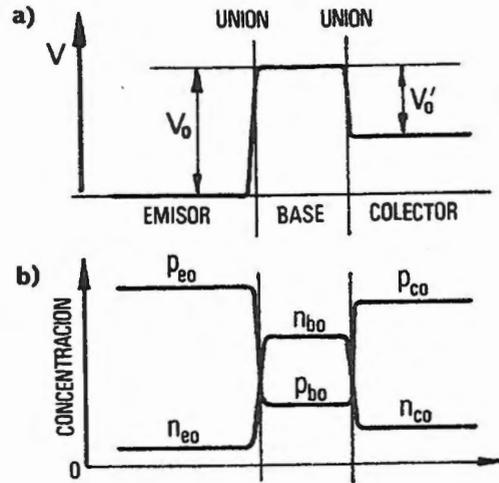


Fig. 36.3

desde la base al emisor. Las concentraciones de portadores minoritarios a ambos lados de la unión son

$$p_b(o) = p_{bo} e^{V_{cb}/V_T} \quad (36.1)$$

$$n_e(o) = n_{eo} e^{V_{cb}/V_T} \quad (36.2)$$

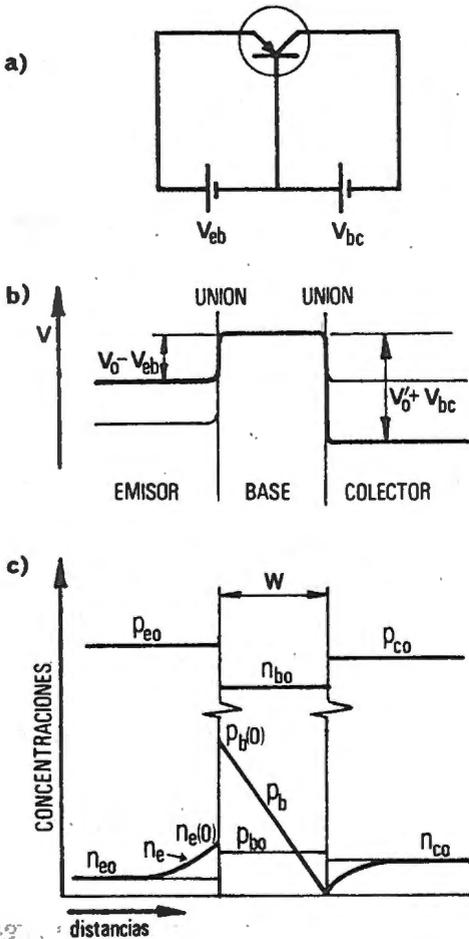


Fig. 36.4

donde el exceso de huecos de la base  $p_b(o)$ , suele ser mucho mayor que el exceso de electrones en el emisor,  $n_e(o)$ , ya que como se ha indicado anteriormente el emisor está mucho más dopado que la base y, por tanto,  $p_{bo} \gg n_{eo}$ .

Por otra parte, las concentraciones de portadores minoritarios a ambos lados de la unión de colector, polarizada inversamente, son mucho menores que las correspondientes a una unión sin polarizar, haciéndose prácticamente despreciables.

Hay que señalar que, en las proximidades de las dos uniones, las concentraciones de portadores mayoritarios se modifican ligeramente con respecto a las del equilibrio térmico. No obstante, y dado el elevado valor de  $p_{eo}$ ,  $n_{bo}$  y  $p_{co}$ , las variaciones relativas son muy pequeñas frente a las modificaciones en las concentra-

Si la anchura de la base fuese varias veces la longitud de difusión,  $p_b$  decrecería exponencialmente hasta  $p_{b0}$  y luego, en las proximidades de la unión del emisor, disminuiría hasta un valor casi nulo. No obstante, y dado que el espesor de la base es muy inferior al de una longitud de difusión, la disminución de la concentración de huecos desde el borde de la unión emisor-base hasta el borde de la unión base-emisor es prácticamente lineal, tal como se muestra en la figura 36.4. Esta aproximación está fundamentada en el hecho de que, al recombinarse muy pocos huecos de los inyectados desde el emisor, la corriente de difusión de huecos a través de la base es prácticamente constante, lo que requiere un gradiente de concentraciones uniforme y, por tanto, una distribución lineal.

### 36.3. Balance de corrientes en un transistor en el modo activo

Una vez establecidas las concentraciones de portadores en cada una de las zonas del transistor polarizado en el modo activo, pasaremos a hacer una estimación aproximada de las corrientes. Para ello partiremos de las expresiones obtenidas en lecciones anteriores y admitiremos las hipótesis que veníamos utilizando hasta ahora: modelo unidimensional con uniones abruptas, base muy delgada y emisor mucho más dopado que la base.

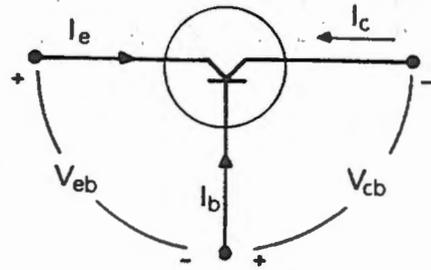


Fig. 36.5

Se denominarán  $I_e$ ,  $I_b$  y  $I_c$ , respectivamente a las intensidades que entran por el emisor, base y colector, siguiendo el criterio de signos de la figura 36.5.  $V_{eb}$  y  $V_{cb}$  son las tensiones de polarización aplicadas, con  $V_{eb} > 0$  y  $V_{cb} < 0$ .

#### 36.3.1. Corriente del emisor

Siguiendo un razonamiento similar al expuesto en el capítulo anterior, para el caso de una unión p-n polarizada directamente, la corriente del emisor es la suma de las intensidades de corriente de los portadores minoritarios inyectados a ambos lados de la unión emisor-base y, por tanto, constituida por una corriente de

electrones,  $I_{ne}$ , inyectados desde la base en el emisor y por una corriente,  $I_{pb}$ , de huecos inyectados del emisor a la base.

$$I_e = I_{pb} + I_{ne} \quad (36.3)$$

La corriente  $I_{pb}$  puede estimarse fácilmente si se supone que la concentración de huecos en la base sigue una ley lineal. Así,

$$I_{pb} = \frac{q A D_b}{W} [p_b(o) - p_b(W)] = \frac{q A D_b}{W} p_{bo} \left[ e^{V_{eb}/V_T} - e^{V_{cb}/V_T} \right] \quad (36.4)$$

donde  $D_b$  es la constante de difusión de los huecos en la base y  $W$  es la anchura de la base. La expresión (36.4) puede simplificarse si se tiene en cuenta que, en el modo activo,  $V_{cb} \ll -V_T$ , por lo que

$$e^{V_{cb}/V_T} \gg e^{V_{cb}/V_T}$$

quedando  $I_{pb}$  como

$$I_{pb} \approx \frac{q A D_b}{W} p_{bb} e^{V_{cb}/V_T} \quad (36.5)$$

La corriente de electrones inyectados en el emisor desde la base se calcula de la misma forma que en el caso de una unión p-n polarizada en sentido directo:

$$I_{ne} \approx \frac{q A D_e}{L_e} n_{eo} (e^{V_{eb}/V_T} - 1) \quad (36.6)$$

donde  $D_e$  y  $L_e$  son la difusividad y longitud de difusión de los electrones en el emisor, respectivamente.

Dado el bajo valor de  $V_T$  a la temperatura ambiente, incluso para bajas tensiones de polarización directa se verifica que

$$e^{V_{eb}/V_T} - 1 \approx e^{V_{eb}/V_T}; \quad (V_{eb} \gg V_T = 0.026 \text{ V})$$

con lo que (36.6) se puede simplificar como

$$I_{ne} \approx \frac{q A D_e n_{eo}}{L_e} e^{V_{eb}/V_T} \quad (36.7)$$

En definitiva la corriente del emisor es

$$I_{ne} \approx \left( \frac{q A D_b p_{bo}}{W} + \frac{q A D_e n_{eo}}{L_e} \right) e^{V_{eb}/V_T} \quad (36.8)$$

Hay que señalar que el término  $I_{ne}$  constituye una corriente que no contribuye a la corriente del colector  $I_c$  (Fig. 36.6). Por ello, en la fabricación de transistores se procura que  $I_{ne}$  sea lo más pequeña posible frente a  $I_{pb}$ . Esto puede conseguirse dopando al emisor mucho más intensamente que la base y construyendo una base muy estrecha. Con estas condiciones se puede obtener una corriente de huecos  $I_{pb}$  varios órdenes de magnitud superior a  $I_{nc}$  (ver ejemplo resuelto).

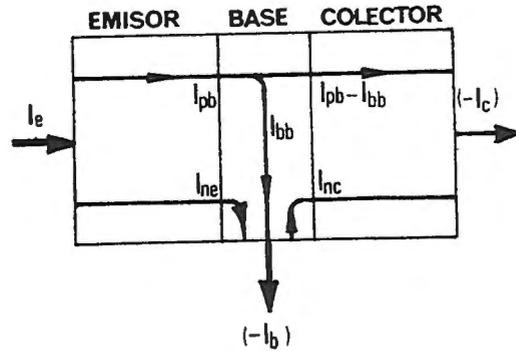


Fig. 36.6

### 36.3.2. Corriente de base

En un transistor polarizado en el modo activo, la corriente de base está formada, fundamentalmente, por tres componentes:

- $-I_{bb}$  = Corriente de electrones que se recombinan con una parte de los huecos inyectados en la base desde el emisor.
- $I_{nc}$  = Corriente de electrones generados térmicamente en el colector y extraídos hacia la base (recuérdese que la unión base-emisor está polarizada en sentido inverso).

- c)  $-I_{ne}$  = Corriente de electrones inyectados en el emisor desde la base. Esta corriente ha sido calculada en el apartado anterior, y viene dada por la expresión (36.7).

Como se ha explicado anteriormente, la polarización directa  $V_{eb}$  provoca una inyección de huecos en la base que se difunden hacia el colector. La mayor parte de estos huecos son colectados por el colector, ya que  $W \ll L_b$ ; No obstante, una pequeña fracción del exceso de huecos se recombina, lo que exige una corriente de electrones que entran por el terminal de la base y que mantienen dicha recombinación. Esta corriente es la que se ha denominado  $I_{bb}$ .

El cálculo aproximado de  $I_{bb}$  es sencillo, una vez conocida la distribución del exceso de huecos en la base (Fig. 36.4.c). En efecto, la velocidad de recombinación en la base es

$$\frac{\partial p_b}{\partial t} = \frac{p'_b}{\tau_b}$$

donde  $p'_b$  es el exceso de huecos en la base y  $\tau_b$  es la vida media de dichos huecos. Puesto que para cada hueco recombinado se precisa un electrón, la corriente  $I_{bb}$  es

$$I_{bb} = \frac{qA}{\tau_b} \int_0^W p'_b(x) dx \quad (36.8)$$

Por otra parte

$$p_b(x) = p_b(x) - p_{bo} = p_{bo} (e^{V_{eb}/V_T} - 1) - \frac{p_{bo}}{W} x (e^{V_{eb}/V_T} - e^{V_{cb}/V_T}) \quad (36.9)$$

Ahora bien, puesto que  $V_{cb} \ll -V_T$ , entonces esta expresión puede simplificarse como

$$p'_b(x) \approx p_{bo} \left[ e^{V_{eb}/V_T} - 1 \right] - \frac{p_{bo} x}{W} e^{V_{eb}/V_T} \quad (36.10)$$

y, sustituyendo en (36.8) e integrando, resulta

$$I_{bb} \approx \frac{q A W P_{bo}}{2 \tau_b} (e^{V_{eb}/V_T} - 2) \quad (36.11)$$

La intensidad  $I_{bb}$  es una componente de  $I_{pb}$  que no contribuye a la corriente del colector. Su valor puede hacerse muy pequeño si se construye una base muy estrecha, y utilizando un semiconductor en el que la vida media de los huecos sea larga. En definitiva, se trata de conseguir una longitud de difusión mucho mayor que la anchura de la base.

$I_{nc}$  representa la corriente de electrones extraídos del colector. Su valor puede calcularse utilizando la expresión obtenida para la unión polarizada en sentido inversa

$$I_{nc} = -\frac{q A D_c n_{co}}{L_c} (e^{V_{cb}/V_T} - 1) \quad (36.12)$$

donde  $D_c$  y  $L_c$  son las constantes de difusión y longitud de difusión del colector, respectivamente. Puesto que  $V_{cb} \ll -V_T$ , la expresión (36.12) puede simplificarse como

$$I_{nc} \approx \frac{q A D_c n_{co}}{L_c} \quad (36.13)$$

Esta componente de corriente puede disminuirse si se dopa intensamente el colector, con lo que se disminuye  $n_{co}$ .

La corriente total de la base es

$$I_b = -I_{ne} - I_{bb} + I_{nc} \quad (36.14)$$

Como puede verse en las expresiones (36.14), (36.13), (36.11) y (36.7), la corriente de base no está directamente afectada por la tensión de polarización inversa aplicada a la unión base-colector. Sin embargo, hay que señalar que este resultado es admisible únicamente en el caso en que el transistor funcione en el modo activo. Por otra parte, la anchura efectiva de la base sí depende de  $V_{cb}$ , ya que al aumentar la polarización inversa se incrementa la anchura de la zona de carga espacial de la unión y disminuye el espesor de la base.

### 36.3.3. Corriente de colector

Aplicando la primera ley de Kirchhoff, y teniendo en cuenta el criterio de signos de la figura 36.6, la corriente del colector es

$$I_c = -I_b - I_e = -I_{pb} + I_{bb} - I_{nc} \quad (36.15)$$

En un transistor típico polarizado en le modo activo,  $I_c$  es positiva mientras que  $I_b$  es negativa (la corriente  $I_b$  sale de la base), por lo que

$$|I_c| < I_e \quad (36.16)$$

es decir la corriente del colector es ligeramente inferior a la del emisor.

### Ejemplo 36.1

Un transistor p-n-p de Ge tiene una sección  $A = 10^{-4} \text{ cm}^2$ , y una anchura efectiva de la base  $W = 10^{-4} \text{ cm}$ . Los dopados de cada una de las zonas son:  $N_{ac} = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ ;  $N_{db} = 10^{16} \text{ cm}^{-3}$  y  $N_{ae} = 10^{17} \text{ cm}^{-3}$ . Determinar las componentes de corriente para una tensión emisor-base  $V_{eb} = 0.2 \text{ V}$ .

Datos:

$$n_i = 2.5 \cdot 10^{13} \text{ cm}^{-3}; \quad D_e = D_c = 100 \text{ cm}^2 / \text{s}; \quad D_b = 49 \text{ cm}^2 / \text{s}$$

$$L_e = L_c = 5 \cdot 10^{-4} \text{ cm}; \quad \tau_b = 100 \text{ ns}; \quad V_T = 0.026 \text{ V}$$

En primer lugar calcularemos las concentraciones de equilibrio de los portadores minoritarios en cada zona del transistor.

Así,

$$n_{eo} = \frac{n_i^2}{N_{ac}} = \frac{(2.5 \cdot 10^{13})^2}{10^{18}} = 6.25 \cdot 10^8 \text{ cm}^{-3}$$

$$p_{bo} = \frac{n_i^2}{N_{db}} = \frac{(2'5 \cdot 10^{13})^2}{10^{16}} = 6'15 \cdot 10^{10} \text{ cm}^{-3}$$

$$n_{co} = \frac{n_i^2}{N_{ac}} = \frac{(2'5 \cdot 10^{13})^2}{10^{17}} = 6'25 \cdot 10^9 \text{ cm}^{-3}$$

a) **Emisor**

Según (36.5) y (36.7)

$$I_{pb} = 1'074 \text{ mA}$$

$$I_{nc} = 4'4 \mu\text{A}$$

Es decir la corriente de huecos inyectados en la base es muy superior a la corriente de electrones inyectados en el emisor. La corriente de emisor total es

$$I_e = 1'08 \text{ mA}$$

b) **Base**

A partir de (36.11) y (36.13), resulta

$$I_{bb} = 1'09 \mu\text{A}$$

Por otra parte

$$I_{nc} = 0'02 \mu\text{A}$$

En definitiva, la corriente de base es

$$I_b = -5'47 \mu\text{A}$$

cuyo signo menos indica que sale del transistor . Por otra parte, su valor es unas doscientas veces inferior a la corriente del emisor.

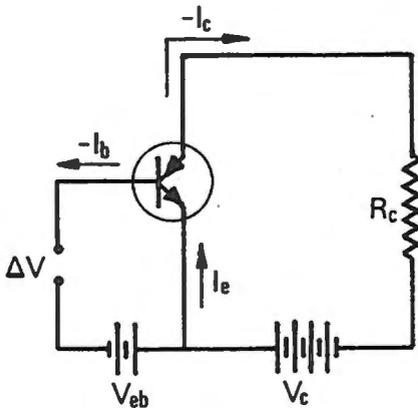
c) **Colector**

La intensidad del colector es

$$I_c = 1'075 \text{ mA}$$

corriente que sale del emisor y que es aproximadamente igual a la del emisor.

**36.4. El transistor como amplificador**



*Fig. 36.7*

Para comprender el funcionamiento del transistor como amplificador, se partirá del circuito de la figura 36.7, en el que el transistor se conecta en la configuración denominada de emisor común. El generador  $V_{eb}$  asegura que la unión base-emisor esté polarizada en sentido directo. Una batería  $V_c$  ( $V_c \gg V_{eb}$ ) proporciona la tensión de polarización inversa a la unión del emisor.

El circuito de entrada, en el que se aplicará la señal que se desea amplificar, es el que contiene a la base y el emisor. El circuito de salida

está conectado a las terminales del colector y del emisor.  $R_c$  es la resistencia de carga del circuito de salida.

Supondremos que, cuando la tensión de entrada es nula (terminales de entrada cortocircuitadas), las corrientes que circulan por cada terminal son  $I_e$ ,  $I_b$  e  $I_c$ , con los sentidos indicados en la figura 36.7. A continuación se calcularán cuales son los incrementos que se producen en dichas intensidades si se modifica ligeramente la tensión  $V_{eb}$ , aplicando una ddp adicional  $\Delta V$  a la entrada.

En este desarrollo, se admitirá que el incremento de tensión  $\Delta V$  es lo suficientemente pequeño para que las variaciones de intensidad que provoca estén relacionadas linealmente con él. Asimismo, se despreciarán los efectos dinámicos producidos por la aplicación de  $\Delta V$  ( $\Delta V$  se aplica muy lentamente).

a) **Variación de la intensidad de salida ( $-I_c$ )**

Como se muestra en la figura 36.7, la corriente de salida es ( $-I_c$ ). Dicha intensidad tiene, según (36.15) tres componentes:  $I_{pb}$ ,  $I_{bb}$  e  $I_{nc}$ , ahora bien, en un transistor polarizado en el modo activo, la corriente  $I_{pb}$  es muy superior a las otras dos (unas mil veces superior en el ejemplo anterior) por lo que, a efectos de cálculo de las variaciones en la intensidad del colector, es admisible suponer que

$$-I_c \approx I_{pb} = \frac{q A D_b}{W} p_{bo} e^{V_{eb}/V_T} \quad (36.17)$$

Suponiendo que la variación de  $V_{eb}$ ,  $\Delta V$ , es pequeña, la variación de la corriente de salida es

$$\Delta(-I_c) \approx \frac{q A D_b}{W V_T} p_{bo} e^{V_{eb}/V_T} \Delta V = \frac{|I_c|}{V_T} \Delta V \quad (36.18)$$

y, llamando transconductancia,  $g_m$ , al factor  $|I_c|/V_T$ ,

$$g_m = \frac{|I_c|}{V_T} \quad (36.19)$$

resulta

$$\Delta(-I_c) = g_m \Delta V \quad (36.20)$$

La transconductancia tiene las dimensiones de una conductancia y su valor depende de la temperatura y del punto de funcionamiento. A la temperatura ambiente,  $g_m$ , vale unos 0'04 mhos por mA de intensidad en el colector.

**b) Variación de la intensidad de entrada ( $-I_b$ )**

La corriente de base tiene, según la expresión (36.14), tres componentes:  $I_{ne}$ ,  $I_{bb}$  e  $I_{nc}$ . De ellas, tan sólo las dos primeras dependen directamente de la tensión  $V_{eb}$ . Nos limitaremos, por tanto a calcular sus variaciones.

De las ecuaciones (36.11) y (36.7) se deduce que

$$\Delta I_{bb} = \frac{q A W p_{bo}}{2 \tau_b V_T} e^{V_{eb}/V_T} \Delta V \quad (36.21)$$

$$\Delta I_{ne} = \frac{q A D_e}{L_e V_T} n_{eo} e^{V_{eb}/V_T} \Delta V \quad (36.22)$$

Por otra parte, a partir de (36.17) puede expresarse  $e^{V_{eb}/V_T}$  en función de la intensidad del colector

$$e^{V_{eb}/V_T} = \frac{|I_c| W}{q A D_b p_{bo}} \quad (36.23)$$

sustituyendo (36.23) en (36.21) y (36.22) resulta

$$\Delta I_{bb} = \frac{W^2}{2 \tau_b D_b} \frac{|I_c|}{V_T} \Delta V \quad (36.24)$$

y

$$\Delta I_{ne} = \left( \frac{D_e n_{eo}}{D_b p_{bo}} \frac{W}{L_e} \right) \frac{|I_c|}{V_T} \Delta V \quad (36.25)$$

En definitiva, el incremento de la corriente e base es

$$\Delta(-I_b) = \Delta I_{bb} + \Delta I_{ne} = \left[ \left( \frac{D_e n_{eo}}{D_b p_{bo}} \frac{W}{L_e} \right) + \frac{W^2}{2 \tau_b D_b} \right] g_m \Delta V \quad (36.26)$$

y denominando

$$\delta = \left( \frac{D_e n_{eo} W}{D_b p_{bo} L} \right) + \frac{W^2}{2\tau_b D_b} \quad (36.27)$$

resulta

$$\Delta(-I_b) = \delta g_m \Delta V \quad (36.28)$$

El parámetro  $\delta$  cuantifica el efecto que, sobre la corriente de base, produce un incremento de la tensión  $V_{eb}$ . Así, al disminuir la barrera de potencial en la unión emisor-base, se produce un aumento de huecos inyectados desde el emisor, aumentando la concentración de portadores minoritarios en la base, lo que conduce a un incremento de la tasa de recombinación. Debido a ello,  $I_{bb}$  crece.

Por otra parte, la disminución de la barrera de potencial antes citada, supone un incremento del número de electrones inyectados en el emisor desde la base, con lo que se produce un aumento de la corriente  $I_{ne}$ .

c) **Variación de la tensión colector-emisor ( $V_{ce}$ )**

A partir de la figura 36.7, se deduce que la tensión colector-emisor es

$$V_{ce} = -V_c - I_c R_c \quad (36.29)$$

Por tanto, si  $V_{eb}$  se incrementa en  $\Delta V$ ,  $V_{ce}$  variará como

$$\Delta V_{ce} = R_c \Delta(-I_c) = R_c g_m \Delta V \quad (36.30)$$

La expresión anterior implica que  $\Delta V_{ce}$  puede aumentar sin límite, sin más que incrementar suficientemente la resistencia de la carga  $R_c$ . Tal suposición no es cierta, ya que hay que tener presente que, en el modelo simplificado que se ha desarrollado, no se ha tenido en cuenta el efecto de la tensión de polarización inversa  $V_{cb}$  sobre la anchura de la base,  $W$ . Valores muy elevados de  $g_m R_m$  suponen una importante variación de  $V_{cb}$ , lo que modificaría notablemente la anchura  $W$ , no siendo válidas entonces las premisas del modelo utilizado.

d) **Ganancias de corriente y de tensión**

Supongamos que, a la entrada del circuito de la figura 36.7, se aplica una señal alterna de pequeña amplitud,  $\Delta V$ , y frecuencia lo suficientemente pequeña para que puedan ser despreciados los efectos dinámicos que no han sido tenidos en cuenta en el modelo anterior.

En estas condiciones, por el circuito de entrada circulará una corriente alterna  $-I_b - \Delta I_b$ . Es decir, sobre la corriente  $-I_b$  que existía para  $\Delta V = 0$ , se superpone una corriente alterna de amplitud  $\Delta(-I_b)$ .

De forma análoga, en el circuito de salida aparecerá una corriente alterna de amplitud  $\Delta(-I_c)$  superpuesta a  $-I_c$  (corriente de colector para  $\Delta V = 0$ ).

Se define la ganancia de intensidad como

$$\frac{\Delta(-I_c)}{\Delta(-I_b)} = \frac{g_m \Delta V}{\delta g_m \Delta V} = \frac{1}{\delta} \quad (36.31)$$

Obsérvese que, al ser  $\delta$  mucho menor que 1 (ver problema 36.3) la ganancia de intensidad puede tomar valores muy elevados.

De forma análoga, se define la ganancia de tensión como

$$\frac{\Delta V_{ce}}{\Delta V} = \frac{R_c g_m \Delta V}{\Delta V} = R_c g_m \quad (36.32)$$

En definitiva, la señal de entrada se ve amplificada tanto en intensidad como en tensión.

## PROBLEMAS

- P.36.1. Dado el transistor del ejemplo 36.1, calcular las corrientes suponiendo que la base tiene un espesor de  $W = 0'5 \cdot 10^{-4}$  cm.

### SOLUCIÓN

$$I_e = 2'15 \text{ mA}; \quad I_b = -4'93 \text{ } \mu\text{A}; \quad I_c = 2'15 \text{ mA}$$

- P.36.2. Dado el transistor del ejemplo 36.1, calcular las corrientes suponiendo que  $N_{ac} = N_{db} = N_{ac} = 10^{18} \text{ cm}^{-3}$ . (Admítase que no varía el espesor de la base).

### SOLUCIÓN

$$I_e = 15'14 \text{ } \mu\text{A}; \quad I_b = -4'41 \text{ } \mu\text{A}; \quad I_c = -10'73 \text{ } \mu\text{A}$$

- P.36.3. Dado el transistor del ejemplo 36.1, y suponiendo que se encuentra conectado en el montaje de emisor común, con una resistencia de carga  $R_c = 1 \text{ k } \Omega$ , calcular, para un incremento de la tensión emisor-base  $\Delta V = 10 \text{ mV}$ .

- a)  $\Delta(-I_b)$
- b)  $\Delta(-I_c)$
- c)  $\Delta V_{ce}$
- d) Ganancia de intensidad.
- e) Ganancia de tensión.

(Supongase, como intensidades, correspondientes al punto de funcionamiento las calculadas en el citado ejemplo).

### SOLUCIÓN

a)  $\Delta(-I_b) = 2'1 \mu\text{A}$

b)  $\Delta(-I_c) = 0'41 \text{ mA}$

c)  $\Delta(V_{ce}) = 0'41 \text{ V}$

d)  $\frac{1}{\delta} = 196$

e)  $\frac{\Delta V_{ce}}{\Delta V} = 41$

P.36.4. A partir de los datos del ejemplo resuelto 36.1, y denominando  $x = N_{ac} / N_{db}$ , calcular la ganancia de intensidad para los siguientes valores de  $x$

a)  $x = 10$

b)  $x = 100$

c)  $x = 1000$

(Considérese el mismo punto de funcionamiento en los tres casos, igual al calculado en el citado ejemplo).

### SOLUCIÓN

a) 24

b) 196

c) 700

